

APÉNDICE

OBSERVACIONES SUPLEMENTARIAS PROBLEMAS Y EJERCICIOS

Muchos de los problemas que siguen a continuación están pensados para el lector con cierta formación matemática, y su intención no es tanto la de desarrollar una técnica rutinaria como la de estimular la habilidad inventiva.

Aritmética y Álgebra.

1. ¿Cómo veríamos que 3 no divide a ninguna potencia de 10, según se afirma en la página 70? (véase pág. 54).

2. Demuéstrese que el principio del mínimo entero es una consecuencia del teorema de inducción matemática (véase pág. 26).

3. Haciendo uso del teorema del binomio, aplicado al desarrollo de $(1 + 1)^n$, demuéstrese que $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$.

*4. Considérese un entero, $z = abc \dots$, y fórmese la suma de sus cifras $a + b + c + \dots$. Réstese ésta de z , táchese una de las cifras del resultado y sea w la suma de las restantes cifras. Conociendo solamente w , ¿puede darse una regla para determinar la cifra tachada? (Existe un caso ambiguo cuando $w = 0$.) Al igual que de otras muchas propiedades sencillas de las congruencias, puede hacerse uso de ésta como pasatiempo curioso.

5. Una progresión aritmética de primer orden es una sucesión de números, $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$, tales que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. Una progresión aritmética de segundo orden es una sucesión de números a_1, a_2, a_3, \dots , con la propiedad de que las diferencias $a_{i+1} - a_i$ forman una progresión aritmética de primer orden. Análogamente, una progresión aritmética de orden k es una sucesión tal que dichas diferencias forman una progresión aritmética de orden $k - 1$. Demuéstrese que los cuadrados de los números enteros constituyen una progresión aritmética de segundo orden, y establézcase por inducción que las potencias de exponente k de dichos números forman una progresión aritmética de orden k . Demuéstrese que cualquier sucesión cuyo n -ésimo término, a_n , viene dado por la expresión $c_0 + c_1n + c_2n^2 + \dots + c_kn^k$, en la cual las c_i son constantes, es una progresión aritmética de orden k . Pruébese el teorema recíproco de este último para $k=2, k=3$, y, en general, para cualquier valor de k .

6. Demuéstrase que la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de orden k es a su vez una progresión aritmética de orden $k + 1$.

7. ¿Cuántos divisores tiene el número 10296? (véase pág. 32).

8. Utilizando la identidad algebraica $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$, demuéstrase por inducción que cualquier número entero $r = a_1 a_2 \dots a_n$, donde todas las a_i son sumas de dos cuadrados, es asimismo una suma de dos cuadrados. Compruébese esto con $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 1^2 + 2^2$, $8 = 2^2 + 2^2$, etc., para $r = 160$, $r = 1600$, $r = 1300$ y $r = 625$. Obténganse, si es posible, diferentes representaciones de estos números como sumas de dos cuadrados.

9. Aplíquese el resultado del ejercicio anterior para construir nuevas ternas de números pitagóricos partiendo de una terna dada.

10. Establézcanse reglas de divisibilidad, análogas a las dadas en la página 42, para los sistemas de numeración de bases 7, 11 y 12.

11. Pruébese que para dos números racionales positivos, $r = a/b$ y $s = c/d$, la desigualdad $r > s$ equivale a la $ac - bd > 0$.

12. Demuéstrase que para r y s positivos y $r < s$, se verifica siempre que

$$r < \frac{r+s}{2} < s \quad \text{y} \quad \frac{2}{[(1/r) + (1/s)]^2} < 2rs < (r+s)^2.$$

13. Siendo z un número complejo, pruébese por inducción que $z^n + 1/z^n$ puede expresarse como polinomio de grado n en la variable $w = z + 1/z$ (véase pág. 109).

*14. Utilizando la notación abreviada $\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi = E(\varphi)$, se tiene $[E(\varphi)]^m = E(m\varphi)$. Utilícenese esta fórmula y las dadas en la página 20 en relación con las progresiones geométricas (todas ellas conservan su validez para números complejos), para demostrar que

$$\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} 2\varphi + \operatorname{sen} 3\varphi + \dots + \operatorname{sen} n\varphi = \frac{\cos \frac{\varphi}{2} - \cos (n + \frac{1}{2})\varphi}{2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}};$$

$$\frac{1}{2} + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos n\varphi = \frac{\operatorname{sen} (n + \frac{1}{2})\varphi}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\varphi}$$

15. Determínese la fórmula resultante de sustituir q por $E(\varphi)$ en la fórmula del ejercicio 3 de la página 25.

Geometría analítica.

Un estudio cuidadoso de los ejercicios que siguen, suplementado con dibujos y ejemplos numéricos, ayudará mucho a dominar los ele-

mentos de la geometría analítica. Se suponen conocidos las definiciones y los resultados más sencillos de la trigonometría.

Es con frecuencia útil imaginar una recta o un segmento como orientados de uno de sus puntos a otro. Por recta *orientada* PQ (o segmento *orientado* PQ) entendemos la recta (o segmento) que tiene el sentido de P a Q . En ausencia de una especificación explícita, una recta orientada l se supondrá con un sentido fijo arbitrario, salvo para el eje x , que se considerará siempre orientado de O a un punto de abscisa positiva, y análogamente para el eje orientado y . Las rectas orientadas (o los segmentos) se dirán paralelas únicamente cuando tienen el mismo sentido. El sentido de un segmento de una recta orientada se indicará atribuyendo signo más o menos a la distancia entre los extremos del segmento, según que éste tenga el mismo sentido que la recta o el opuesto. Es conveniente extender la terminología de «segmento PQ » al caso en que P y Q coinciden; a tal «segmento» se le asigna evidentemente longitud cero, pero carece de dirección.

16. Demuéstrese que si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera, las coordenadas del punto medio, $P_0(x_0, y_0)$, del segmento P_1P_2 son: $x_0 = (x_1 + x_2)/2$, $y_0 = (y_1 + y_2)/2$. En general, demuéstrese que si P_1 y P_2 son distintos, las coordenadas del punto P_0 de la recta orientada P_1P_2 para el cual el cociente $P_1P_0 : P_1P_2$ de los segmentos orientados tiene el valor k , son:

$$x_0 = (1 - k)x_1 + kx_2, \quad y_0 = (1 - k)y_1 + ky_2.$$

(Varias rectas paralelas determinan segmentos proporcionales sobre dos transversales.)

Así, los puntos de la recta P_1P_2 tienen coordenadas de la forma $x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$, $y = \lambda_1y_1 + \lambda_2y_2$, con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Los valores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_1 = 0$ caracterizan los puntos P_1 y P_2 , respectivamente. Los valores negativos de λ_2 corresponden a los puntos anteriores a P_1 .

17. Caracterícese la posición de los puntos de una recta en forma análoga a la anterior, mediante los valores de k .

Es igualmente importante utilizar números positivos y negativos para indicar los sentidos de los giros en idéntica forma a como hemos hecho para las distancias. Por definición, el sentido de una rotación que lleve el eje orientado x a coincidir con el eje orientado y después de un giro de 90° se considera positivo. En el sistema usual de coordenadas, con el eje positivo x orientado hacia la derecha y el eje positivo y , hacia arriba, el sentido positivo corresponde al sentido de rotación contrario al de las agujas del reloj. Definimos el ángulo de dos rectas orientadas l_1 y l_2 como igual al ángulo que debe girar l_1

para quedar paralela a l_2 . Naturalmente, este ángulo está determinado salvo un múltiplo entero de 360° (un giro completo). Así, el ángulo del eje orientado x con el eje orientado y es 90° o -270° , etc.

18. Si es α el ángulo que forma el eje orientado x con la recta orientada l ; P_1 y P_2 dos puntos cualesquiera de l , y d la distancia orientada de P_1 a P_2 , demuéstrese que

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \text{sen } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad (x_2 - x_1) \text{ sen } \alpha = (y_2 - y_1) \cos \alpha.$$

Si la recta l no es perpendicular al eje x , la *pendiente* de l se define como

$$m = \text{tg } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El valor de m no depende de la elección de sentido sobre la recta, ya que $\text{tg } \alpha = \text{tg } (\alpha + 180^\circ)$, o lo que es equivalente: $(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

19. Demuéstrese que la pendiente de una recta es nula, positiva o negativa según que una paralela a ella por el origen coincida con el eje x , esté en el primero y tercer cuadrantes, o en el segundo y cuarto, respectivamente.

En una recta orientada l distinguiremos el lado positivo del negativo de la forma siguiente: sea P un punto cualquiera exterior a l y Q el pie de la perpendicular a l por P . Diremos que P se encuentra en el lado positivo o negativo de l , según que el ángulo de l con la recta orientada QP sea 90° o -90° .

Vamos ahora a determinar la ecuación de una recta orientada l . Tracemos por el origen O una recta m perpendicular a l , y orientada de forma que el ángulo que forme con l sea de $+90^\circ$. Al ángulo que forma el eje orientado x con m le llamaremos β ; por tanto, $\alpha = 90^\circ + \beta$, $\text{sen } \alpha = \cos \beta$, $\cos \alpha = -\text{sen } \beta$. Sea R , de coordenadas x_1 y y_1 , el punto de intersección de m y l ; representaremos por d la distancia orientada OR a la recta orientada m .

20. Demuéstrese que d es positivo si y sólo si O es un punto del lado negativo de l .

Tenemos: $x_1 = d \cos \beta$, $y_1 = d \text{ sen } \beta$ (compárese con ejercicio 18). Por tanto, $(x - x_1) \text{ sen } \alpha = (y - y_1) \cos \alpha$; o bien, $(x - d \cos \beta) \cos \beta = -(y - d \text{ sen } \beta) \text{ sen } \beta$, lo que da la ecuación

$$x \cos \beta + y \text{ sen } \beta - d = 0.$$

Esta es la *forma normal* de la ecuación de la recta l . Obsérvese que esta ecuación no depende del sentido positivo asignado a l , pues un cam-

bio de éste haría cambiar el signo de todos los términos del primer miembro, y, en consecuencia, la ecuación quedaría invariable.

Si se multiplica la ecuación normal por un factor arbitrario, resulta la forma general de la ecuación de la recta

$$ax + by + c = 0.$$

Para obtener de nuevo, a partir de esta forma general, la forma normal —tan llena de significado geométrico— debemos multiplicar por un factor que reduzca los dos primeros coeficientes a $\cos \beta$ y $\sin \beta$, la suma de cuyos cuadrados ha de ser 1. Esto se consigue multiplicando por el factor $1/\sqrt{a^2 + b^2}$, que nos da la forma normal

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,$$

de modo que tenemos:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \beta, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \beta, \quad -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d.$$

21. Demuéstrese: a) que los únicos factores que reducen la forma general a la normal son $1/\sqrt{a^2 + b^2}$ y $-1/\sqrt{a^2 + b^2}$; b) que la elección de uno u otro de estos factores determina el sentido positivo asignado a la recta, y c) que cuando se utiliza uno de estos factores, el origen se halla en el lado positivo o negativo de la recta orientada resultante, o bien sobre la propia recta, según que d sea negativo, positivo o nulo.

22. Demuéstrese directamente que la recta de pendiente m que pasa por un punto dado $P_0(x_0, y_0)$ está representada por la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0), \quad \text{o} \quad y = mx + y_0 - mx_0.$$

Demuéstrese que la recta determinada por los dos puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ tiene la ecuación

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1).$$

La abscisa x del punto donde una recta o curva corta al eje de las x se llama *abscisa en el origen* de la línea; análogamente para la *ordenada en el origen*.

23. Si se divide la ecuación general del ejercicio 20 por una constante apropiada, se ve que la ecuación de una recta puede escribirse en la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

donde a y b son la abscisa y la ordenada en el origen. ¿Qué excepciones se presentan?

24. Por un procedimiento análogo, pruébese que la ecuación de una recta no paralela al eje y puede escribirse en la forma

$$y = mx +$$

(Si la recta es paralela al eje y , la ecuación correspondiente es $x=a$.)

25. Sean $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ las ecuaciones de dos rectas l y l' , de pendientes m y m' , respectivamente. Demuéstrese que l y l' son paralelas o perpendiculares según que: a) $m = m'$ o $mm' = -1$; b) $ab' - a'b = 0$ o $aa' + bb' = 0$ [obsérvese que b) subsiste aun cuando la recta no tenga pendiente, esto es, sea paralela al eje y].

26. Demuéstrese que la ecuación de una recta que pasa por un punto dado $P_0(x_0, y_0)$ y es paralela a una recta dada l , $ax + by + c = 0$, tiene la ecuación $ax + by = ax_0 + by_0$. Pruébese que subsiste una fórmula análoga, $bx - ay = bx_0 - ay_0$, para la ecuación de la recta que pasa por P_0 y es perpendicular a l . (Obsérvese que si la ecuación de l se da en la forma normal, así resulta también la nueva ecuación en cada uno de los casos.)

27. Sean $x \cos \beta + y \sin \beta - d = 0$ y $ax + by + c = 0$ las formas normal y general de la ecuación de una recta l . Demuéstrese que la distancia orientada h de l a un punto cualquiera $Q(u, v)$ viene dada por

$$h = u \cos \beta + v \sin \beta - d,$$

o por

$$h = \frac{au + bv + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}};$$

y que h es positivo o negativo según que Q esté del lado positivo o negativo de la recta orientada l (el sentido ha sido determinado por β , o por la elección del signo antepuesto a $\sqrt{a^2 + b^2}$). (Escribáse la forma normal de la ecuación de la recta m que pasa por Q y es paralela a l y hállese la distancia de l a m .)

28. Representemos por $l(x, y) = 0$ la ecuación de la recta $ax + by + c = 0$; análogamente, $l'(x, y) = 0$. Sean λ y λ' constantes tales que $\lambda + \lambda' = 1$. Demuéstrese que si l y l' se cortan en $P_0(x_0, y_0)$, la ecuación de cualquier recta que pase por P_0 es de la forma

$$\lambda l(x, y) + \lambda' l'(x, y) = 0,$$

y reciprocamente; y que cada una de tales rectas queda unívocamente determinada por la elección de un par de valores para λ y λ' (P_0 está sobre l si y sólo si $l(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c = 0$.) ¿Qué rectas quedan representadas cuando l y l' son paralelas? Obsérvese que la condi-

ción $\lambda + \lambda' = 1$ es innecesaria, pero sirve para determinar una sola ecuación para cada recta que pasa por P_0 .

29. Utilícese el resultado del ejercicio anterior para hallar la ecuación de una recta que pase por la intersección P_0 de l y l' y por otro punto, $P_1(x_1, y_1)$, sin determinar las coordenadas de P_0 . (Determinéense λ y λ' por las condiciones $\lambda l(x_1, y_1) + \lambda' l'(x_1, y_1) = 0$, $\lambda + \lambda' = 1$.) Compruébese el resultado determinando las coordenadas de P_0 (véase pág. 85) y demuéstrese que P_0 pertenece a la recta cuya ecuación acaba de escribirse.

30. Demuéstrese que las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas no paralelas l y l' son:

$$\sqrt{a'^2 + b'^2} l(x, y) = \pm \sqrt{a^2 + b^2} l'(x, y)$$

(véase ejercicio 27). ¿Qué representan estas ecuaciones si l y l' son paralelas?

31. Hállese la ecuación de la mediatriz del segmento P_1P_2 , utilizando cada uno de los siguientes métodos: a) determinése primero la ecuación de la recta P_1P_2 , después las coordenadas del punto medio P_0 del segmento P_1P_2 , y, finalmente, la ecuación de la recta que pasa por P_0 y es perpendicular a P_1P_2 ; b) escribese la ecuación que expresa que la distancia de P_1 a un punto cualquiera de la mediatriz $P(x, y)$ es igual a la distancia de P_2 a P . Basta elevar después ambos miembros al cuadrado y simplificar.

32. Hállese la ecuación de la circunferencia determinada por tres puntos no colineales P_1, P_2, P_3 , aplicando cada uno de los siguientes métodos: a) escribáanse primero las ecuaciones de las mediatrices de los segmentos P_1P_2 y P_2P_3 ; a continuación determinéense las coordenadas del centro, hallando la intersección de estas dos rectas, y, finalmente, hállese el radio como distancia entre el centro y P_1 ; b) la ecuación debe ser de la forma $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = k$ (véase página 83). Como cada uno de los puntos dados pertenece a la circunferencia, debe tenerse:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 = k;$$

$$x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 - 2by_2 = k;$$

$$x_3^2 + y_3^2 - 2ax_3 - 2by_3 = k,$$

ya que un punto pertenece a la curva si y sólo si sus coordenadas satisfacen a la ecuación de la misma. Basta ahora resolver este sistema de ecuaciones respecto a a, b y k .

33. Para hallar la ecuación de la elipse de eje mayor $2p$, eje menor $2q$ y focos $F(e, 0)$ y $F(-e, 0)$, siendo $e^2 = p^2 - q^2$, hágase uso

de las distancias r y r' de los focos F y F' a un punto cualquiera de la curva. Por definición de elipse, $r + r' = 2p$, y por medio de la fórmula para la distancia, dada en la página 82, véase que

$$r'^2 - r^2 = (x + e)^2 - (x - e)^2 = 4ex.$$

Como

$$r'^2 - r^2 = (r' + r)(r' - r) = 2p(r' - r),$$

se tiene que $r' - r = 2ex/p$. Resuélvase el sistema formado por esta ecuación y la $r' + r = 2p$ y determinense las importantes fórmulas

$$r = -\frac{e}{p}x + p, \quad r' = \frac{e}{p}x + p.$$

Como (por la fórmula de la distancia) $r^2 = (x - e)^2 + y^2$, igualando esta expresión de r^2 a la que se acaba de obtener, $\left(-\frac{e}{p}x + p\right)^2$, resulta:

$$(x - e)^2 + y^2 = \left(-\frac{e}{p}x + p\right)^2.$$

Basta ahora desarrollar, agrupar términos semejantes, sustituir $p^2 - q^2$ por e^2 y simplificar. Compruébese que el resultado puede expresarse en la forma

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1.$$

Hágase lo mismo para la hipérbola, definida como el lugar de los puntos P para los cuales el valor absoluto de la diferencia $r - r'$ es igual a una cantidad dada $2p$. En este caso, $e^2 = p^2 + q^2$.

