Guia para el examen final (3 dic, 2010)

(En construcción)

Notas:

1. Los campos en esta guia son de característica arbitraria (no necesariamente 0) a menos que se indica otra cosa.

2. Los problemas marcados con aterisco * no los se resolver todavia.

I. Cierto o Falso.

1. Existe una extensión de Galois de $\mathbb{Q}$ de grado 5.
2. El grupo de Galois de un polinomio actua transitivamente en el conjunto de las raices del polinomio (en un campo de descomposición del polinomio).
3. El grupo de Galois de un polinomio irreducible actua transitivamente en el conjunto de las raices del polinomio (en un campo de descomposición del polinomio).
4. Existe un campo con 81 elementos.
5. Todos los campos con 81 elementos son isomorfos.
6. El número de polinomios irreducibles sobre un campo finito es finito.
7. Un polinomio irreducible (sobre un campo) de grado n tiene n raices distintas en un campo de descomposición para el polinomio.
8. Para todo entero positivo n y $a \in \mathbb{Q}$, el polinomio $x^n - a$ tiene grupo de Galois abeliano.
9. Para todo entero positivo n y $a \in \mathbb{Q}$, el polinomio $x^n - a$ tiene grupo de Galois soluble.
10. Para todo entero positivo n, el grupo de Galois de $x^n - 1$ sobre $\mathbb{Q}$ es abeliano.
11. Para todo entero positivo n el grupo de Galois de $x^n - 1$ sobre $\mathbb{Q}$ es cíclico.
12. Para todo número primo p el grupo de Galois de $x^p - 1$ sobre $\mathbb{Q}$ es cíclico.
13. Para todo entero positivo n y $a \in \mathbb{Q}$, el polinomio $x^n - a$ tiene grupo de Galois abeliano sobre $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/n})$.
14. El grupo S_4 es soluble.
15. El grupo A_6 (permutaciones pares de 6 objetos) es simple.
16. Sea H un subgrupo del grupo de Galois de una extensión finita K/F y sea $L \subset K$ el campo fijo de H. Entonces K/L es una extensión de Galois.
17. Sea H un subgrupo finito del grupo de automorfismo de un campo K y sea $L \subset K$ el campo fijo de H. Entonces K/L es una extensión finita.
18. Cualquier dos extensiones de un campo que tienen el mismo grado (finito) son isomorfas.

19. Cualquier dos extensiones de un campo finito que tienen el mismo grado (finito) son isomorfas.
20. Cualquier dos extensiones de un campo de característica $p > 0$ que tienen el mismo grado (finito) son isomorfas.
21. Todo los campos finitos con el mismo número de elementos son isomorfos.
22. Toda extensión de grado finito de un campo es Galois.
23. Toda extensión de grado finito de un campo de característica $p > 0$ es Galois.
24. Toda extensión de grado finito de un campo finito es Galois.
25. La derivada de un polinomio de grado 7 (con coeficientes en un campo) tiene grado 6.
26. Sea $h(x) \in F[x]$ el máximo común divisor de dos polinomios $f(x), g(x)$ con coeficientes en un campo F (es el polinomio mónico de máximo grado que divide a $f(x)$ y $g(x)$). Entonces para cualquer extensión K de F, el máximo común divisor de $f(x), g(x)$ en $K[x]$ sigue siendo $h(x)$.
27. * Sean $f(x), g(x)$ dos polinomios primos relativos con coeficientes en un campo F de característica 0. Entonces el grupo de Galois de $f(x)g(x)$ es isomorfo al producto cartesiano de los grupos de Galois de $f(x)$ y $g(x)$.
28. Sea $\omega = e^{2\pi/17} \in \mathbb{C}$. El campo $\mathbb{Q}(\omega) \subset \mathbb{C}$ contiene un subcampo de grado 4 sobre $\mathbb{Q}$.
29. En una extensión finita K/F todo elemento de K es algebraico sobre F.
30. Una extensión K/F es finita si todo elemento de K es algebraico sobre F.
31. Sea $F \subset L \subset K$ una "torre"de extensiones de campos de característica 0.
    a) Si K/F es Galois entonces K/L es Galois.
    b) Si K/F es Galois entonces L/F es Galois.
    c) Si K/L y L/F son Galois es Galois entonces K/F es Galois.
32. Para toda extensión K/F de grado 4 existe un campo intermedio $F \subset L \subset K$ tal que L/F es de grado 2.
33. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ es Galois.
34. Si L/F es una extensión finita existe una extensión finita K/L tal que K/F es Galois.
35. Si K/F es una extensión finita el número de campos intermedios L tal que $F \subset L \subset K$ es finito.
36. Para todo primo $p > 2$ el campo $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$ contiene un único subcampo K tal que $[K : \mathbb{Q}] = 2$.
37. Si $f(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes en un campo F, el grado de un campo de descomposición de $f(x)$ sobre F es un divisor de $n!$.
38. Si $f(x)$ es un polinomio irreducible de grado n con coeficientes en un campo F, el grado de un campo de descomposición de $f(x)$ sobre F es un múltiplo de n.
39. Una extensión finita de $\mathbb{Q}$ contiene un número finito de raices de 1.

