Algebra Moderna 2, FAMAT-UG, aug-dic, 2010

Examen final - soluciones

(3 dic, 2010)

Existe o no existe?

En cada uno de los siguientes incisos hay que decidir si existe un cierto objeto: en caso que existe *solo hay que dar un ejemplo explicito* (no basta con una demostración que existe). Si no existe hay que dar una explicación *breve* (no es necesario dar una demostración completa).

Ejemplos:

1. Una extensión de campos de grado 2.

▷ Existe. $\mathbb{C}/\mathbb{R}$. □

2. Un campo con 18 elementos.

▷ No existe. Un campo finito tiene característca $p > 0$ para algun primo p, por lo que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$ de dimension finita, por lo que el número de elementos en el campo debe ser una potencia de p. □

Hay resolver 16 de los incisos. Si resuelves mas solo cuentan tus mejores 16.

Los incisos

1. Un campo con 9 elementos.

   ▷ $\mathbb{Z}_3[x]/I$, donde I es el ideal generado por $x^2 + 1$. □

2. Un campo infinito de característica 2.

   ▷ $\mathbb{Z}_2(x)$. □

3. Una extensión de grado infinito de un campo finito.

   ▷ $\mathbb{Z}_2(x)/\mathbb{Z}_2$. □

4. Dos extensiones no isomorfas de $\mathbb{Z}_2$ de grado 3.

   ▷ No existen. Todos los campos finitos con el mismo número de elementos son isomorfos. El isomorfismo fija el campo base $\mathbb{Z}_2$. □

5. Dos extensiones no isomorfas de $\mathbb{Q}$ de grado 3.

   ▷ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}$. □

6. Una extensión de campos con grupo de Galois no conmutativo.

   ▷ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/3})/\mathbb{Q}$. □

7. Una extensión de $\mathbb{Q}$ de grado 6 con grupo de Galois de orden 4.

   ▷ No existe. El orden del grupo de Galois de una extensión divide a su grado. □

8. Una extensión de $\mathbb{Q}$ de grado 6 con grupo de Galois de orden 3.

   ▷

9. Una extensión de Galois de $\mathbb{Q}$ de grado 7.

   ▷ $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$, donde $\alpha = \cos(2\pi/29) + \cos(24\pi/29)$.

   Explicación: sea $\omega = e^{2\pi i/29}$. Como 29 es primo, el polinomio irreducible de ω es $(x^{29} - 1)/(x - 1)$, de grado 28. $\mathbb{Q}(\omega)$ es el campo de descomposición de $x^{29} - 1$ y su grupo de Galois G es cíclico, generado por $\phi : \omega \mapsto \omega^2$ (usando el hecho que 2 genera al grupo $\mathbb{Z}_{29}^*$. Sea $\sigma = \phi^7$. Entonces σ genera un subgrupo de G de índice 7, por lo que su campo fijo tiene grado 7 sobre $\mathbb{Q}$. Este campo esta generado por la suma de los elementos en la órbita de ω bajo σ. Esto es $\omega + \omega^{12} + \bar{\omega} + \bar{\omega}^{12} = 2(\cos(2\pi/29) + \cos(24\pi/29))$. □

10. Un polinomio irreducible de grado 3 sobre $\mathbb{Z}_3$.

    ▷ $x^3 - x + 1$. □

11. Dos polinomios en $\mathbb{Q}[x]$, irreducibles y del mismo grado, con grupos de Galois con ordenes distintos.

    $\triangleright$ $x^3 - 2$, $x^3 + 3x + 1$. (El grupo del primero es S_3 y del segundo es $\mathbb{Z}_3$. Esto se determina calculando la descriminante de los polinomios). $\square$

12. Dos polinomios en $\mathbb{Q}[x]$, irreducibles y del mismo grado, con grupos de Galois con el mismo orden pero no isomorfos.

    $\triangleright$ $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $x^4 - 4x^2 = 2$. (El grupo del primero es $\mathbb{Z}_4$, del segundo es $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.) $\square$

13. Un ángulo $\theta \in (0, \pi/17)$ que no se puede trisectar con compas y regla.

    $\triangleright$ $\pi/21$. (Si se puede trisectar $\pi/21$ se puede trisectar $7 \cdot \pi/21 = \pi/3$). $\square$

14. Un ángulo $\theta \in (0, \pi/17)$ que sí se puede trisectar con compas y regla.

    $\triangleright$ $3\pi/64$. $\square$

15. Un elemento primitivo de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$.

    $\triangleright$

16. Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ de grado 2010 sobre $\mathbb{Q}$.

    $\triangleright$ $\sqrt[2010]{2}$. $\square$

17. Un elemento $\alpha \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/11})$ de grado 5 sobre $\mathbb{Q}$.

    $\triangleright$ $\cos(2\pi/11)$. $\square$

18. Una extensión K de $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ tal que $K/\mathbb{Q}$ es una extensión de Galois.

    $\triangleright$ $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, e^{2\pi i/5})$. $\square$

19. Un automorfismo de orden 4 de $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/17})$.

    $\triangleright$ El automorfismo dado por $e^{2\pi i/17} \mapsto e^{16\pi i/17}$. $\square$