34. Se define la parábola como el lugar de los puntos cuya distancia a una recta fija (directriz) es igual a su distancia a un punto dado (foco). Si elegimos la recta $x = -a$ como directriz y el punto $F(a, 0)$ como foco, compruébese que la ecuación de la parábola puede escribirse en la forma $y^2 = 4ax$.

Construcciones geométricas.

35. Demuéstrese la imposibilidad de construir con la regla y el compás los números $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$. Pruébese que la construcción de $\sqrt[3]{a}$ sólo es posible si a es el cubo de un número racional (véanse páginas 146 y siguientes).

36. Hállense los lados de los polígonos regulares de $3 \cdot 2^n$ y $5 \cdot 2^n$ lados y caracterícense las correspondientes sucesiones de extensiones del campo.

37. Demuéstrese la imposibilidad de trisecar con regla y compás los ángulos de 120° y 30° . (En el caso de 30° , la ecuación de que de-

pende la demostración es $4z^3 - 3z = \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$. Introdúzcase como nueva incógnita $u = z \sqrt{3}$ y obténgase una ecuación en z a partir de la cual se deduce la imposibilidad de la construcción de z , en igual forma que en el texto, pág. 151.)

38. Demuéstrese que el eneágono regular no es construible.

39. Demuéstrese que la inversión de un punto $P(x, y)$ en el punto $P'(x', y')$, respecto al círculo de radio r y centro en el origen, está definida por las ecuaciones

$$x' = \frac{xr}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{yr}{x^2 + y^2}$$

Hállense algebraicamente las ecuaciones que definen x e y en función de x' e y' .

*40. Demuéstrese analíticamente, utilizando el resultado anterior, que el conjunto de todas las circunferencias y rectas del plano se transforma en sí mismo por inversión. Compruébense las propiedades *a)* hasta *d)* de la página 155 por separado, y en forma análoga las transformaciones correspondientes a la figura 61.

41. ¿En qué se transforman las dos familias de rectas $x = \text{constante}$ e $y = \text{constante}$ mediante una inversión respecto a una circunferencia de centro en el origen y radio 1? Hállese la respuesta sin geometría analítica y también haciendo uso de ésta (véase pág. 172).

42. Efectúense las construcciones de Apolonio para los casos más sencillos que elegirá el lector. Inténtese la solución analítica siguiendo el método de la página 136.

Geometría proyectiva y geometría no euclídea.

43. Determinénse todos los valores de la razón doble λ de cuatro puntos armónicos al efectuar todas las permutaciones de éstos. (Respuesta: $\lambda = -1, 2, \frac{1}{2}$.)

44. ¿Para qué configuraciones de cuatro puntos coinciden algunos de los seis valores de la razón doble dados en la página 188? (Respuesta: sólo para $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$; existe también un valor imaginario de λ para el cual $\lambda = 1/(1 - \lambda)$, razón doble «equianarmónica».)

45. Demuéstrese que si la razón doble $(ABCD)$ vale 1, coinciden los puntos C y D .

46. Demuéstranse las proposiciones dadas en la página 188 respecto a la razón doble de cuatro planos.

47. Demuéstrese que si P y P' son inversos respecto a una circunferencia y si el diámetro AB es colineal con P y P' , los puntos A, B, P, P' , forman una cuaterna armónica. (Utilícese la expresión [2]

de la pág. 189, tomando como circunferencia el círculo unidad y AB como eje.)

48. Hállense las coordenadas del cuarto punto armónico de tres puntos P_1, P_2, P_3 . ¿Qué ocurre si P_3 pasa a ser el punto medio de P_1P_2 (véase pág. 190).

*49. Hágase uso de las esferas de Dandelin para desarrollar la teoría de las cónicas. Demuéstrese en particular que todas son (salvo la circunferencia) lugares geométricos de puntos cuyas distancias a un punto fijo F y a una recta dada l están en una razón constante k . Para $k > 1$ se tiene la hipérbola; para $k = 1$, la parábola, y para $k < 1$, la elipse. La recta l se obtiene como intersección del plano de la cónica con el plano de la circunferencia de contacto de la esfera de Dandelin y el cono. (Ya que la circunferencia no queda incluida en esta caracterización si no es como caso límite, no resulta completamente adecuado elegir esta propiedad para definir las cónicas, si bien se hace así algunas veces.)

50. Estúdiense la proposición siguiente: «una cónica considerada a la vez como conjunto de puntos y como conjunto de rectas es una figura dual de sí misma» (véase pág. 221).

*51. Inténtese demostrar el teorema de Desargues en el plano por medio de un paso al límite efectuado en la configuración tridimensional de la figura 73 (véase pág. 184).

*52. ¿Cuántas rectas pueden trazarse que se apoyen en cuatro rectas dadas del espacio? ¿Cómo pueden ser caracterizadas? (Trácese una hiperboloide por tres de las rectas dadas; véase pág. 224.)

*53. Si el círculo de Poincaré es el círculo unidad del plano complejo, dos puntos z_1 y z_2 y los valores w_1 y w_2 de los dos puntos de intersección de la «recta» que pasa por estos dos puntos con la circunferencia unidad, definen una razón doble $\frac{z_1 - w_1}{z_1 - w_2} : \frac{z_2 - w_1}{z_2 - w_2}$ que, de acuerdo con lo dicho en el ejercicio 8 de la página 107, es real. Por definición, su logaritmo es la distancia hiperbólica entre z_1 y z_2 .

*54. Transfórmese mediante una inversión el círculo de Poincaré en el semiplano superior. Desarróllese el modelo de Poincaré y sus propiedades para este semiplano, directamente y mediante esta inversión (véase pág. 236).

Topología.

55. Verifíquese la fórmula de Euler para los cinco poliedros regulares, así como para otros poliedros, llevando a cabo las correspondientes reducciones de la red de polígonos.

56. En la demostración de la fórmula de Euler (pág. 251) se trataba de reducir una red plana de triángulos, por sucesiva aplicación de dos operaciones fundamentales, en otra red formada por un solo triángulo, para la cual $V - A + C = 3 - 3 + 1 = 1$. ¿Cómo podremos asegurarnos de que el resultado final no será una *pareja* de triángulos sin ningún vértice común, de forma que $V - A + C = 6 - 6 + 2 = 2$? (Se supone que la red primitiva es *conexa*; esto es, que se puede pasar de un vértice a otro a lo largo de los lados de la red. Demuéstrase que esta propiedad se conserva en las dos operaciones fundamentales.)

57. Hemos admitido sólo dos operaciones fundamentales para la reducción de la red antedicha; ¿no puede suceder que en algún paso un triángulo tenga sólo un vértice común con otros triángulos de la red? (Constrúyase un ejemplo.) Esto requeriría una tercera operación: supresión de dos vértices, tres aristas y una cara; ¿afectaría esto a la demostración?

58. ¿Se puede arrollar una tira ancha de caucho tres veces alrededor de un palo de escoba de forma que quede plana (esto es, no retorcida) sobre el palo? (Naturalmente, la tira de caucho debe cruzarse consigo misma en algún punto.)

59. Demuéstrase que un disco circular del cual se ha separado un punto en el centro, admite una transformación continua sin punto fijo, en sí mismo.

*60. La transformación que traslada cada punto de un disco una unidad en una dirección determinada, carece evidentemente de puntos fijos. Por supuesto, no es ésta una transformación del disco en *sí mismo*, ya que algunos puntos quedan exteriores al disco. ¿Por qué no es válido el razonamiento de la página 267 basado en la transformación $P \rightarrow P^*$?

61. Supóngase un neumático de caucho cuyo interior está pintado de blanco y su exterior de negro. ¿Es posible, si se efectúa un pequeño orificio, se deforma el neumático y a continuación se cierra el agujero, que la parte interior quede fuera, de modo que el interior sea negro y el exterior blanco?

*62. Demuéstrase que no existe «problema de los cuatro colores» en tres dimensiones, probando que para cualquier número dado n se pueden colocar n cuerpos en el espacio de manera que cada uno toque a los restantes.

*63. Haciendo uso de una superficie tórica (interior de un neumático, arganeo) o de una región plana con identificación de contorno (figura 143), constrúyase un mapa formado por siete regiones, de manera que cada una tenga frontera común con las restantes (véase pág. 260).

64. El tetraedro tetradimensional de la figura 118 consta de cinco puntos a, b, c, d y e , cada uno de los cuales está unido a los otros cuatro. Incluso si los segmentos que los unen pueden curvarse, no es posible dibujar la figura en el plano de forma que no se crucen dos cualesquiera de las conexiones. Otra configuración con diez conexiones que tampoco puede ser trazada en el plano sin cruces es la formada por seis puntos a, b, c, a', b', c' , tales que cada uno de los puntos a, b, c , esté unido a cada uno de los a', b', c' . Verifíquense experimentalmente estos hechos e inténtese una demostración basada en el teorema de la curva de Jordan. (Ha sido demostrado que cualquier configuración de puntos y rectas que no pueda representarse en el plano sin cruces debe contener como parte una de estas dos configuraciones.)

65. Una configuración está formada por las seis aristas de un tetraedro tridimensional a las que se ha añadido el segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas. (Dos aristas de un tetraedro son opuestas si carecen de vértice común.) Pruébese que esta configuración es equivalente a una de las descritas en el ejercicio precedente.

*66. Sean p, q, r , las tres puntas del símbolo E . El símbolo se desplaza una cierta distancia, lo que da lugar a otra E de puntas p', q', r' . ¿Puede unirse p con p' , q con q' y r con r' por tres curvas que no se crucen entre sí ni tampoco a los dos símbolos?

Si recorremos el contorno de un cuadrado cambiamos nuestra dirección cuatro veces, cada una 90° , lo que hace un total de $\Delta = 360^\circ$. Si recorremos el contorno de un triángulo, es sabido por geometría elemental que $\Delta = 360^\circ$.

67. Demuéstrese que si C es un polígono simple cerrado, $\Delta = 360^\circ$. (Descompóngase el interior de C en triángulos y sepárense segmentos del contorno como en la pág. 251. Sean los sucesivos contornos $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$. Entonces, $B_1 = C$ y B_n es un triángulo. Pruébese que si Δ_i corresponde a B_i , se verifica que $\Delta_i = \Delta_{i-1}$.)

*68. Sea C una curva simple cerrada con vector tangente que gira con continuidad. Si Δ representa la variación total del ángulo de la tangente al recorrer una vez la curva, pruébese que $\Delta = 360^\circ$. (Sean $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, p_0$, puntos que descomponen C en pequeños arcos aproximadamente rectilíneos. Sea C_i la curva que corresponde a los segmentos $p_0p_1, p_1p_2, \dots, p_{i-1}p_i$ y los arcos originales $p_i p_{i+1}, \dots, p_n p_0$. Entonces, $C_0 = C$ y C_n se compone de segmentos rectilíneos. Demuéstrese que $\Delta_i = \Delta_{i+1}$, y utilícese el resultado del ejercicio precedente.) ¿Es aplicable esto a la hipocicloide de la figura 55?

69. Demuéstrese que si en el diagrama de la botella de Klein de la página 275 las cuatro flechas se trazan en el sentido de las agujas

del reloj, la superficie así formada es equivalente a una esfera con un disco reemplazado por una cofia cruzada. (Esta superficie es topológicamente equivalente al plano de la geometría proyectiva.)

70. La botella de Klein de la figura 142 puede cortarse en dos mitades simétricas por medio de un plano. Demuéstrese que el resultado son dos cintas de Moebius.

*71. En la cinta de Moebius de la figura 139 se identifican los dos extremos de cada segmento transversal; demuéstrese que el resultado equivale topológicamente a una botella de Klein.

Todas las posibles parejas de puntos de un segmento rectilíneo (cuyos extremos coinciden o no) forman un cuadrado en el sentido siguiente: Si se designan los puntos del segmento por sus distancias x, y a un extremo A , las parejas ordenadas de números (x, y) pueden considerarse como las coordenadas cartesianas de un punto del cuadrado.

Todas las posibles parejas de puntos sin tener en cuenta el orden [es decir, $(x, y) = (y, x)$] forman una superficie S que equivale topológicamente a un cuadrado. Para verlo, elijase aquella representación que tiene el primer punto más próximo al extremo A del segmento si $x \neq y$. Por tanto, S es el conjunto de todos los pares (x, y) en los cuales x es menor que y o $x = y$. Utilizando coordenadas cartesianas, esto da el triángulo plano de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

*72. ¿Qué superficie se forma considerando el conjunto de todos los pares ordenados de puntos de los cuales el primero pertenece a una recta y el segundo a una circunferencia? (Respuesta: un cilindro.)

73. ¿Qué superficie se forma al considerar el conjunto de todos los pares ordenados de puntos de un círculo? (Respuesta: un toro.)

*74. ¿Qué superficie resulta al considerar el conjunto de todos los pares *no ordenados* de puntos de un círculo? (Respuesta: una cinta de Moebius.)

75. He aquí las reglas de un juego para realizarlo con monedas en una gran mesa circular: A y B , por turno, colocan monedas sobre la mesa, las cuales no es necesario que se toquen y pueden colocarse en cualquier punto de la mesa en tanto que no sobresalgan del borde o cubran parte de una moneda ya colocada. Una vez colocada una moneda, no puede moverse. Con el tiempo, la mesa quedará cubierta de monedas de forma que no habrá lugar para otra, ganando aquel jugador que acierte a colocar la última moneda. Si comienza A , demuéstrese que cualquiera que sea la forma de jugar B , A puede estar seguro de ganar con tal que juegue correctamente.

76. Si en el juego del ejercicio anterior la mesa tiene la forma indicada en la figura 125 b, demuéstrese que B puede ganar siempre.

Funciones, límites y continuidad.

77. Hállese el desarrollo en fracción continua del cociente $OB : AB$ de la página 134.

78. Pruébese que la sucesión $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ es monótona creciente y acotada por $B = 2$; en consecuencia, tiene límite. Pruébese que este límite es el número 2 (véanse págs. 135 y 337).

*79. Inténtese demostrar por métodos análogos a los utilizados en las páginas 329 y siguientes que, dada una curva cerrada sin puntos singulares (óvalo), se puede siempre trazar un cuadrado cuyos lados sean tangentes a la misma.

La función $u = f(x)$ se llama *convexa* si el punto medio del segmento que une dos puntos cualesquiera de la gráfica de la función queda por debajo de la curva; p. ej., $u = e^x$ (Fig. 278) es convexa, pero no lo es $u = \log x$ (Fig. 277).

80. Demuéstrese que la función $u = f(x)$ es convexa si y sólo si

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

El signo de igualdad únicamente se verifica para $x_1 = x_2$.

*81. Demuéstrese que para las funciones convexas se verifica la desigualdad más general

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

en la cual λ_1, λ_2 , son dos constantes tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$. Esto equivale a decir que ningún punto del segmento que une dos puntos de la gráfica queda por debajo de la curva.

82. Haciendo uso de la condición del ejercicio anterior, demuéstrese que las funciones $u = \sqrt{1 + x^2}$ y $u = 1/x$ (para $x > 0$) son convexas; esto es, que

$$\frac{\sqrt{1 + x_1^2} + \sqrt{1 + x_2^2}}{2} > \sqrt{1 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) > \frac{2}{x_1 + x_2} \text{ para } x_1 \text{ y } x_2 \text{ positivos.}$$

83. Hágase lo mismo con $u = x^2$, $u = x^n$ para $x > 0$, $u = \sin x$ para $\pi \leq x \leq 2\pi$, $u = \operatorname{tg} x$ para $0 \leq x \leq \pi/2$, $u = -\sqrt{1 - x^2}$ para $|x| \leq 1$.

Máximos y mínimos.

84. Hállese el camino más corto entre P y Q como en la figura 178, en el supuesto de que la trayectoria encuentre a las dos rectas dadas n veces alternativamente (véase pág. 344).

85. Hállese el camino más corto entre dos puntos P y Q interiores a un triángulo acutángulo si la trayectoria debe encontrar a los lados del triángulo en un orden dado (véase pág. 345).

86. Trácense las curvas de nivel y compruébese la existencia de dos puntos de ensilladura, por lo menos, en una superficie sobre un dominio triplemente conexo cuya frontera se halla al mismo nivel (véase pág. 355). Se excluye el caso en que el plano tangente a la superficie es horizontal a lo largo de una curva cerrada.

87. Partiendo de dos números racionales positivos arbitrarios a, b , fórmense paso a paso los pares de números $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Demuéstrese que definen un encaje de intervalos. (El punto límite cuando $n \rightarrow \infty$, que recibe el nombre de media aritmético-geométrica de a_0 y b_0 , desempeñó un papel importante en las primeras investigaciones de Gauss.)

88. Hállese la longitud de toda la curva de la figura 219, y compárese con la longitud total de las dos diagonales.

*89. Hállense las condiciones que determinan si cuatro puntos A_1, A_2, A_3, A_4 , se encuentran en el caso de la figura 216 o de la 218.

*90. Determinense sistemas de cinco puntos para los cuales existan diferentes redes de caminos que satisfagan las condiciones angulares. Sólo algunas de ellas serán mínimos relativos (véase pág. 370).

91. Establézcase la desigualdad de Schwarz

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 < (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2),$$

válida para cualquier conjunto de pares de números a_i, b_i ; demuéstrese que el signo de igualdad solamente se verifica si los a_i son proporcionales a los b_i . (Generalícese la fórmula algebraica del ejercicio 8 anterior.)

*92. Con n números positivos x_1, \dots, x_n , formamos las expresiones s_k definidas por

$$s_k = (x_1 x_2 \cdots x_k + \cdots) / C_k^n,$$

donde el símbolo « $+$...» significa que deben sumarse todos los pro-

ductos de k de estos factores, elegidos de todas las maneras posibles, cuyo número es C_k^n . Demuéstrese que

$$\sqrt[k+1]{s_{k+1}} \leq \sqrt[k]{s_k},$$

donde el signo de igualdad solamente se verifica si todas las x_i son iguales.