II. Problemas

1. Problema 2(i) del segundo examen parcial: determina el grupo de Galois del polinomio $x^5 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$ como un subgrupo de S_5 (el grupo de permutaciones de las raices), sus subgrupos y los subcampos correspondientes del subcampo de $\mathbb{C}$ generado por las raices.

   Nota: sea G el grupo buscado. La información que tenemos acerca de G por el examen parcial 2 es que G es un subgrupo no abeliano de S_5 de orden 20, generado por 2 elementos, σ y τ, con las relaciones $\sigma^5 = \tau^4 = 1$, $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$. De aquí uno puede deducir la tabla de multiplicación del grupo y sus subgrupos. Es tedioso pero no conozco una manera mejor de hacerlo (aunque estoy seguro que hay). De todos modos existen programas de computadora que hacen este trabajo tedioso. Encontré tal programa en *http://math.ucsd.edu/˜jwavrik/g32/index.html*. Segun este programa hay 3 grupos no abelianos de orden 20. Examinando la taba de multiplicación de cada uno de estos grupos se determina facilmente que nuestro grupo es el grupo número 53 en la lista de este programa. El programa da la lista completa de los subgrupos de este grupo. Aparte del subgrupo trivial y G mismo hay 12 subgrupos: 5 de orden 2, 5 de orden 4, 1 de orden 5 y 1 de orden 10 (los ultimos 2 son normales, los demas no). Los subcampos correspondientes son entonces de grados 10, 5, 4 y 2. Ahora, ya sabemos que $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ es de grado 5. Los otros 4 campos de grado 5 se obtienen por la acción de σ en $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$. El campo de grado 4 es $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5})$. Falta determinar los campos de grado 10 y 2.
2. Encuentra el grado del campo de descomposición de $x^8 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$.
3. Encuentra un elemento primitivo de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{6})/\mathbb{Q}$.
4. Sea $K \subset \mathbb{C}$ el campo generado por las raices de $x^3 - 2$ en $\mathbb{C}$. Encuentra a todos los subcampos de K, decide cuales son Galois sobre $\mathbb{Q}$ y cuales son conjugados (bajo la acción del grupo de Galois de $K/\mathbb{Q}$).
5. * Encuentra los ángulos α entre 0 y 180 grados que se pueden trisectar con compas y regla.
6. Definición: una extensión K/F es radical si existen $a_1, \ldots, a_n \in K$ tal que $K = F(a_1, \ldots, a_n)$ y tal que para todo $i = 1, \ldots, n$, una potencia de a_i está en $F(a_1, \ldots, a_{i-1})$ (para $i = 1$ se pide que una potencia de a_1 esté en F). Demuestra: si $F \subset L \subset K$ y K es una extensión radical de F entonces K es una extensión radical de L.