93. Para $n = 3$ estas desigualdades expresan que para tres números positivos a, b, c ,

$$\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{\frac{ab + ac + bc}{3}} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

¿Qué propiedades extremales del cubo están implícitas en estas desigualdades?

*94. Determinése un arco de curva de longitud mínima que una dos puntos A, B , e incluya, con el segmento AB , un área dada. (Respuesta: el arco es circular.)

95. Dados dos segmentos AB y $A'B'$, hállese un arco que una A con B , y otro que una A' con B' , tales que ambos arcos incluyan, con los dos segmentos, un área dada, y al mismo tiempo tengan longitud total mínima. (Respuesta: los dos arcos son circulares y del mismo radio.)

*96. La misma cuestión cuando el número de segmentos dados es cualquiera, $AB, A'B',$ etc.

*97. Sobre dos rectas que se cortan en O , determinése dos puntos A y B , respectivamente, y únanse mediante un arco de longitud mínima y tal que el área comprendida por éste y las rectas sea dada. (Respuesta: el arco es circular y perpendicular a ambas rectas.)

*98. El mismo problema, pero incluyendo ahora el perímetro total del dominio; es decir, el arco, más OA , más OB , ha de ser mínimo. (Respuesta: la solución es un arco de circunferencia con la concavidad hacia afuera y tangente a ambas rectas.)

*99. La misma cuestión para varios sectores angulares.

*100. Demuéstrese que las superficies casi planas de la figura 240 no son planas salvo para la superficie estabilizadora del centro. Observación: hallar o caracterizar analíticamente estas superficies es un problema sin resolver. Lo mismo puede decirse respecto a las superficies de la figura 251. En la figura 258 se tienen en realidad doce planos de simetría que se cortan bajo ángulos de 120° en las diagonales.

Háganse algunos experimentos adicionales con películas jabonosas. Efectúense los experimentos indicados en las figuras 256 y 257, con más de tres barras. Estúdiense los casos límites al tender a cero el

volumen de aire incluido. Háganse experimentos con planos no paralelos u otras superficies distintas. Hágase que la burbuja cúbica de la figura 258 llene todo el cubo y resalte sobre las aristas, sacando de nuevo el aire e invirtiendo el proceso.

*101. Determinense dos triángulos equiláteros de perímetro total dado y área mínima. (Los triángulos deben ser congruentes. Hágase uso del cálculo.)

*102. Hállense dos triángulos de perímetro total dado y área máxima. (Respuesta: un triángulo degenera en un punto; el otro es equilátero.)

*103. Hállense dos triángulos de área total dada y perímetro mínimo.

*104. Hállense dos triángulos equiláteros de área total dada y perímetro máximo.

Cálculo.

105. Derívense las funciones $\sqrt{1+x}$, $\sqrt{1+x^2}$, $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ por aplicación directa de la definición de derivada, formando y operando con el cociente de diferencias hasta obtener el límite por sustitución de $x_1 = x$ (véase pág. 431).

106. Demuéstrese que la función $y = e^{-1/x^2}$, con $y = 0$ para $x = 0$, tiene nulas todas sus derivadas en $x = 0$.

107. Demuéstrese que la función del ejercicio anterior no puede desarrollarse en serie de Taylor (véase pág. 487).

108. Determinense los puntos de inflexión [$f''(x) = 0$] de las curvas $y = e^{-x^2}$ e $y = x e^{-x^2}$.

109. Demuéstrese que si $f(x)$ es un polinomio cuyos n ceros x_1, \dots, x_n , son distintos, se tiene:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}$$

*110. Utilizando la definición de integral como límite de una suma, demuéstrese que para $n \rightarrow \infty$ se tiene:

$$n \left(\frac{1}{1^2 + n^2} + \frac{1}{2^2 + n^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right) \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

*111. Demuéstrese en forma análoga que

$$\frac{b}{n} \left(\operatorname{sen} \frac{b}{n} + \operatorname{sen} \frac{2b}{n} + \dots + \operatorname{sen} \frac{nb}{n} \right) \rightarrow \cos b - 1.$$

112. Dibujando la figura 276 a gran escala sobre papel milimetrado y contando los cuadraditos del área rayada, determínese un valor aproximado de π .

113. Hágase uso de la fórmula [7], página 451, para el cálculo numérico de π con error menor que $1/100$.

114. Demuéstrese que $e^{\pi i} = -1$ (véase pág. 488).

115. Una curva de forma dada se dilata en la relación $1 : x$. $L(x)$ y $A(x)$ representan la longitud y el área de la curva dilatada. Demuéstrese que $L(x)/A(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, y, en general, $L(x)/A(x)^k \rightarrow 0$ para x tendiendo a infinito, si $k > 1/2$. Compruébese para el círculo, el cuadrado y la *elipse. (El área tiene orden superior de magnitud que la circunferencia. Véase pág. 482.)

116. Con frecuencia la función exponencial aparece en combinaciones para las que se emplea la notación siguiente:

$$u = \operatorname{sh} x = 1/2(e^x - e^{-x}), \quad v = \operatorname{ch} x = 1/2(e^x + e^{-x})$$

$$w = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

y que se llaman *seno hiperbólico*, *coseno hiperbólico* y *tangente hiperbólica*, respectivamente. Estas funciones gozan de muchas propiedades análogas a las de las funciones trigonométricas y se hallan relacionadas con la hipérbola $u^2 - v^2 = 1$ en forma análoga a como las funciones $u = \cos x$ y $v = \sin x$ están relacionadas con la circunferencia $u^2 + v^2 = 1$. El lector establecerá las siguientes propiedades, comparándolas con las correspondientes de las funciones trigonométricas:

$$D \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x, \quad D \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x, \quad D \operatorname{th} x = 1/\operatorname{ch}^2 x,$$

$$\operatorname{sh}(x + x') = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x' + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x',$$

$$\operatorname{ch}(x + x') = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x' + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x'.$$

Las funciones inversas son: $x = \arg \operatorname{sh} u = \log(u + \sqrt{u^2 + 1})$; $x = \arg \operatorname{ch} v = \log(v + \sqrt{v^2 - 1})$ ($v \geq 1$).

Sus derivadas son:

$$D \arg \operatorname{sh} u = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}; \quad D \arg \operatorname{ch} v = \frac{1}{\sqrt{v^2 - 1}}$$

$$D \arg \operatorname{th} w = \frac{1}{1 - w^2}, \quad (|w| > 1).$$

117. Hágase uso de la fórmula de Euler para comprobar la analogía de las funciones hiperbólicas y trigonométricas.

*118. Hállense fórmulas sencillas de sumación para

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \cdots + \operatorname{sh} nx$$

y

$$\frac{1}{2} + \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} 2x + \cdots + \operatorname{ch} nx$$

análogas a las dadas en el ejercicio 14 para las funciones trigonométricas.

Técnica de la integración.

El teorema de la página 449 reduce el problema de integrar una función $f(x)$, entre los límites a y b , al de hallar una función primitiva $G(x)$ de $f(x)$; es decir, tal que $G'(x) = f(x)$. La integral es entonces la diferencia $G(b) - G(a)$. Es habitual utilizar para estas funciones primitivas, determinadas por $f(x)$ (salvo una constante aditiva arbitraria), el nombre de «integral indefinida» y la sugerente notación

$$G(x) = \int f(x) dx.$$

(Esta notación puede resultar confusa para el principiante; véase la observación de la pág. 448.)

Toda fórmula de derivación contiene la solución de un problema de integración indefinida sin más que interpretarla al revés como fórmula de integración. Podemos extender este procedimiento un tanto empírico mediante dos importantes reglas que no son sino las equivalentes a las reglas de derivación de una función compuesta y de un producto de funciones. En su forma integral, dichas reglas se llaman de *integración por sustitución* y de *integración por partes*.

A) La primera regla resulta de la fórmula de derivación de una función compuesta

$$H(u) = G(x),$$

en la que

$$x = \psi(u) \quad \text{y} \quad u = \varphi(x)$$

se suponen funciones inversas, unívocamente determinadas en el intervalo que se considera. Se tiene entonces

$$H'(u) = G'(x)\psi'(u).$$

Si

$$G'(x) = f(x),$$

podemos escribir

$$G(x) = \int f(x) dx$$

y también

$$G'(x)\psi'(u) = f(x)\psi'(u),$$

lo cual, como consecuencia de la fórmula anterior para $H'(u)$, equivale a

$$H(u) = \int f(\psi(u))\psi'(u) du.$$

Por tanto, ya que $H(u) = G(x)$,

$$\int f(x) dx = \int f(\psi(u))\psi'(u) du. \quad [I]$$

Escrita con la notación de Leibniz (véase pág. 443), esta regla adquiere esta otra forma:

$$\int f(x) dx = \int f(x) \frac{dx}{du} du,$$

que significa que el símbolo dx debe sustituirse por el símbolo $\frac{dx}{du} du$, exactamente como si dx y du fueran números y $\frac{dx}{du}$ una fracción.

La utilidad de la fórmula [I] queda aclarada con unos cuantos ejemplos:

a) $J = \int \frac{1}{u \log u} du$. Comenzamos aquí con el segundo miembro de [1], sustituyendo $x = \log u = \psi(u)$. Tenemos así $\psi'(u) = 1/u$, $f(x) = 1/x$; por tanto,

$$J = \int \frac{dx}{x} = \log x,$$

o

$$\int \frac{du}{u \log u} = \log \log u.$$

Podemos comprobar este resultado derivando ambos miembros, lo que nos da $\frac{1}{u \log u} = \frac{d}{du} (\log \log u)$, que, como fácilmente se comprueba, es cierto.

b) $J = \int \cot u du = \int \frac{\cos u}{\sin u} du$. Haciendo $x = \sin u = \psi(u)$ obtenemos:

$$\psi'(u) = \cos u, \quad f(x) = x;$$

por tanto,

$$J = \int \frac{dx}{x} = \log x$$

o

$$\int \cot u \, du = \log \operatorname{sen} u.$$

Este resultado puede también comprobarse por derivación.

c) En general, si tenemos una integral de la forma

$$J = \int \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} \, du,$$

hacemos $x = \psi(u)$, $f(x) = x$, y se obtiene:

$$J = \int \frac{dx}{x} = \log x = \log \psi(u).$$

d) $J = \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$. Hacemos $\operatorname{sen} x = u$, $\cos x = \frac{du}{dx}$, y se tiene:

$$J = \int u \frac{du}{dx} \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x.$$

e) $J = \int \frac{\log u}{u} \, du$. Hacemos $\log u = x$, $\frac{1}{u} = \frac{dx}{du}$, y obtenemos:

$$J = \int x \frac{dx}{du} \, du = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} (\log u)^2.$$

En los ejemplos que siguen se utiliza [I] comenzando con el primer miembro.

f) $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Si se hace $\sqrt{x} = u$, se tiene: $x = u^2$ y $\frac{dx}{du} = 2u$; por tanto,

$$J = \int \frac{1}{u} \cdot 2u \, du = 2u = 2\sqrt{x}.$$

g) Mediante la sustitución $x = au$, siendo a constante, obtenemos:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{du} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1 + u^2} \, du = \int \frac{1}{a} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$$

h) $J = \int \sqrt{1-x^2} dx$. Hagamos $x = \cos u$, $\frac{dx}{du} = -\operatorname{sen} u$, con lo que

$$J = - \int \operatorname{sen}^2 u du = - \int \frac{1 - \cos 2u}{2} du = -\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}$$

Si utilizamos la fórmula $\operatorname{sen} 2u = 2 \operatorname{sen} u \cos u = 2 \cos u \sqrt{1 - \cos^2 u}$, obtenemos:

$$J = -\frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}.$$

Determinense las integrales indefinidas siguientes, comprobando los resultados por derivación:

$$119) \int \frac{u du}{u^2 - u + 1}$$

$$124) \int \frac{dx}{x^2 + 2ax + b}$$

$$120) \int ue^{u^3} du.$$

$$125) \int t^2 \sqrt{1+t^3} dt.$$

$$121) \int \frac{du}{u(\log u)^n}$$

$$126) \int \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

$$122) \int \frac{8x}{3+4x} dx.$$

$$127) \int \frac{t^4}{1-t} dt.$$

$$123) \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

$$128) \int \cos^n t \cdot \operatorname{sen} t \cdot dt.$$

129) Demuéstrese que

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arg} \operatorname{th} \frac{x}{a}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arg} \operatorname{sh} \frac{x}{a}$$

[Compárese con los ejemplos *g*) y *h*].

B) La regla (pág. 437) para derivar un producto,

$$[p(x) \cdot q(x)]' = p(x) \cdot q'(x) + p'(x) \cdot q(x),$$

puede escribirse como fórmula integral

$$p(x) \cdot q(x) = \int p(x) \cdot q'(x) dx + \int p'(x) \cdot q(x) dx$$

o

$$\int p(x) \cdot q'(x) dx = p(x)q(x) - \int p'(x) \cdot q(x) dx. \quad \text{[II]}$$

Escrita en esta forma recibe el nombre de regla de *integración por partes*. Esta fórmula es muy útil cuando la función que ha de inte-

grarse puede escribirse en la forma $p(x) q'(x)$, donde se conoce la función primitiva $q(x)$ de $q'(x)$. En tal caso, la fórmula [II] reduce el problema de hallar la integral indefinida de $p(x) q'(x)$ al de la integración de la función $p'(x) q(x)$, que es con frecuencia más fácil.

Ejemplos:

a) $J = \int \log x \, dx$. Hagamos $p(x) = \log x$, $q'(x) = 1$; de forma que $q(x) = x$. Aplicando [II] se obtiene:

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int \frac{x}{x} \, dx = x \log x - x.$$

b) $J = \int x \log x \, dx$. Hagamos $p(x) = \log x$, $q'(x) = x$, con lo que resulta:

$$J = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2x} \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$$

c) $J = \int x \sen x \, dx$. En este caso hacemos $p(x) = x$, $q(x) = -\cos x$, y obtenemos:

$$\int x \sen x \, dx = -x \cos x + \sen x.$$

Obtégase las siguientes integrales haciendo uso de la fórmula de integración por partes:

130) $\int x e^x \, dx.$

132) $\int x^a \log x \, dx \quad (a \neq -1).$

131) $\int x^2 \cos x \, dx.$

133) $\int x^2 e^x \, dx.$

(Aplíquese dos veces [II]) (Utilícese el ejercicio 130)

La integración por partes de la integral $\int \sen^m x \, dx$ conduce a una expresión notable para π como producto infinito. Para deducirla, escribamos la función $\sen^m x$ en la forma $\sen^{m-1} x \sen x$ e integremos por partes entre los límites 0 y $\pi/2$, con lo cual obtenemos la fórmula

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sen^m x \, dx &= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sen^{m-2} x \cos^2 x \, dx = \\ &= - (m-1) \int_0^{\pi/2} \sen^m x \, dx + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sen^{m-2} x \, dx, \end{aligned}$$

0

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \, dx,$$

ya que el primer término del segundo miembro de [II], pq , es igual a 0 para los valores 0 y $\pi/2$. Por aplicación reiterada de la última fórmula, obtenemos el siguiente valor de $I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$ (las fórmulas difieren según que m sea par o impar):

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3}.$$

Puesto que $0 < \sin x < 1$ para $0 < x < \pi/2$, se obtiene $\sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x$, de forma que

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1} \quad (\text{véase pág. 424})$$

0

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1.$$

Sustituyendo los valores calculados antes para I_{2n-1} , etc., de las últimas desigualdades obtenemos:

$$\frac{2n+1}{2n} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots (2n)(2n)} \cdot \frac{\pi}{2} > 1.$$

Si pasamos ahora al límite para $n \rightarrow \infty$, vemos que el término del centro tiende a 1, de donde obtenemos la representación de $\pi/2$ mediante el producto de Wallis:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots 2n \cdot 2n \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)(2n-1) \cdot (2n+1) \cdots} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2 (2n+1)} \quad \text{para } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

IX. AVANCES RECIENTES

§1. UNA FÓRMULA PARA LOS PRIMOS

[véase página 49]

SE CONOCEN ahora muchos polinomios diferentes que producen números primos, aunque poco contribuyen a nuestro conocimiento sobre tales números; en lugar de ello, se demuestra que los polinomios pueden tener propiedades muy extrañas.

En su celebrada ponencia en el Congreso Internacional de Matemáticos, de 1900, David Hilbert planteó 23 problemas cuya solución sentía que sería de la mayor importancia para el avance de las matemáticas. El décimo problema de Hilbert se plantea investigar si existe un método general (lo que ahora llamaríamos *algoritmo*) para examinar si una ecuación diofantina tiene solución. En 1970, siguiendo el trabajo anterior de Martin Davis, Hilary Putnam y Julia Robinson, el matemático ruso Yuri Matyasevich demostró que no existe tal “algoritmo de decisión”. Como su método utiliza precisamente polinomios como un “lenguaje de programación” un tanto aparatoso con el cual se simulan algoritmos para computadora, los polinomios producidos son realmente enormes. James Jones descubrió un sistema explícito de ecuaciones polinomiales para el que no existe ningún algoritmo de decisión: consta de 18 ecuaciones en 33 variables con grado máximo 5^{60} .

Un resultado secundario intrigante de la demostración de Matyasevich es que existe un polinomio $p(x_1, \dots, x_n)$ igual de complicado, en 23 variables, cuyos valores *positivos* para valores enteros de las variables son precisamente los primos. En 1976, J. P. Jones, D. Sato, H. Wada y D. Wiens publicaron un polinomio relativamente simple en 26 variables con la misma propiedad. Denotemos a las variables con a, b, c, \dots, x, y, z (es una coincidencia, pero muy útil tipográficamente, que el alfabeto en inglés tenga 26 letras). Dicho polinomio es:

$$\begin{aligned} & (k+2)\{1 - [wz + h + j - q]^2 - [(gk + 2g + k + 1)(h + j) + h - z]^2 \\ & \quad - [2n + p + q + z - e]^2 - [16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2 + 1 - f^2]^2 \\ & - [e^3(e+2)(a+1)^2 + 1 - o^2]^2 - [(a^2 - 1)y^2 + 1 - x^2]^2 \\ & \quad - [16r^2y^4(a^2 - 1) + 1 - u^2]^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - [((a + u^2(u^2 - a))^2 - 1)(n + 4dy^2) + 1 - (x + cu)^2]^2 - [n + l + v - y]^2 - \\
 & \quad - [(a^2 - 1)l^2 + 1 - m^2]^2 - [ai + k + 1 - l - i]^2 \\
 & - [p + l(a - n - 1) + b(2an + 2a - n^2 - 2n - 2) - m]^2 \\
 & \quad - [q + y(a - p - 1) + s(2ap + 2a - p^2 - 2p - 2) - x]^2 \\
 & \quad - [z + pl(a - p) + t(2ap - p^2 - 1) - pm]^2\}.
 \end{aligned}$$

Los valores *positivos* de esta expresión para valores enteros de a, \dots, z son precisamente los primos.

Aparentemente hay una paradoja: es claro que la expresión puede descomponerse en factores, de hecho es de la forma $(k + 2)\{1 - M\}$. Sin embargo, M es una suma de cuadrados, de manera que la expresión es positiva si y sólo si $M = 0$, y su valor es entonces $k + 2$. Así que el polinomio M tiene que construirse de manera que

$$M(k, \text{ otras variables}) = 0 \quad \text{si y sólo si } k + 2 \text{ es primo,}$$

lo que puede lograrse usando los métodos de Matyasevich.

Este resultado se vuelve ligeramente *menos* intrigante cuando se hace claro que en este contexto nada hay de especial acerca de los primos: pueden ser reemplazados por cualquier sucesión de números “recursivamente enumerable” —lo que significa esencialmente una sucesión infinita determinada por un sistema finito de condiciones computables— construyendo un polinomio apropiado. El avance del descubrimiento radica en que el concepto de “computabilidad” puede expresarse en el lenguaje de los polinomios, no en que la teoría de los primos pueda simplificarse introduciendo una fórmula algebraica.

§2. LA CONJETURA DE GOLDBACH Y LOS PRIMOS GEMELOS
[véase página 54]

La conjetura de Goldbach de que todo número par mayor que 2 es una suma de dos primos, y la cercanamente relacionada “conjetura de los primos gemelos” de que existe una infinidad de primos p para los cuales $p + 2$ también es primo, permanecen abiertas. Sin embargo, ahora se sabe bastante más acerca de ambas cuestiones.

Uno de los métodos más poderosos para abordar algunos problemas en la teoría de los números es el análisis complejo, idea que se remonta a Euler y que fue explotada en particular por Riemann en su estudio de la función zeta $\zeta(s)$

(véase página 525). A partir de 1920, Godfrey H. Hardy y John E. Littlewood investigaron la aplicación de la teoría analítica de los números, como se llegó a llamar, a cuestiones relacionadas con la representación de números como sumas de números de tipos especiales. En 1937, I. M. Vinográdov utilizó esos métodos para demostrar que todo número impar suficientemente grande es una suma de tres primos, lo cual mejoró su resultado de cuatro primos, citado por Courant y Robbins en la página 55, que había sido demostrado en 1934. Según expresaron Courant y Robbins, este teorema sólo se aplica a números “suficientemente grandes” —números mayores que algún valor particular n_0 —, aunque la demostración de Vinográdov no especifica qué tan grande debe ser n_0 . En 1956, K. G. Borodzkin llenó este hueco mostrando que $n_0 = \exp[\exp(16.038)]$ es suficiente, donde $\exp(x) = e^x$. Varios matemáticos usaron el método de Vinográdov para demostrar que “casi todos” los números pares son la suma de dos primos, es decir, que la proporción de tales números hasta algún límite n tiende a 100% conforme n tiende a infinito.

En 1919, Viggo Brun introdujo un enfoque diferente, el “método de la criba”, que generaliza la criba de Eratóstenes (véase página 49), el cual usó para demostrar que todo entero par suficientemente grande es una suma de dos números, siendo cada uno de ellos un producto de a lo más nueve primos. Siguieron una serie de mejoras a este teorema por parte de varias personas. Por ejemplo, en 1937, G. Ricci demostró que todo entero par suficientemente grande es una suma de dos números, siendo uno de ellos un producto de a lo más dos primos, y el otro un producto de a lo más 366 primos. P. Kuhn usó ideas sobre combinatoria de A. A. Buchstab para demostrar que todo entero par suficientemente grande es una suma de dos números, cada uno de los cuales es producto de a lo más cuatro primos. En 1957, Wang Yuan demostró que todo entero par suficientemente grande es una suma de un primo y un producto de a lo más tres primos, bajo la suposición de que se cumple la hipótesis generalizada de Riemann.

La hipótesis clásica de Riemann, otro de los 23 problemas de Hilbert y todavía (discutiblemente) la mayor cuestión sin resolverse en todas las matemáticas, tiene que ver con la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ cuando la variable s es compleja. Específicamente, enuncia que si $\zeta(s) = 0$ y s no es real entonces $s = \frac{1}{2} + iy$ para algún real y . Las consecuencias de demostrar este enunciado serían espectaculares: revolucionarían la teoría de los números y la geometría algebraica. Más aún, cualquier método para resolver tal problema es casi seguro que se extendería a otras variantes importantes tales como la hipótesis generalizada de Riemann, un enunciado considerablemente más fuerte del mismo tipo general. Debido a que la hipótesis de Riemann y sus generalizaciones constituyen un obstáculo tan significativo para el progreso, los especialistas en teoría de números han desarrollado el hábito de arrojar anzuelos

exploratorios al territorio que queda más allá, basando parte de su trabajo en la suposición explícita de que la hipótesis de Riemann, o alguna de sus generalizaciones, es verdadera. Una justificación de este proceder es la posibilidad de que pueda llevar a una contradicción, exponiendo entonces la hipótesis de Riemann como falsa; pero esto es mera especulación. Los especialistas en teoría de números son impacientes, no pueden esperar para ver qué hay más allá del Gran Obstáculo.

En ocasiones, una vez que tal territorio ha sido explorado, aparecen nuevas posibilidades que permiten que se prescinda de la suposición. En 1948, sin suponer la hipótesis generalizada de Riemann, Alfred Rényi demostró que todo entero par suficientemente grande es una suma de un primo y un producto de a lo más c primos para algún c fijo pero desconocido. En 1961, M. B. Barban mostró que $c = 9$ basta. En 1962, Pan Cheng Dong redujo esto a $c = 5$; poco después Barban y Pan lo redujeron, independientemente, a $c = 4$, y en 1965, Buchstab demostró el teorema para $c = 3$. Finalmente, en 1966, Chen Jing Run mejoró el método de la criba y demostró el teorema para $c = 2$. Es decir, todo entero par suficientemente grande es una suma de un primo y un producto de al menos dos primos: "primo más casi primo". Éste es el resultado más cercano, que se conoce hasta la fecha, a la conjetura de Goldbach.

Se ha abordado la conjetura de los primos gemelos con un espíritu similar. El artículo de Brun de 1919 demostró también que hay una infinidad de números p tales que p y $p + 2$ son ambos un producto de a lo más nueve primos. En correspondencia a las mejoras al resultado de Brun sobre la conjetura de Goldbach, hubo mejoras similares a su trabajo sobre la conjetura de los primos gemelos. En 1924, Rademacher redujo el número nueve de Brun a siete. Buchstab lo redujo aún más, a seis en 1930 y a cinco en 1938. En un artículo de 1957, Wang indicó: "también se han obtenido resultados análogos en el problema de los primos gemelos"; dicha afirmación —puesta en el contexto de la demostración, ese mismo año, de que todo entero par suficientemente grande es una suma de un primo y un producto de a lo más tres primos— equivale a sostener que hay una infinidad de números p tales que tanto p como $p + 2$ son un producto de a lo más tres primos. Tomando como válida la hipótesis generalizada de Riemann, Wang mostró en 1962 que existe una infinidad de primos p tales que $p + 2$ es un producto de a lo más tres primos. En 1965, sin necesidad de usar la hipótesis de Riemann, Buchstab demostró que para algún c fijo existe una infinidad de primos p tales que $p + 2$ es un producto de a lo más c primos. En un artículo de 1973, Chen demostró que $c = 2$ basta y, otra vez, es éste el resultado más cercano que se conoce a la conjetura de los primos gemelos. Parece improbable que los métodos actuales puedan lograr una mejor aproximación al resultado: se requiere de una idea genuinamente novedosa.

§3. EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

[véase página 66]

Uno de los avances más dramáticos desde que Courant y Robbins escribieron *¿Qué son las matemáticas?* fue la demostración del último teorema de Fermat en 1994, dada por Andrew Wiles, de la Universidad de Princeton. Recordemos que Fermat conjeturó que la ecuación

$$x^n + y^n = z^n \quad (1)$$

no tiene soluciones enteras distintas de la solución cero cuando $n \geq 3$. La demostración de Wiles es muy técnica y sólo accesible a los expertos; sin embargo, el bosquejo general de la demostración sí es comprensible. El ataque es esencialmente indirecto y usa bastante la teoría de las “curvas elípticas”, las cuales están definidas por ecuaciones diofantinas de la forma

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2)$$

para números racionales a, b, c y d . (El adjetivo “elípticas” se deriva de relaciones con las llamadas funciones elípticas, y no se refiere a la forma de la curva.) Se sabe mucho acerca de tales ecuaciones: constituyen una de las áreas mejor y más profundamente entendidas de la teoría de números.

La ecuación de Fermat (1) puede reescribirse como $(x/z)^n + (y/z)^n = 1$, de manera que el punto $(X, Y) = (x/z, y/z)$ está en la *curva de Fermat* con ecuación

$$X^n + Y^n = 1. \quad (3)$$

Se dice que (X, Y) es un punto racional si tanto X como Y son números racionales. Entonces el último teorema de Fermat es equivalente a la afirmación de que ningún punto racional puede estar en la curva de Fermat (3) cuando $n \geq 3$. Entre 1970 y 1975, Yves Hellegouarch investigó una relación curiosa entre las curvas de Fermat (3) y las curvas elípticas (2). Jean-Pierre Serre sugirió intentar lo inverso: explotar propiedades de las curvas elípticas para demostrar resultados relacionados con el último teorema de Fermat. En 1985, Gerhard Frey dio forma concreta a esta sugerencia introduciendo lo que ahora se llama la *curva elíptica de Frey*, asociada con una presumible solución de la ecuación de Fermat. Supóngase que hay una solución no trivial $A^n + B^n = C^n$ de la ecuación de Fermat, y fórmese la curva elíptica

$$y^2 = x(x + A^n)(x - B^n), \quad (4)$$

que es precisamente la curva elíptica de Frey, la cual existe si y sólo si el último teorema de Fermat es falso. Así que para demostrar el último teorema de Fermat es suficiente demostrar que la curva de Frey (4) no puede existir; la manera de hacerlo es siguiendo el método “indirecto” de demostración (véase página 113): es decir, suponer que sí existe y deducir una contradicción, lo que implicaría que la curva de Frey no existe después de todo y que por lo tanto el último teorema de Fermat es verdadero. Frey encontró fuerte evidencia de que su curva “no debiera existir” demostrando que ésta tiene muchas propiedades notablemente extrañas cuya base es de improbable solidez. En 1986 Kenneth Ribet estableció claramente el problema demostrando que la curva de Frey no puede existir siempre y cuando la conjetura de Taniyama, un gran problema abierto en teoría de números, sea verdadera. De esta manera redujo un importante problema abierto, el último teorema de Fermat, a otro problema abierto importante. Este tipo de reducción con frecuencia resulta inútil: sólo reemplaza un problema difícil por otro más difícil; pero en este caso se dio en la veta, pues proporcionó un *contexto* para atacar el problema.

La conjetura de Taniyama es muy técnica también, pero puede explicarse haciendo referencia a un caso especial. Hay una íntima relación entre la “ecuación pitagórica” $a^2 + b^2 = c^2$, el círculo unitario y las funciones trigonométricas seno y coseno. Para encontrar esta relación, obsérvese que la ecuación pitagórica puede reescribirse en la forma $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$, lo cual implica que el punto $(x, y) = (a/c, b/c)$ está en el círculo unitario, cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Es bien sabido que las funciones trigonométricas proporcionan un modo sencillo de representar el círculo unitario. Específicamente, el teorema de Pitágoras y la definición geométrica de sen y cos implican que la ecuación

$$\cos^2 \theta + \sen^2 \theta = 1 \quad (5)$$

se cumple para cualquier ángulo θ (véase página 312). Si hacemos $x = \cos \theta$ y $y = \sen \theta$ entonces (5) establece que el punto (x, y) está en el círculo unitario. Resumiendo: resolver la ecuación pitagórica en enteros es equivalente a encontrar un ángulo θ tal que tanto $\cos \theta$ como $\sen \theta$ sean números racionales (iguales respectivamente a a/c y b/c). Como las funciones trigonométricas tienen todo tipo de propiedades agradables, esta idea es la base de una teoría realmente fructífera de la ecuación pitagórica.

La conjetura de Taniyama dice (en un contexto más bien técnico) que una idea de tipo similar puede aplicarse a cualquier curva elíptica, pero reemplazando al seno y al coseno por funciones “modulares” más sofisticadas. Así, problemas sobre curvas elípticas pueden reemplazarse por problemas sobre funciones modulares, igual que problemas sobre el círculo pueden reemplazarse por problemas sobre funciones trigonométricas.

Wiles se dio cuenta de que el acercamiento de Frey puede llevarse hasta una conclusión satisfactoria sin usar toda la fuerza de la conjetura de Taniyama. En lugar de eso, basta un caso particular, uno que se aplica a una clase de curvas elípticas conocidas como “semiestables”. En un artículo de cien páginas hizo acopio de un poderoso arsenal para demostrar el caso semiestable de la conjetura de Taniyama, que lleva al siguiente teorema. Supóngase que M y N son enteros diferentes, distintos de cero y primos relativos tales que $MN(M-N)$ es divisible entre 16. Entonces la curva elíptica $y^2 = x(x+M)(x+N)$ puede parametrizarse mediante funciones modulares. De hecho, la condición de divisibilidad entre 16 implica que esta curva es semiestable, de manera que la conjetura semiestable de Taniyama establece la propiedad deseada.

Ahora aplicamos el teorema de Wiles a la curva de Frey (4) haciendo $M = A^n$ y $N = -B^n$. Entonces $M - N = A^n + B^n = C^n$, de manera que $MN(M - N) = -A^n B^n C^n$, lo cual debemos mostrar que es un múltiplo de 16. Ahora, al menos uno de los números A , B y C debe ser par —pues si A y B son ambos impares, C^n es una suma de dos impares y por lo tanto par, lo cual implica que C es par—. Además podemos suponer que $n \geq 5$, pues hace mucho tiempo Euler demostró el último teorema de Fermat para $n = 3$. Pero dado que la quinta potencia o una mayor de un número par es divisible entre $2^5 = 32$, el número $-A^n B^n C^n$ es un múltiplo de 32, así que claramente también un múltiplo de 16. Por lo tanto la curva de Frey satisface la hipótesis del teorema de Wiles, implicando que puede ser parametrizada con funciones modulares. Sin embargo, la demostración de Ribet de que la conjetura de Taniyama implica la no existencia de la curva de Frey funciona demostrando que la curva de Frey *no puede* ser parametrizada con funciones modulares, lo que constituye una contradicción, así que el último teorema de Fermat es verdadero.

Esta demostración es muy indirecta y requiere ideas sofisticadas. Más aún, surgieron algunas dificultades referentes a la primera versión de la demostración de Wiles que aumentaron el dramatismo. Él hizo circular un mensaje por correo electrónico a la comunidad matemática reconociendo esas dificultades pero asegurando su confianza en que sus métodos las resolverían. Las reparaciones a la demostración tomaron más tiempo del que se esperaba, pero el 26 de octubre de 1994 Karl Rubin hizo circular otro mensaje: “Como la mayoría de ustedes sabe, el argumento descrito por Wiles [...] resultó tener un hueco importante, a saber, la construcción de un sistema de Euler. Después de tratar sin éxito de reparar esa construcción, Wiles regresó a un camino distinto, el cual ya había intentado antes pero que había abandonado en favor de la idea del sistema de Euler. Entonces pudo completar su demostración.”

§4. LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO

[véase página 115]

La hipótesis del continuo establece que el cardinal del conjunto de todos los números reales es el cardinal infinito más pequeño que es mayor que el de los enteros. Ahora se sabe que la hipótesis del continuo no es ni verdadera ni falsa, sino *indecidable*. Para entender lo que esto significa, debemos recordar brevemente el método axiomático (página 249). Dicho método particulariza un objeto matemático estableciendo un sistema explícito de condiciones, *axiomas*, que se requiere que el objeto satisfaga. Esto enfoca la atención en las relaciones abstractas entre ese objeto y otros, más que en los materiales primarios con los que está “construido”. Las presentaciones sencillas de la teoría de conjuntos dan por hecho que nociones tales como “conjunto” están definidas, y describen cómo manipularlas. Para establecer un marco riguroso en el que se discuta la hipótesis del continuo, es necesario especificar un sistema de axiomas para la teoría de conjuntos.

En 1964, Paul Cohen demostró que la veracidad de la hipótesis del continuo depende de cuáles axiomas se escojan para la teoría de conjuntos. Esta situación es similar a la de la veracidad o falsedad del axioma de las paralelas de Euclides, lo cual depende del tipo de geometría: hay una geometría “euclidiana” para la cual es verdadero, pero también hay geometrías “no euclidianas” para las cuales es falso (véase página 252). De manera similar, hay teorías de conjuntos “cantorianas” en las que la hipótesis del continuo es verdadera, y teorías de conjuntos “no cantorianas” en las que es falsa. Kurt Gödel había demostrado que la hipótesis del continuo es verdadera en algunas axiomatizaciones de la teoría de conjuntos, y Cohen, usando una nueva técnica llamada *forcing*, demostró que en otras axiomatizaciones es falsa. En particular, no hay una elección de axiomas distinguida que conduzca a una única teoría de conjuntos “natural”.

§5. NOTACIÓN DE TEORÍA DE CONJUNTOS

[véase página 140]

La notación matemática sigue modas, y a veces la moda puede cambiar. En consecuencia, la terminología de Courant y Robbins en ocasiones difiere en detalles menores de la acostumbrada actualmente, pero esto rara vez es suficientemente importante como para mencionarlo. En este caso particular, sin embargo, la diferencia con el uso actual es demasiado significativa como para ignorarla.

Los términos “suma lógica” y “producto lógico” prácticamente no se usan en nuestros días; en su lugar se emplean las alternativas “unión” e “intersec-

ción". El conjunto vacío se denota como \emptyset y no como O , y ya no se utiliza un símbolo especial, I , para el universo de discurso. Las notaciones actuales para la unión e intersección de dos conjuntos A y B son las siguientes:

Unión: $A \cup B$ (en lugar de la notación de Courant y Robbins, $A + B$)

Intersección: $A \cap B$ (en lugar de la notación de Courant y Robbins, AB).

El complemento A' suele escribirse A^c , pero todavía es común usar A' . La notación actual para subconjuntos es cualquiera de los dos símbolos: \subset o \subseteq . A diferencia de $<$ y \leq , la expresión $A \subset B$ no implica que $A \neq B$, ni hoy ni en los tiempos de Courant y Robbins. Para denotar desigualdad en una relación de subconjuntos, se utiliza la incómoda notación $A \subsetneq B$.

Las notaciones $A + B$, AB y A' sobreviven aún en las ciencias de la computación y en la ingeniería electrónica, en las que se utilizan para describir circuitos formados a partir de entradas lógicas.

Irónicamente, la notación moderna oscurece las analogías algebraicas de las propiedades 6 a 17 de la página 140. Sin embargo, en vista de las propiedades 10, 11 y 13, puede que esto no sea del todo grave.

§6. EL TEOREMA DE LOS CUATRO COLORES

[véanse páginas 280 y 299]

El teorema de los cuatro colores fue demostrado en junio de 1976 por Kenneth Appel y Wolfgang Haken. Su demostración depende de que se muestre que unos dos mil mapas específicos se comportan de un modo particular algo complicado. Examinar todos esos casos resulta enormemente tedioso, así que usaron una computadora, la cual requirió de varios miles de horas para completar las verificaciones. Ahora la demostración puede verificarse en pocas horas, gracias a mejores métodos teóricos y a computadoras más rápidas, pero todavía no se ha encontrado alguna demostración hecha a "lápiz y papel". ¿Existe una demostración más sencilla? Nadie sabe, aunque se ha visto que ninguna demostración sustancialmente más sencilla puede darse siguiendo líneas similares.

La demostración de Courant y Robbins del teorema de los cinco colores (página 299) es una adaptación del trabajo de Arthur Kempe, un abogado y matemático aficionado, quien en 1879 publicó una presunta demostración del teorema de los cuatro colores. Utiliza una variante del método de inducción matemática (páginas 32 a 43), tomando como idea básica que si el teorema de los cuatro colores es falso entonces debe haber mapas que requieren un quinto color. Si tales mapas "malos" existen, pueden incorporarse a mapas más grandes en todas las maneras posibles, y todos ellos requerirán también

un quinto color. Como no tiene caso alguno hacer más grandes los mapas malos, hay que ir en sentido opuesto y examinar los mapas malos más pequeños. Coloquialmente a un mapa así se le denomina *minimal criminal*.[†] La existencia de un *minimal criminal* se sigue del principio del menor entero (página 42), que es equivalente al principio de inducción matemática. Un *minimal criminal* se distingue por las siguientes dos propiedades: necesita cinco colores, y cualquier mapa con un número menor de países necesita sólo cuatro. La demostración procede haciendo uso de estas propiedades para restringir la estructura de un *minimal criminal*, hasta que finalmente se muestra que no existe *minimal criminal* alguno. Por contradicción (demostración indirecta, véase la página 113), el teorema debe ser verdadero.

La idea de Kempe era partir de un *minimal criminal* y producir un mapa relacionado más pequeño, el cual, por la segunda propiedad mencionada anteriormente, puede iluminarse con cuatro colores; de ahí, Kempe trató de deducir que el mapa original también se puede iluminar con cuatro colores: la contradicción requerida. Específicamente, el procedimiento consistía en tomar un *minimal criminal* y contraer a un punto alguna región convenientemente seleccionada; el mapa resultante tiene menos regiones, de manera que puede iluminarse con cuatro colores. Podría darse el caso de que fuera imposible regenerar la región contraída y encontrar un color para ella sin cambiar los colores del resto del mapa, a causa de que dicha región podría lindar con otras que ya usan los cuatro colores. Sin embargo, si la región que se contrae es un triángulo (una región que linda sólo con otras tres), no hay problema. Si es un cuadrado entonces se emplea una técnica artificiosa de intercambio de colores, llamada ahora “cadena de Kempe”, para cambiar uno de los colores vecinos, lo cual permite que la estratagema funcione. Si es un pentágono, mantuvo Kempe, funciona un argumento similar. Finalmente, pudo demostrar que todo mapa debe contener ya sea un triángulo, un cuadrado o un pentágono, así que siempre hay una región adecuada para ser contraída y regenerada.

En 1890, Percy Heawood encontró un error en el tratamiento de Kempe de las regiones pentagonales. Heawood notó que el método de Kempe puede remendarse para dar una demostración de que cinco colores son siempre suficientes: un color adicional hace más fácil regenerar el pentágono. Ésta es la demostración presentada en la página 299. Por otra parte, nadie podía encontrar un mapa que realmente necesitara cinco colores.

En 1922, Philip Franklin demostró que todo mapa con 26 o menos regiones se puede iluminar con cuatro colores. Su método sentó las bases para el exitoso asalto final, con la idea de una configuración reductible. Una *configu-*

[†] Literalmente, “criminal mínimo” o “menor infractor”. En lo que sigue, se usará el término empleado en la versión original en inglés, *minimal criminal*, para denominar a tal mapa que, a fin de cuentas, no existe. [N. E.]

ración es sólo un conjunto de regiones conectadas del mapa junto con información de cuántas regiones son adyacentes a cada una alrededor del exterior. Para ver lo que significa reductibilidad, considérese el ejemplo de contraer y regenerar una región triangular. Contráigase el triángulo a un punto y supóngase que el mapa resultante, que tiene una región menos, puede iluminarse con cuatro colores; lo mismo puede hacerse entonces con el mapa original, pues el triángulo linda sólo con tres regiones y eso deja un cuarto color libre cuando dicho triángulo es regenerado en el mapa. De manera más general, una configuración es *reductible* si puede demostrarse que la iluminación con cuatro colores de cualquier mapa que la contiene es posible siempre que un mapa más pequeño pueda iluminarse con cuatro colores. Con un argumento similar se demuestra que los cuadrados son reductibles. Kempe pensó que los pentágonos eran reductibles, pero estaba equivocado.

Evidentemente un *minimal criminal* no puede tener una configuración reductible, así que si mostramos que todo *minimal criminal* debe contener una configuración reductible, tenemos la contradicción requerida. El modo más directo de hacerlo es encontrar un conjunto de configuraciones reductibles que sea *inevitable*, en el sentido de que cualquier mapa (no sólo un *minimal criminal*) debe contener una de tales configuraciones. Kempe había intentado hacer eso precisamente: demostró que el conjunto {triángulo, cuadrado, pentágono} es inevitable, lo cual es correcto, pero cometió un error en la demostración de la reductibilidad del pentágono. Con todo, la estrategia básica de su demostración —encontrar un conjunto inevitable de configuraciones reductibles— fue una idea brillante.

En 1950, Heinrich Heesch se convirtió en el primer matemático en afirmar públicamente que creía que el teorema de los cuatro colores podría demostrarse encontrando un conjunto inevitable de configuraciones reductibles. Se dio cuenta, sin embargo, de que el conjunto inevitable tendría que contener muchas más configuraciones que las tres del intento fallido de Kempe, pues el pentágono ha de ser reemplazado por una copiosa lista de alternativas. De hecho, Heesch estimó que se necesitarían alrededor de 10 000 configuraciones, cada una de ellas de tamaño moderado. Además, inventó un método para demostrar la inevitabilidad, basado en una vaga analogía eléctrica. Supongamos que se aplica una cierta cantidad de carga eléctrica a cada región, y luego se le permite moverse a regiones vecinas siguiendo diversas reglas. Por ejemplo, podemos determinar que la carga sobre cualquier pentágono se divida en partes iguales y se transfiera a cualquiera de sus vecinos, excepto triángulos, cuadrados y pentágonos. A partir del análisis de los rasgos generales de las distribuciones de carga, se puede mostrar que deben darse ciertas configuraciones específicas, pues de otra forma la carga “se esfumaría”. Recetas más complicadas llevan a listas más complicadas de configuraciones inevitables.

En 1970 Wolfgang Haken hizo mejoras al método de cargas de Heesch y empezó a pensar seriamente en resolver el problema de los cuatro colores. La mayor dificultad era el tamaño probable de configuraciones en el conjunto inevitable. Si partimos de un estimado de 10 000 regiones para ser examinadas en cuanto a su reductibilidad, el cómputo total podría fácilmente tomar un siglo. Y si, a fin de cuentas, una sola configuración del conjunto inevitable resultara no ser reductible, todo el cómputo habría sido inútil.

Entre 1972 y 1974, Haken y Kenneth Appel comenzaron juntos un diálogo interactivo con la computadora para tratar de mejorar las posibilidades de éxito. La primera versión de su programa de computadora proporcionó mucha información útil. Modificaron después el programa para superar una serie de defectos e intentaron nuevamente. Aparecieron problemas más sutiles y fueron debidamente corregidos. Después de unos seis meses de este diálogo, Appel y Haken se convencieron de que su método para demostrar la inevitabilidad tenía buenas posibilidades de éxito. En 1975, su programa de investigación pasó de la fase de exploración al ataque final. En enero de 1976, empezaron la construcción de un conjunto inevitable con unas 2 000 regiones, y para junio de 1976 su trabajo estaba completo. Entonces comprobaron la reductibilidad de cada configuración de este conjunto. Aquí la computadora demostró ser indispensable, reportando puntualmente que cada una de las 2 000 configuraciones del conjunto inevitable de Appel y Haken es reductible. Esto contradice la supuesta existencia de un *minimal criminal*, de manera que cuatro colores solos bastan para iluminar cualquier mapa plano.

¿Hasta qué punto puede un argumento que descansa en un cómputo enorme —que ningún cerebro humano sin ayuda podría comprobar— ser considerado una demostración? Stephen Tymoczko, un filósofo, escribió: “Si aceptamos el teorema de los cuatro colores como un teorema, nos vemos forzados a cambiar el sentido de ‘teorema’, o más específicamente, a cambiar el sentido del concepto subyacente de ‘demostración’”. Pocos investigadores en matemáticas están de acuerdo con esto. Una razón es que existen demostraciones matemáticas que no están basadas en una computadora y sin embargo son tan largas y complicadas que ni siquiera después de estudiarlas por una década podría alguien meter las manos al fuego y declarar que están totalmente exentas de errores. Por ejemplo, el llamado “teorema de clasificación de grupos simples finitos” tiene al menos 10 000 páginas, requirió los esfuerzos de más de cien personas y sólo un especialista bien entrenado puede seguirlo. Sin embargo, los matemáticos generalmente están convencidos de que la demostración es correcta. La razón es que la estrategia tiene sentido, los detalles cuadran entre sí, nadie ha encontrado un error serio y el juicio de la gente que hace el trabajo es por lo menos tan confiable como el de alguien no versado en el tema. Es evidente que esta convicción se desvane-

cería si cualquiera —conocedor o no del tema— encontrara un error, pero hasta ahora no ha sucedido.

No hay nada en la demostración de Appel y Haken que sea menos convincente que el teorema de clasificación para grupos simples finitos. De hecho, es mucho menos probable que una computadora cometa un error a que lo haga un humano, siempre y cuando el programa sea correcto. La estrategia de demostración de Appel y Haken tiene mucho sentido desde el punto de vista lógico; su conjunto inevitable fue obtenido en todo caso a mano, y parece haber pocas razones para dudar de la exactitud del programa utilizado para comprobar la reductibilidad. Pruebas hechas al azar no han encontrado nada fuera de lugar. En una entrevista para el periódico, Haken resumió el punto de vista general: “cualquiera puede, en cualquier parte del proceso, llenar los detalles y verificarlos. El hecho de que una computadora pueda comprobar más detalles, en pocas horas, de los que un humano podría llegar a esperar comprobar en una vida no cambia el concepto básico de demostración matemática. Lo que ha cambiado no es la teoría sino la práctica de las matemáticas”.

§7. LA DIMENSIÓN DE HAUSDORFF Y LOS FRACTALES

[véase página 282]

La definición de dimensión que dio Poincaré en 1912 (véase página 284) es topológica y —lo que es muy razonable— conduce siempre a un valor entero. Un concepto de dimensión muy diferente del de Poincaré ha adquirido importancia recientemente. Fue inventado originalmente por Félix Hausdorff en 1919 y desarrollado por A. S. Besicovitch en la década de 1930, pero después fue abandonado en las investigaciones matemáticas. Se ha puesto de moda otra vez por sus aplicaciones a la teoría de Benoît Mandelbrot de los *fractales* —objetos geométricos con estructura en todas las escalas de amplificación, tales como el famoso *conjunto de Mandelbrot* (Figura 288)—.

Este conjunto consta de todos los números complejos c (los cuales pueden representarse como puntos del plano) tales que la sucesión $c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$ no tienda a infinito; cada término de esta sucesión es el cuadrado del término anterior más c .

La dimensión Hausdorff-Besicovitch de un conjunto, con frecuencia denominada ahora la *dimensión fractal*, tiene muchas aplicaciones en diferentes ramas de la ciencia, ya que es una cantidad precisa que puede medirse experimentalmente y compararse con la teoría. Sorprendentemente, no necesita ser un entero. Este rasgo curioso, la razón por la que todavía tiene sentido considerar a este número como una dimensión, puede entenderse partiendo de una

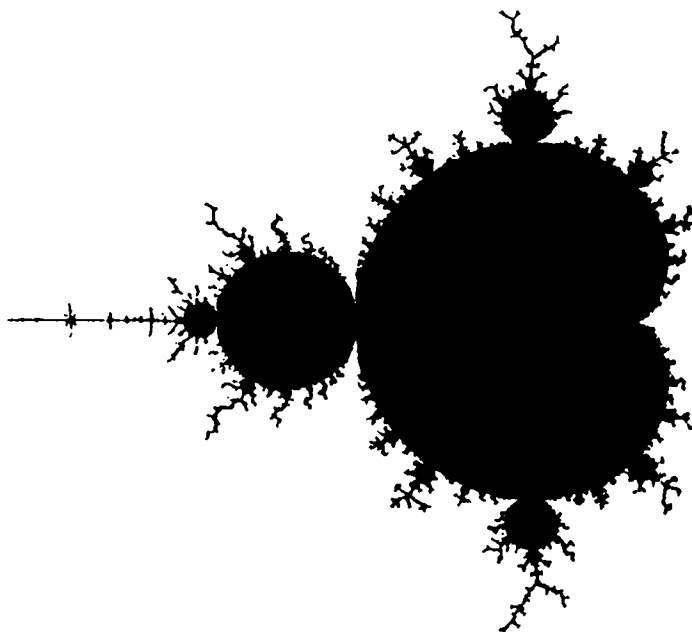


FIGURA 288. El conjunto de Mandelbrot tiene una estructura intrincada en todas las escalas de ampliación.

versión más sencilla, conocida como *dimensión de reescalamiento*. Algunas figuras pueden ensamblarse para formar copias más grandes de sí mismas. Por ejemplo (véase Figura 289), se requieren dos copias de un segmento de línea recta (un objeto unidimensional) para construir un segmento de línea recta del doble de tamaño; se requieren cuatro copias de un cuadrado (bidimensional) para hacer uno del doble de tamaño, y se requieren ocho copias de un cubo (tridimensional) para hacer uno del doble de tamaño. En general, se requieren 2^d copias de un hipercubo d -dimensional (véase página 265) para hacer uno del doble de tamaño, y se requieren $c = a^d$ copias para hacer uno de a veces su tamaño.

Podemos resolver la ecuación $c = a^d$ para d empleando logaritmos (véase página 486, ecuación (6)):

$$\log c = d \log a,$$

de manera que

$$d = \frac{\log c}{\log a}. \quad (6)$$

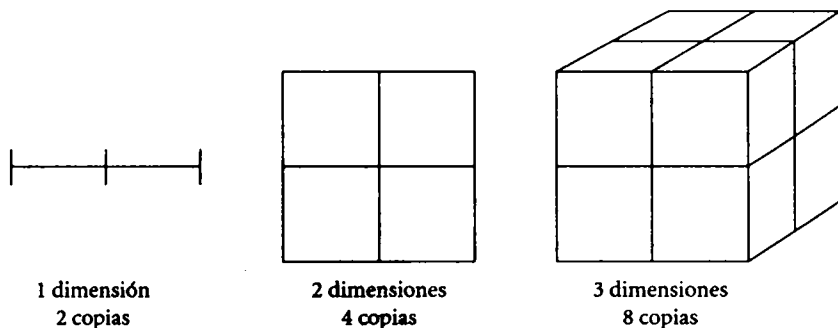


FIGURA 289. El número de copias requeridas para duplicar el tamaño de un objeto depende de su dimensión.

Podemos ir ahora en el otro sentido y utilizar esta ecuación para definir d , dados c y a . El resultado se conoce como la dimensión de reescalamiento del conjunto en cuestión. Si estudiamos ejemplos, veremos que esto conduce a conclusiones intrigantes. Tomemos por caso el conjunto de Cantor (véase página 282), que puede hacerse del triple de su tamaño ($a = 3$) ensamblando dos copias ($c = 2$) (véase Figura 290).

De acuerdo con la definición (6), la dimensión de reescalamiento del conjunto de Cantor es entonces

$$d = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.630923\dots,$$

un número real pero que no es un entero. De manera similar, el triángulo de Sierpiński (Figura 291) puede duplicarse en tamaño ($a = 2$) ensamblando tres copias, de manera que su dimensión de reescalamiento es

$$d = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.584962\dots$$

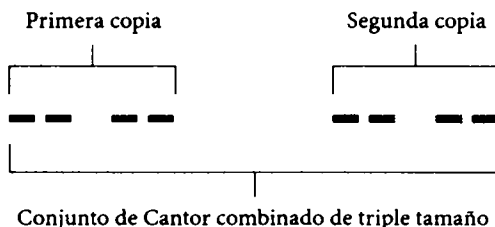


FIGURA 290. Dos copias del conjunto de Cantor triplican su tamaño.

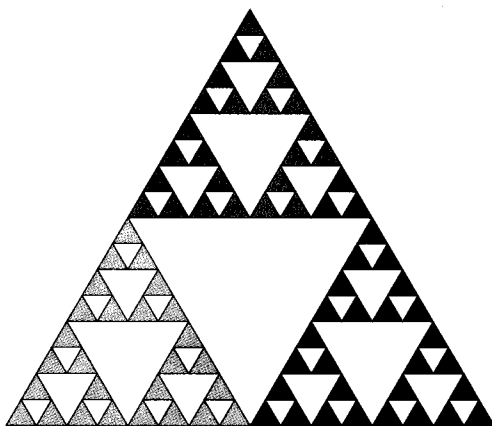


FIGURA 291. Tres copias de un triángulo de Sierpiński doblan su tamaño.

Esta cantidad se considera una dimensión porque toma el mismo valor que la dimensión común para conjuntos “bien portados” tales como intervalos, cuadrados, cubos, y así sucesivamente. La dimensión fractal concuerda con la dimensión de reescalamiento para muchos conjuntos, pero está definida para conjuntos que no pueden agrandarse ensamblando copias de sí mismos. Generalmente, la dimensión fractal de un conjunto fractal no es un entero, aunque a veces puede serlo; por ejemplo, en 1991, Mitsuhiro Shishikura demostró que la dimensión fractal de la frontera del conjunto de Mandelbrot es 2. El verdadero significado de la dimensión fractal radica en ser una medida de “qué tan bien es llenado el espacio por el conjunto” o “qué tan áspero es el conjunto”. Por ejemplo, el conjunto de Cantor, con una dimensión estrictamente entre 0 y 1, llena el espacio mejor que un punto (dimensión 0) pero no mejor que un segmento de línea recta (dimensión 1). Así, la dimensión fractal resuelve la cuestión de si el conjunto de Cantor debiera tener dimensión 0 o 1 (véase página 283) de una manera muy diferente a la propuesta de Poincaré.

§8. NUDOS

[véase página 290]

La teoría de nudos es actualmente el foco de una gran cantidad de actividad en la investigación, impulsada por el descubrimiento del polinomio de Jones, un nuevo método notable para distinguir nudos que no son equivalentes topológicamente. La teoría abarca tanto enlaces como nudos, así que comenzaremos por precisar más estos conceptos.

Un *enlace* es un conjunto de una o más gazas cerradas en el espacio tridimensional. Las gazas individuales se llaman *componentes* del enlace. Las gazas pueden torcerse o anudarse, y —como el nombre sugiere— es posible unir las entre sí de cualquier manera, incluyendo el caso de no estar unidas en lo absoluto en el sentido convencional. Si hay sólo una gaza, el enlace se llama *nudo*. El problema central en la teoría de enlaces es encontrar modos eficientes para decidir si dos enlaces o nudos dados son o no equivalentes topológicamente —es decir, si pueden deformarse uno en el otro mediante transformaciones continuas (véase páginas 275-276)—. En particular, queremos saber si lo que parece un nudo está en realidad desanudado, es decir, si es equivalente al *no-nudo* (Figura 292a), y si un enlace dado de n componentes puede ser desenlazado, es decir, si es equivalente al *no-enlace* de n componentes (Figura 292b).

La manera de lograr lo anterior es encontrando las denominadas *invariantes topológicas*, que son números —u objetos matemáticos más complicados— que no cambian cuando el enlace es deformado continuamente. Así, enlaces con invariantes distintas no deben ser equivalentes topológicamente; sin embargo, enlaces con las mismas invariantes pueden o no ser equivalentes, y la única forma de decidirlo es encontrando una equivalencia topológica o inventando una invariante más sensible.

La invariante de nudo estándar en la teoría de nudos en la era anterior a Jones era el *polinomio de Alexander*, inventado en 1926. Ésta le asigna a cada nudo un polinomio en una variable t , que puede calcularse siguiendo un procedimiento estándar. No necesitamos ocuparnos aquí del procedimiento preciso, sino indicar el tipo de resultados que se obtienen. La Figura 293 muestra varios nudos simples y sus polinomios de Alexander.

El polinomio de Alexander es suficientemente bueno para distinguir entre un nudo de trébol y un nudo de arrecife, ya que éstos tienen diferentes polinomios de Alexander, pero *no* es suficientemente bueno como para distinguir entre un nudo de arrecife y un nudo “de la abuelita”, o entre un trébol a izquierda y un trébol a derecha, aunque sea “obvio” experimentalmente que

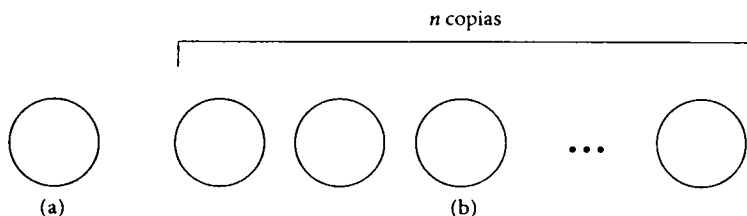
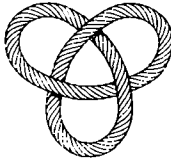


FIGURA 292. a) el *no-nudo*; b) el *no-enlace* de n componentes.

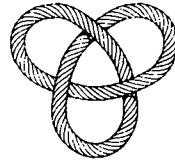
Tréboles

A izquierda



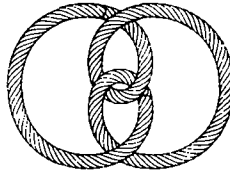
$$t^2 - t + 1$$

A derecha



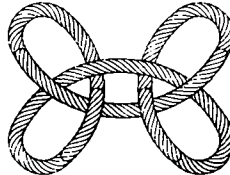
$$t^2 - t + 1$$

Forma de ocho



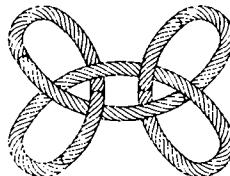
$$t^2 - 3t + 1$$

Arrecife



$$t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$$

Nudo de la abuelita



$$t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$$

FIGURA 293. Algunos nudos comunes y sus polinomios de Alexander.

estos nudos no son equivalentes en realidad. El problema es, ¿cómo podemos demostrar esto? De 1926 a 1984, los matemáticos se esforzaron por resolver estas cuestiones y otras similares. Lo lograron, pero mediante métodos complicados. La teoría de nudos no llegó precisamente a estancarse pero ciertamente necesitaba nuevas ideas.

En 1984 Vaughan Jones, un neozelandés, estaba trabajando sobre cuestiones de análisis con las llamadas funciones de traza en álgebras de operadores, que habían surgido en relación con la física matemática. D. Hatt y Pierre de la Harpe se dieron cuenta de que algunas de las ecuaciones de Jones parecían más bien ecuaciones que tiene lugar en teoría de trenzas (las trenzas son sistemas de líneas unidos, muy relacionados con los enlaces). Ponderado las razones que podrían estar detrás de tal coincidencia, Jones descubrió que sus funciones de traza podían utilizarse para definir una invariante polinomial para enlaces.

En un principio se pensó que el polinomio de Jones debería ser sólo alguna variación del polinomio de Alexander, pero pronto se hizo claro que era genuinamente nuevo. Posteriormente se encontraron definiciones más simples en las que no se recurre a álgebras de operadores. Cinco grupos separados de matemáticos descubrieron de manera simultánea e independiente una generalización que era aún mejor para distinguir nudos, una fórmula de dos variables llamada con frecuencia el polinomio HOMFLY, por los nombres de sus descubridores: Hoste-Oceanu-Millet-Freyd-Lickorish-Yetter. Hoy día existen una docena o más de nuevos polinomios de nudos que han resuelto muchos problemas notables, pero a la vez han planteado muchos rompecabezas nuevos por sí mismos, ya que no se adaptan cómodamente al aparato topológico establecido. En cierto sentido, aunque los topólogos pueden calcular los polinomios de nudos y demostrar teoremas acerca de ellos, todavía no están seguros de qué son realmente estas nuevas invariantes polinomiales, aunque parecen tener alguna relación profunda con la física cuántica.

El polinomio original de Jones es una invariante suficientemente poderosa para distinguir un trébol a izquierda de uno a derecha, lo que el polinomio de Alexander no podía determinar. El polinomio HOMFLY es aún más poderoso, y puede distinguir un nudo de arrecife de un nudo de la abuelita. De hecho, si denotamos con $P(L)$ al polinomio HOMFLY de un enlace, tenemos

$$P(\text{trébol a izquierda}) = -2x^2 - x^4 + x^2y^2,$$

$$P(\text{trébol a derecha}) = -2x^{-2} - x^{-4} + x^{-2}y^2,$$

$$P(\text{nudo de arrecife}) = (-2x^2 - x^4 + x^2y^2)(-2x^{-2} - x^{-4} + x^{-2}y^2), \text{ y}$$

$$P(\text{nudo de la abuelita}) = (-2x^2 - x^4 + x^2y^2)^2.$$

En estos polinomios, x y y son las dos variables requeridas para definirlos. Estos resultados obviamente demuestran no sólo que los dos tipos de trébol no son equivalentes topológicamente sino que el nudo de arrecife y el nudo de la abuelita tampoco lo son.

§9. UN PROBLEMA DE MECÁNICA

[véase página 357]

Es éste el único caso sobre el que puede argüirse que Courant y Robbins cometieron un error, aunque añadiendo más condiciones es posible salvar su argumento. Paradójicamente, es más fácil detectar el hueco en su demostración si adoptamos un enfoque topológico de la dinámica, que era por lo que intentaba abogar el argumento de ellos.

Repetimos el enunciado del problema. Supóngase que un tren viaja entre dos estaciones siguiendo una vía recta. Con una bisagra se une una varilla al piso de uno de los vagones, de manera que pueda moverse sin fricción ya sea hacia adelante o hacia atrás hasta que toque el piso (Figura 175, página 358). Si toca el piso, supóngase que permanece ahí durante todo el movimiento subsiguiente; supóngase también que de antemano especificamos cómo se mueve el tren. El movimiento no tiene que ser uniforme: el tren puede acelerar, detenerse repentinamente o incluso ir en reversa durante un tiempo determinado y debe empezar en una estación y terminar en la otra.

Courant y Robbins preguntan si es siempre posible colocar la varilla en una posición tal que nunca toque el piso durante el viaje. Su solución consiste en hacer notar que la posición final de la varilla depende continuamente de su posición inicial. Como hay un rango continuo de ángulos iniciales, de 0° a 180° , y la posición final depende continuamente de la posición inicial, el teorema de Bolzano (página 350) implica que el rango de ángulos finales también es continuo. Si empezamos con la varilla caída hacia adelante a 0° , ahí permanecerá; si empezamos con la varilla caída hacia atrás a 180° , ahí se quedará. Así que el rango de ángulos finales incluye todos los valores entre 0° y 180° ; en particular incluye a 90° , así que podemos acomodar la varilla para que termine en posición vertical. Como la varilla se quedaría en el piso al tocarlo, debe evitarse que esto ocurra.

La dificultad radica en que puede argüirse que la suposición de continuidad en la discusión anterior no está justificada. El problema no radica en lo sofisticado de las leyes de Newton del movimiento, sino en las “dominantes condiciones en la frontera”: si la varilla toca el piso, se queda ahí. Para ver por qué las condiciones en la frontera causan problemas, introducimos una representación topológica de los movimientos posibles del sistema. Este enfoque,

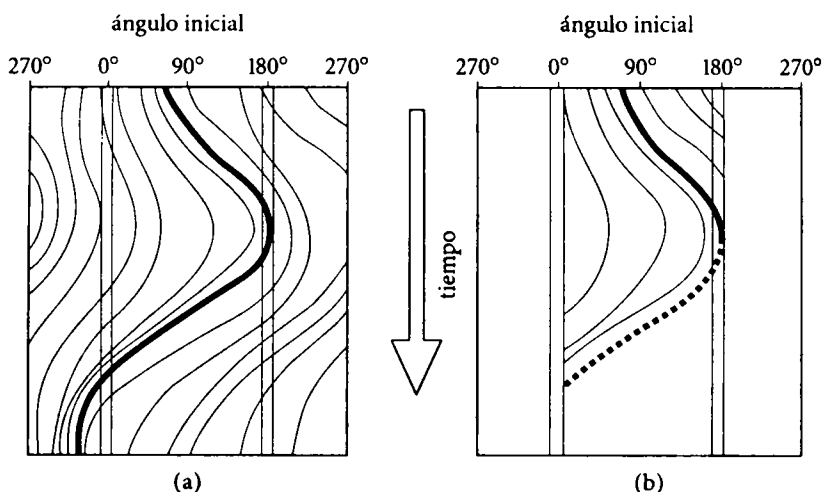


FIGURA 294. Historias posibles de la varilla móvil para diferentes condiciones iniciales: a) sin condiciones en la frontera; b) lo que sucede cuando se imponen condiciones en la frontera.

conocido como *retrato de fase*, se remonta a Poincaré. La idea consiste en dibujar un tipo de diagrama espacio-tiempo del movimiento, no sólo para una única posición inicial de la varilla sino para muchas posiciones diferentes —en principio, para todas—. La posición de la varilla es un ángulo entre 0° y 360° , y la podemos graficar en la dirección horizontal (véase Figura 294). Dejemos que el tiempo transcurra en la dirección vertical. Nótese que los bordes izquierdo y derecho de esta figura deben empatarse, ya que $0^\circ = 360^\circ$: conceptualmente, el rectángulo se enrolla para hacerlo un cilindro.

Ahora, la trayectoria en el espacio y el tiempo del ángulo que determina la posición de la varilla forma alguna curva que corre a lo largo del cilindro —lo que Albert Einstein llamó una “línea de universo”—. Ángulos iniciales diferentes conducen a curvas diferentes; las leyes de la dinámica muestran que estas curvas varían continuamente conforme el ángulo inicial varía continuamente —siempre que no se impongan las condiciones en la frontera—. Sin esas condiciones la varilla es libre de girar 360° : no hay piso que le impida dar la vuelta completa. En la Figura 294a se muestra una posible evolución, y en ella la posición final sí depende continuamente de la posición inicial.

Sin embargo, si se vuelven a imponer las dominantes condiciones en la frontera (Figura 294b), la posición final *no* tiene que depender continuamente de la posición inicial. Curvas que sólo rocen la frontera izquierda pueden girar de regreso hasta la derecha. Ciertamente, en esta figura particular *todas* las posiciones iniciales terminan en el piso: contrario a lo que sostienen

Courant y Robbins, no hay una elección de posición inicial que impida que la varilla caiga al piso durante el movimiento completo.

Este error en los argumentos de Courant y Robbins fue señalado por primera vez por Tim Poston en 1976, pero todavía no es muy ampliamente conocido. La suposición de continuidad puede resucitarse imponiendo más restricciones al movimiento, como por ejemplo una vía perfectamente plana, ningún brinco en el tren y así por el estilo. Sin embargo, parece más instructivo, como un ejercicio de aplicación de la topología a la dinámica, entender por qué las absorbentes condiciones en la frontera destruyen la continuidad. Esta dificultad es importante en la dinámica topológica avanzada, en la que ha dado lugar al concepto de un “bloque aislante”, que es una región tal que ninguna trayectoria dinámica es tangente a su frontera.

§10. EL PROBLEMA DE STEINER

[véase página 398]

El problema de Steiner (página 393) se refiere a un triángulo ABC y nos pide que encontremos un punto P tal que minimice la distancia total $PA + PB + PC$. La respuesta, al menos cuando los ángulos del triángulo ABC son menores que 120° , es que P es el único punto tal que las líneas PA , PB y PC se interceptan en ángulos de 120° una con la otra (páginas 393-394). El problema de Steiner puede generalizarse al problema de la red de caminos, el cual pide la red de líneas (caminos) de menor longitud total que une un conjunto dado de puntos (pueblos) uno al otro (página 398). Este problema generalizado ha dado lugar a una conjetura fascinante, sólo recientemente demostrada.

Supóngase que queremos encontrar una red de líneas que conectarán un conjunto de pueblos. Una manera de hacerlo es utilizar una red llamada generadora, que utiliza sólo líneas rectas que unan pares de pueblos; otra, es usar una red *de Steiner*, en la que se permiten pueblos adicionales, de manera que las líneas que los unen se intercepten en ángulos de 120° . Llamemos a la longitud de la menor red generadora para un conjunto dado de pueblos *longitud generadora* y a la longitud de la menor red de Steiner, *longitud de Steiner*. El problema de encontrar la longitud de Steiner es discutido por Courant y Robbins (página 398) bajo el título “Problema de la red de caminos”. Obviamente la longitud de Steiner es menor que o igual a la longitud generadora. ¿Cuánto más pequeña puede hacerse?

Supóngase, por ejemplo, que hay tres pueblos en los vértices de un triángulo equilátero de una unidad de lado. La Figura 295 muestra la menor red de Steiner y la menor red generadora. El nuevo punto introducido en el centro se llama *punto de Steiner*: en general, un punto de Steiner es uno en el que tres

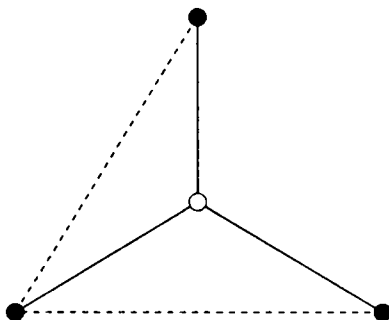


FIGURA 295. La menor red de Steiner (líneas continuas) y la menor red generadora (líneas interrumpidas) para tres pueblos en un triángulo equilátero.

líneas (que lo unen con otros puntos en el conjunto de pueblos) se interceptan en ángulos de 120° . La longitud generadora es 2 y la longitud de Steiner es $\sqrt{3}$. En este caso, la razón entre la longitud de Steiner y la longitud generadora es $\sqrt{3}/2 = 0.866$, y el ahorro en distancia obtenido utilizando la menor red de Steiner en vez de la menor red generadora es de aproximadamente 13.34 por ciento.

En 1968, Edgar Gilbert y Henry Pollak conjeturaron que no importa cómo estén localizados los pueblos inicialmente, la longitud de Steiner nunca es menor que la longitud generadora en más de 13.34%; dicho de otra manera:

$$\frac{\text{longitud de Steiner}}{\text{longitud generadora}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (7)$$

para cualquier conjunto de pueblos. Esta afirmación se conoce como la *conjetura de la razón de Steiner*. Después de un considerable esfuerzo fue finalmente demostrada por Ding Zhu Du y Frank Hwang en 1991; describiremos su procedimiento una vez que hayamos establecido las bases necesarias.

Encontrar la longitud generadora es un cómputo sencillo, aun para un número muy grande de pueblos. Se resuelve mediante el *algoritmo glotón*: empezamos con la menor línea conectora que podamos hallar, y en cada etapa subsiguiente añadimos la menor línea que encontremos que no complete una figura cerrada; procedemos así hasta que todo pueblo quede incluido. Encontrar la longitud de Steiner es mucho menos fácil, no pueden nada más tomarse todos los ternos posibles de pueblos, encontrar sus puntos de Steiner y buscar la menor red que una los pueblos y esté conectada ya sea en ellos o en dichos puntos de Steiner. Por ejemplo, supóngase que hay seis pueblos acomodados en las esquinas de dos cuadrados adyacentes, como en la Figura 296. Un posi-

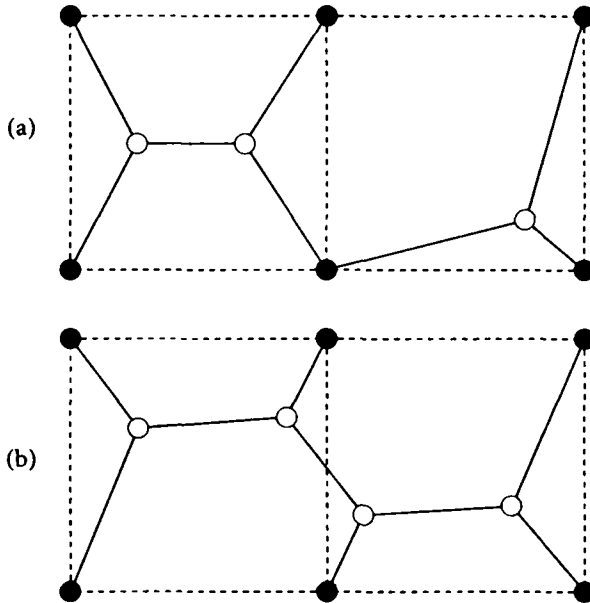


FIGURA 296. a) Combinación de árboles de Steiner para un cuadrado y un triángulo rectángulo isósceles; b) un árbol de Steiner más corto para el mismo conjunto de pueblos.

ble árbol de Steiner se muestra en la Figura 296a: se encuentra resolviendo el problema primero para un cuadrado de cuatro pueblos y uniendo después los dos pueblos restantes mediante su punto de Steiner con un pueblo que ya esté conectado. Sin embargo, el menor árbol de Steiner es el que se muestra en la Figura 296b (los cuadrados con puntos negros en los vértices se incluyen sólo para indicar dónde están situados los pueblos).

Por lo visto, no pueden construirse árboles de Steiner mínimos juntando partes. La generalización correcta de la definición de punto de Steiner a un conjunto de muchos pueblos es: cualquier punto en el que los enlaces puedan interceptarse a 120° . Para un ejemplo tan simple como el de cuatro pueblos en los vértices de un cuadrado, dichos puntos no son aquellos puntos de Steiner que conecten algún subconjunto de tres pueblos (Figura 297). Hay una infinidad de puntos en el plano, y aunque la mayoría de ellos probablemente sean irrelevantes, no es obvio que exista algún algoritmo; sin embargo, existen varios: el primero de ellos fue inventado por Z. A. Melzak, pero en la práctica su método es pesado aun para números moderados de pueblos, desde su invención ha sido mejorado, aunque no de manera dramática.

Sabemos ahora que hay razones claras por las que estos algoritmos son ineficientes. Gracias al uso creciente de las computadoras se ha creado una

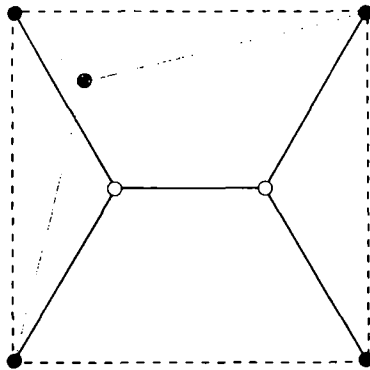


FIGURA 297. Los puntos de Steiner (en blanco) para cuatro pueblos en un cuadrado (en negro) son diferentes de los puntos de Steiner de un subconjunto de tres pueblos (en gris).

nueva rama de las matemáticas, la teoría de la complejidad algorítmica. Esta no sólo estudia algoritmos —métodos para resolver problemas— sino también la eficiencia de esos algoritmos. Dado un problema en el que interviene un cierto número n de objetos (aquí, pueblos), ¿cuán rápido crece el tiempo de ejecución de un programa para hallar la solución conforme crece n ? Si el tiempo de ejecución no crece más rápido que un múltiplo constante de una potencia fija de n , tal como $5n^2$ o $1066n^4$, entonces se dice que el algoritmo corre en *tiempo polinomial* y se considera que el problema es “fácil”; en general, esto significa que el algoritmo es factible (aunque no lo será si la constante es verdaderamente enorme). Si el tiempo de ejecución crece de manera no polinomial —más rápido que cualquier múltiplo constante de potencias de n , por ejemplo exponencialmente, como 2^n o 10^n — entonces el problema tiene tiempo de ejecución no polinomial y se considera “difícil”. En general esto quiere decir que el algoritmo es totalmente impráctico. Entre el tiempo polinomial y el tiempo exponencial hay una maleza de problemas “medianamente fáciles” o “moderadamente difíciles” donde la factibilidad es más un asunto de experiencia.

Por ejemplo, sumar dos números de n dígitos requiere a lo más $2n$ sumas de números de un dígito, incluyendo “lo que se lleva”, de manera que el tiempo que toma la solución está acotado por un múltiplo constante (a saber, 2) de la primera potencia de n ; la multiplicación larga de dos números n requiere alrededor de n^2 multiplicaciones de números de un dígito y no más de $2n^2$ sumas, o $3n^2$ operaciones con dígitos, de manera que la cota llega ahora sólo a la segunda potencia de n . Estos problemas son, por lo tanto, “fáciles” (aunque un estudiante de primaria discreparía seguramente). En contraste con los ejemplos anteriores, considérese el problema del comerciante ambu-

lante: encontrar la ruta mínima que lleva a un comerciante por un conjunto dado de ciudades. Si hay n ciudades entonces el número de rutas que tenemos que considerar es $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, que crece más rápido que cualquier potencia de n . Así que la numeración caso por caso es ineficiente más allá de toda esperanza.

Irónicamente, el gran problema de la teoría de la complejidad algorítmica es demostrar que en efecto el tema existe, es decir, demostrar que algún problema “interesante” es en efecto difícil. ¡El problema radica en que es fácil demostrar que un problema es fácil pero difícil demostrar que es difícil! Para mostrar que un problema es fácil, sólo hay que exhibir un algoritmo que lo resuelva en tiempo polinomial, no tiene que ser el mejor ni el más ingenioso: cualquiera servirá. Sin embargo, para demostrar que un problema es difícil no basta con exhibir algún algoritmo cuyo tiempo de ejecución sea no polinomial, ya que puede haberse escogido el algoritmo equivocado y que haya uno mejor cuyo tiempo de ejecución sí sea polinomial. Para eliminar esa posibilidad, hay que encontrar algún modo matemático de considerar todos los algoritmos posibles para el problema y mostrar que ninguno de ellos tiene tiempo de ejecución polinomial, lo cual es extremadamente difícil.

Hay muchos candidatos a problemas difíciles: el problema del comerciante ambulante, el problema de la alacena (¿cómo puede acomodarse mejor un conjunto de objetos de dimensiones dadas en un conjunto de anaqueles de dimensiones dadas?) y el problema de la mochila (dada una mochila de dimensiones fijas y muchos objetos, ¿hay algún conjunto de objetos que llene exactamente la mochila?). Hasta ahora nadie ha conseguido demostrar que alguno de ellos sea difícil. Sin embargo, Stephen Cook, de la Universidad de Toronto, mostró en 1971 que si se puede demostrar que cualquier problema de este grupo de candidatos es en efecto difícil, entonces todos lo son; es decir, se puede “cifrar” cualquiera de ellos para que sea un caso especial de uno de los otros: o todos tienen éxito o todos fallan. Estos problemas se llaman *NP-completos*, donde NP quiere decir no polinomial. Todo mundo cree que los problemas NP-completos realmente son difíciles, pero esto nunca ha sido demostrado.

La completividad polinomial se relaciona con el problema de Steiner gracias a que Ronald Graham, Michael Garey y David Johnson han demostrado que el problema de computar la longitud de Steiner es NP-completo. Es decir, cualquier algoritmo eficiente para encontrar la longitud de Steiner precisa para cualquier conjunto de pueblos conduciría automáticamente a soluciones eficientes de todo tipo de problemas de cómputo de los que generalmente se cree que no poseen tales soluciones.

La conjetura de la razón de Steiner (7) es entonces importante, pues demuestra que podemos reemplazar un problema difícil por uno fácil sin perder mucho. Gilbert y Pollak tenían demasiada evidencia positiva cuando enun-

ciaron esta conjetura. Específicamente, podían demostrar una afirmación un poco más débil: la razón entre la longitud de Steiner y la longitud generadora es siempre al menos 0.5. Para 1990 varias personas habían llevado a cabo cálculos heroicos para verificar por completo la conjetura para redes de 4, 5 y 6 pueblos; para arreglos generales de tantos pueblos como se quiera, elevaron los límites de dicha razón de 0.5 a 0.57, 0.74 y 0.8. Alrededor de 1990 Graham y Fang Chung la elevaron a 0.824, mediante un cómputo que describieron como “realmente horrible —estaba claro que no se trataba del enfoque adecuado—”.

Para hacer posible el progreso ulterior, tenían que simplificarse los cálculos “horribles”. Du y Hwang encontraron una vía mucho mejor: eliminar por completo los cálculos engorrosos. La cuestión básica es cómo hacer que aparezcan triángulos equiláteros en escena. Hay un gran salto desde el ejemplo del triángulo en la Figura 295, que marca la cota de la razón entre la longitud de Steiner y la longitud generadora, a un sistema general de pueblos, que se supone que tiene que respetar la misma cota. ¿Cómo remontar ese vacío? Hay una especie de punto de apoyo intermedio. Imaginemos el plano teselado con triángulos equiláteros idénticos, formando una celosía triangular (Figura 298). Colóquense pueblos sólo en los vértices de las piezas de la teselación. Resulta que los únicos puntos de Steiner que necesitan ser considerados son los centros de las piezas. En pocas palabras, se tiene mucho control, no sólo en los cómputos sino en los análisis teóricos.

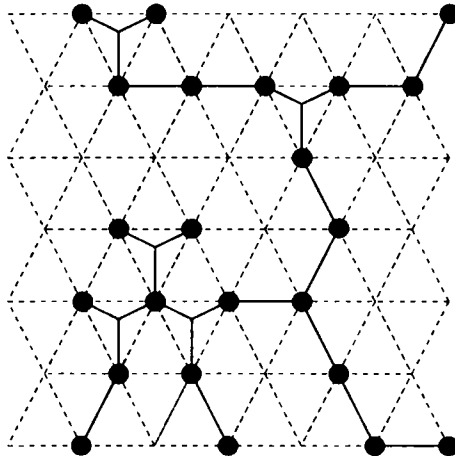


FIGURA 298. Una red de Steiner para pueblos que están en los vértices de una celosía triangular tiene una estructura mucho más rígida y regular que el caso general. Du y Hwang reducen la conjetura de la razón de Steiner al mismo problema para redes sobre celosías.

Por supuesto que no todo conjunto de pueblos se acomoda de manera conveniente a una celosía triangular; la creatividad de Du y Hwang consistió en darse cuenta de que los cruciales sí lo hacen. Otra vez la demostración es indirecta, por contradicción. Supóngase que la conjetura es falsa, entonces debe existir un contraejemplo: algún conjunto de pueblos para el cual la razón sea menor que $\sqrt{3}/2$. Du y Hwang muestran que si existe un contraejemplo a la conjetura debe ser uno para el que todos los pueblos queden en una celosía triangular, lo que introduce un elemento de regularidad en el problema, y a partir de ahí es relativamente sencillo completar la demostración.

Para demostrar esta propiedad de las celosías, Du y Wang reformulan la conjetura como un problema en la teoría de juegos, donde los jugadores compiten tratando de limitar las ganancias de sus oponentes. La teoría de juegos fue inventada por John von Neumann y Oskar Morgenstern en su obra clásica, *Theory of Games and Economic Behavior*, de 1947. En la versión de Du y Hwang de la conjetura de la razón de Steiner un jugador selecciona la “forma” general del árbol de Steiner y otro escoge el árbol más corto que pueda encontrarse con esa forma. Du y Hwang deducen la existencia de una celosía que sirve de contraejemplo observando que la ganancia de su juego tiene una propiedad especial de “convexidad”.

§11. PELÍCULAS DE JABÓN Y SUPERFICIES MÍNIMAS

[véase página 425]

En el capítulo VII, §11, se menciona varias veces la observación de que cuando tres películas de jabón se interceptan parecen formar ángulos de 120° , relacionando este fenómeno con el problema de Steiner (página 393). Se da un fenómeno similar cuando cuatro superficies de película de jabón se interceptan en un punto común, como sucede en la Figura 240, página 426: experimentalmente, el ángulo formado en la esquina de cada superficie es cercano a 109° , siendo éste el valor del ángulo formado por cuatro planos que se interceptan en el centroide de un tetraedro, como en la Figura 299; de paso, esto implica que el pequeño “cuadrado” central de la Figura 240 no es de hecho un cuadrado, lo que explica por qué las trece superficies en el armazón cúbico están ligeramente curvadas.

Estas reglas generales acerca de ángulos fueron registradas por primera vez por Plateau, quien estableció tres principios acerca de la forma que adquieren las películas de jabón en armazones:

1) Constan de un número finito de superficies planas o suavemente curvadas, unidas entre sí de manera fluida.

2) Esas superficies se interceptan sólo de dos maneras: o exactamente tres

de ellas se interceptan a lo largo de una curva suave, o cuatro se interceptan en un punto.

3) Cuando tres superficies se interceptan, los ángulos entre ellas son de 120° ; y cuando se interceptan cuatro, los ángulos que se forman en las esquinas son aproximadamente de 109° .

En 1976, Frederick Almgren y Jean Taylor demostraron que estas tres propiedades surgen todas de un mismo principio matemático, sobre el que se fundamenta lo expuesto en §11 del capítulo VII: la película de jabón toma cualquier forma que minimice el área total. Tal vez sorprenda saber que, de los principios de Plateau, el más difícil de establecer es el primero, de carácter más cualitativo: que la figura consta de un número finito de superficies. Los otros dos principios se siguen de una manera relativamente fácil de argumentos geométricos, exactamente igual que el ángulo de 120° en el problema de Steiner. Primero explicamos esta deducción y después discutimos la demostración del primer principio de Plateau.

El paso inicial en la deducción de los principios segundo y tercero a partir del primero consiste en utilizar el hecho de que las superficies son casi planas para reducir el problema a uno acerca de planos. Si se aumenta una región muy pequeña cerca de una línea de intersección de tres superficies o de un punto de intersección de cuatro, las superficies aparecen casi planas, y entre mayor sea la amplificación, más planas parecen ser. Considerando el grado de error que implica tal aproximación, resulta ser suficiente demostrar los principios segundo y tercero de Plateau bajo la suposición simplificadora de que las superficies son planas. El segundo paso es reducir esta cuestión a una referente a líneas sobre una esfera. Considérese la forma en que las regiones planas se intersecan con una esfera con centro en la línea o punto de intersección. El sistema de planos es entonces reemplazado por un sistema de arcos de

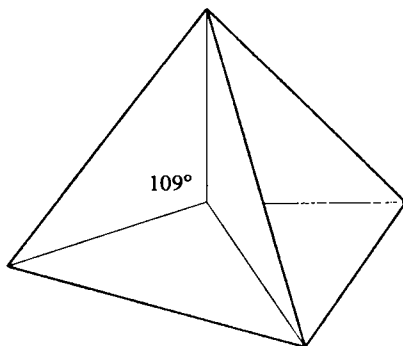


FIGURA 299. Superficie mínima en un armazón con forma de tetraedro: cuatro superficies se interceptan en el punto central, formando ángulos de 109° .

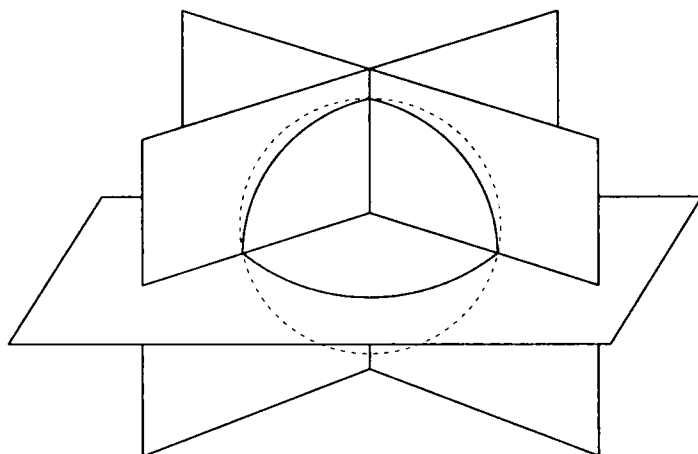


FIGURA 300. *La reducción de la geometría de un sistema de planos a la de un sistema de arcos.*

círculos máximos (véase Figura 300). El requerimiento análogo al de área mínima es que la longitud total de estos arcos debe ser mínima. Por una versión esférica del teorema de Steiner (página 393), demostrada de manera similar, los arcos se interceptan de tres en tres, en ángulos de 120° . El tercer paso es demostrar que precisamente diez configuraciones diferentes de arcos de círculos máximos satisfacen estas condiciones (Figura 301). El cuarto paso es tomar cada una de tales configuraciones y realizar una búsqueda de pequeñas deformaciones de la configuración correspondiente de superficies planas —posiblemente introduciendo nuevas piezas— que reduzcan el área total dentro de la esfera. Si cualquiera de esas reducciones de área es posible, la configuración correspondiente de arcos puede eliminarse: no corresponde a un arreglo de superficies de área mínima. (En la práctica, varios de estos casos fueron estudiados haciendo los armazones de alambre correspondientes y observando las formas que tomaba la película de jabón para deducir la forma general de la pequeña deformación que ocurría. Entonces la posibilidad de reducir el área se establecía de manera rigurosa haciendo estimaciones adecuadas.) Exactamente tres configuraciones sobrevivieron a este proceso: un solo círculo máximo, tres semicírculos que se interceptan en ángulos de 120° y cuatro arcos que forman un tetraedro curvilíneo —números 1 a 3 en la Figura 301—. Las configuraciones planas correspondientes son una sola superficie que no intercepta a ninguna otra, tres superficies que se interceptan en ángulos de 120° o cuatro superficies que se interceptan en ángulos de 109° . Los principios segundo y tercero de Plateau son inmediatos.

Todo depende así de demostrar que la forma mínima consta de un número

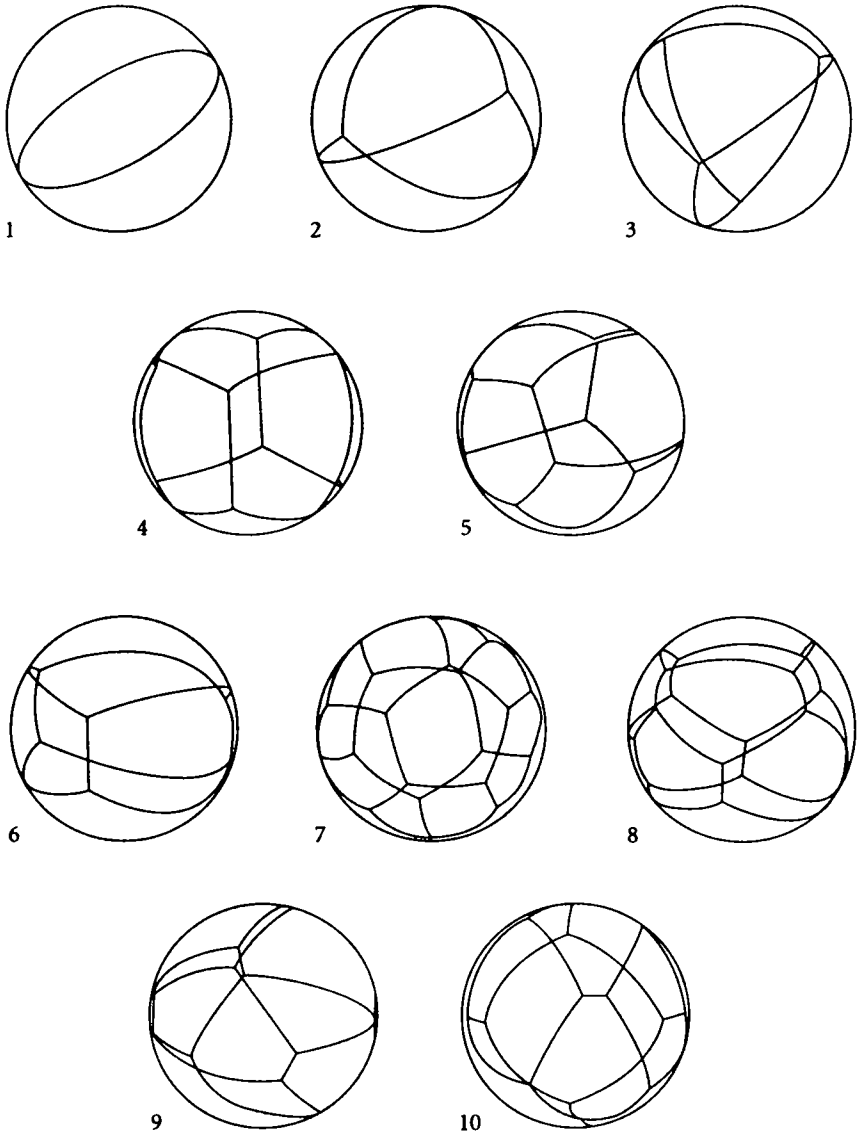


FIGURA 301. Las diez configuraciones de arcos que se encuentran en ángulos de 120° .
 FUENTE: Scientific American 235, núm. 1 (julio de 1976), pp. 90-91.

finito de muchas superficies, para lograrlo, es necesario pensar en la posibilidad de que existan formas más complejas, y esto a su vez requiere la generalización del concepto de área para estas formas más complejas. El problema entonces se divide en dos etapas separadas: primera, demostrar la existencia de alguna forma compleja que minimice esta área generalizada, y segunda, usar la propiedad de minimalidad para mostrar que la forma compleja en realidad es bastante simple, y que está compuesta por un número finito de muchas superficies suaves.

Las técnicas para hacer que estas dos etapas funcionen son nuevas y abstractas; pertenecen a un área conocida como “teoría geométrica de la medida” —la misma área a la que pertenece la definición de dimensión fractal—. A grandes rasgos, cualquier superficie particular S es reemplazada por una “medida” asociada, una función que asigna a cualquier región X del espacio el área de aquella parte de S que queda dentro de X . Formas más complejas son representadas por funciones con propiedades similares a estas medidas basadas en superficies. La ventaja de reemplazar formas por medidas es que las medidas tienen propiedades mucho más agradables: por ejemplo, pueden sumarse o definirse como el límite de sucesiones de otras medidas, operaciones difíciles de definir directamente para formas geométricas.

La existencia de una medida que minimiza resulta ser entonces un argumento directo en la teoría geométrica de la medida. La parte más difícil del argumento es mostrar que toda medida que minimiza corresponde a un sistema finito de superficies suaves. Irónicamente, el conocimiento acerca de cómo se unirían estas superficies si realmente fueran tales —los principios segundo y tercero de Plateau— ayudaron a Almgren y Taylor a idear cómo demostrar que en efecto son superficies. Sabiendo de antemano cuál “debería ser” la respuesta, con frecuencia hace más fácil encontrar una demostración.

§12. ANÁLISIS NO ESTÁNDAR

[véase página 474]

En la página 476 Courant y Robbins subrayan que “las ‘diferenciales’ como cantidades infinitamente pequeñas están ahora descartadas definitiva y deshonrosamente”: una reflexión precisa del punto de vista que se tenía por consenso cuando se escribió *¿Qué son las matemáticas?* A pesar del veredicto de Courant y Robbins, siempre ha habido algo intuitivo y llamativo en los argumentos a la antigua con infinitesimales. Están aún sumergidos en nuestro lenguaje en ideas tales como “instantes” de tiempo, velocidades “instantáneas” y el considerar a una curva como una serie de líneas rectas infinitamente pequeñas y al área acotada por una curva como suma de una cantidad infinita

de áreas de rectángulos infinitesimales. Este tipo de intuición resulta estar justificado, pues se ha descubierto recientemente que el concepto de cantidades infinitamente pequeñas no es deshonesto y no tiene por qué ser descartado. Es posible establecer un marco riguroso para el análisis en el que las definiciones weierstrassianas en términos de ϵ y δ (véase página 341) sean reemplazadas por enunciados sobre infinitesimales, que son increíblemente similares a las ideas intuitivas de Leibniz, Newton y Cauchy.

La manera de volver respetables a los infinitesimales se llama análisis no estándar y es perfectamente viable como una alternativa al enfoque en términos de ϵ y δ , pero por varias razones —sólo una de las cuales es el conservadurismo científico— la mayoría de los matemáticos aún prefieren el punto de vista de Weierstrass. El gran problema psicológico es que para establecer tal marco se requieren ideas sofisticadas de la lógica matemática moderna. Más o menos de 1920 a 1950 hubo un desarrollo explosivo de la lógica matemática en el que uno de los temas que surgieron fue la *teoría de modelos*, que construye y caracteriza *modelos* de sistemas de axiomas: estructuras matemáticas que obedecen esos axiomas; así, el plano coordenado es un modelo para los axiomas de la geometría euclidiana, el disco de Poincaré (página 258) es un modelo para los axiomas de la geometría hiperbólica, y así sucesivamente.

Hay un sistema de axiomas estándar para los números reales, y se sabe desde hace mucho que hay un modelo único, los números reales estándares R , razón por la cual diferentes maneras de construir “los” números reales (véanse páginas 94-95) conducen a sistemas de números que son efectivamente idénticos. Además, R no contiene ningún infinitesimal ni ningún infinito. Así que, ¿cómo es posible aplicar la teoría de modelos para construir un sistema de números reales “no estándar” que sí contenga estos objetos extraños? Los lógicos distinguen entre sistemas axiomáticos de “primer orden” y de “segundo orden”. En una teoría de primer orden los axiomas expresan propiedades que se requiere que cumplan todos los objetos en el sistema, pero no todos los *conjuntos* de objetos. En una teoría de segundo orden no hay tal restricción. En la aritmética ordinaria, un enunciado tal como

$$x + y = y + x \quad \text{para todo } x \text{ y } y \quad (8)$$

es de primer orden, y así lo son todas las leyes comunes del álgebra; sin embargo, el “axioma arquimediano”

$$\text{si } |x| < \frac{1}{n} \text{ para todos los números naturales } n \text{ entonces } x = 0 \quad (9)$$

es de segundo orden. La mayoría de los axiomas comunes para los números reales son de primer orden, pero la lista incluye algunos que son de segundo

orden. De hecho, el axioma de segundo orden (9) es el crucial que excluye de R tanto a los infinitesimales como a los infinitos. No obstante, resulta que si se debilitan los axiomas de manera que consten sólo de las propiedades de primer orden de R entonces existen otros modelos, incluyendo algunos que violan la propiedad (9) anterior. Sea R^* un modelo tal y llamémoslo el sistema de los números hiperreales. Esta idea, la base del análisis no estándar, fue descubierta por Abraham Robinson alrededor de 1960. Ya hemos visto que hay geometrías no euclidianas y teorías de conjuntos no cantorianas, ahora encontramos que hay sistemas de números no arquimedianos.

El conjunto R^* contiene varios subconjuntos importantes: hay un conjunto de números naturales “estándares”, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, y hay también un sistema más amplio de números naturales “no estándares” N^* ; están los enteros estándares Z y una extensión correspondiente a los enteros no estándares Z^* ; están los racionales estándares Q y una extensión correspondiente a los racionales no estándares Q^* ; hay reales estándares R y reales no estándares (o hiperreales) R^* .

Toda propiedad de primer orden de R tiene una única extensión natural a R^* . Sin embargo, (9) expresa una propiedad de segundo orden, y ésta es falsa en R^* . Los hiperreales contienen infinitos e infinitesimales verdaderos. Por ejemplo, $x \in R^*$ es infinitesimal si y sólo si $x \neq 0$ y $|x| < 1/n$ para todo $n \in N$.[†] El argumento usual de que “los infinitesimales no existen” demuestra en realidad que los infinitesimales *reales* no existen, es decir, que los infinitesimales en R^* no pertenecen a R . Pero eso es completamente razonable, ya que R^* es más grande que R . Dicho sea de paso, el análogo “correcto” de (9) en R^* es

$$\text{si } |x| < \frac{1}{n} \text{ para toda } n \in N^* \text{ entonces } x = 0, \quad (10)$$

y éste es verdadero. Así que cambiar (9) para referirnos a los números naturales no estándares en vez de a los estándares hace una gran diferencia.

La extensión de reales a hiperreales es sólo un ejemplo más del antiguo juego de extender el sistema de números para que se cumpla una propiedad deseada (véanse páginas 77 a 118). Por ejemplo, los números racionales fueron extendidos a los reales para permitir que 2 tenga una raíz cuadrada, y los números reales fueron extendidos a los números complejos para permitir que -1 tenga una raíz cuadrada. Entonces, ¿por qué no extender los números reales a los números hiperreales para permitir que existan los infinitesimales?

Podemos usar R^* para demostrar teoremas acerca de R , ya que los sistemas de números R y R^* son indistinguibles en lo que se refiere a sus propiedades de

[†] Vale la pena hacer notar que el autor de esta sección presenta un modelo R^* de números hiperreales en el que el cero no es un infinitesimal. [N. T.; N. E.]

primer orden. Sin embargo, R^* tiene todo tipo de rasgos distintivos nuevos, como la presencia de infinitesimales e infinitos, que pueden explotarse de maneras novedosas. Estos nuevos rasgos distintivos son propiedades de segundo orden, y es por eso que los nuevos sistemas pueden tenerlas aunque los viejos no. Observaciones similares se aplican a los subsistemas N y N^* , Z y Z^* y Q y Q^* .

Unas pocas definiciones darán el sabor de este enfoque. Un número hiperreal es *finito* si [su valor absoluto] es menor que algún real estándar; es *infinitesimal* si [su valor absoluto] es menor que todos los reales estándares positivos. Algo que no sea finito es *infinito*, y algo que no esté en R es *no estándar*. Si x es infinitesimal entonces $1/x$ es infinito, y viceversa.

Nada de esto sería de gran importancia si todo lo que pudiera hacerse fuese inventar un nuevo sistema de números. Sin embargo, aunque R y R^* son diferentes, están íntimamente relacionados. De hecho, todo hiperreal finito x tiene una *parte estándar* única $\text{std}(x)$ que está infinitamente cercana a x , es decir, $x - \text{std}(x)$ es infinitesimal. En otras palabras, cada hiperreal finito tiene una expresión única como “real estándar más infinitesimal”. Es como si cada real estándar estuviera rodeado por una nube de hiperreales infinitamente cercanos, con frecuencia llamada su *halo*. Cada uno de tales halos rodea a un único real, que por alguna oscura razón se suele llamar su *sombra*, aunque una palabra como “núcleo” o “centro” transmitiría mejor la imagen de lo que se quiere decir. Usando la parte estándar podemos transferir propiedades de R^* a R o viceversa.

Para ver cómo difieren las demostraciones en el análisis no estándar de sus contrapartes estándares, considérese el cálculo de Leibniz de la derivada de la función $y = f(x) = x^2$. Lo que él hace es tomar un número pequeño Δx y formar la razón $[f(x + \Delta x) - f(x)]/\Delta x$. (El acercamiento de Newton fue básicamente el mismo, excepto que usó el símbolo o en lugar de Δx). Siguiendo a Leibniz, calculemos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= 2x + \Delta x. \end{aligned}$$

Leibniz arguyó que como Δx es infinitesimal, puede ignorarse, dejando sólo $2x$. Sin embargo, Δx debe ser distinto de cero para que $[f(x + \Delta x) - f(x)]/\Delta x$ tenga sentido, y en tal caso $2x + \Delta x$ no es igual a $2x$. Fue esta dificultad la que llevó al obispo George Berkeley a escribir su famosa crítica *The Analyst, Or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* [1734], en la que señaló algunas inconsistencias lógicas en los fundamentos del cálculo.

Weierstrass superó las objeciones de Berkeley añadiendo un paso final: tomar el *límite* cuando Δx tiende a cero. (Tanto Leibniz como Newton habían expresado ideas similares, pero no con la misma claridad cristalina que en términos de las ϵ y δ de Weierstrass.) Como valores de Δx distintos de cero pueden tender a cero, podemos suponer que todos los valores de Δx que aparecen durante el cálculo son distintos de cero, de manera que dividir entre Δx tenga sentido. Entonces tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ para deshacernos del embarazoso término adicional Δx y dejar la respuesta requerida $2x$.

En el análisis no estándar hay una manera más sencilla: tómesese x finito y estándar (es decir, sea $x \in R$) y supóngase que Δx es un infinitesimal genuino. En lugar de $2x + \Delta x$ tómesese su parte estándar $\text{std}(2x + \Delta x)$, que es $2x$. En otras palabras, defínase la derivada de $f(x)$ como

$$\text{std} \left\{ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right\},$$

donde x es un real estándar y Δx cualquier infinitesimal.[†] La idea aparentemente inocente de tomar la parte estándar es exactamente lo que se necesita para hacer que la derivada sea una función real de x en vez de una función hiperreal de x y Δx , lo cual es una manera perfectamente rigurosa de quitar el término Δx , pues $\text{std}(x)$ es un real definido de manera única. En lugar de barrer abajo del tapete al Δx adicional con tantos argumentos especiosos, es elegantemente borrado.

Un curso de análisis no estándar parece un prolongado alarde de exactamente aquellos errores en los que Courant y Robbins gastaron tantas páginas enseñándonos a evitar. Por ejemplo:

1. Una sucesión s_n converge a un límite L si $s_\omega - L$ es infinitesimal para todo infinito ω . (Compárese con la página 327.)

2. Una función f es continua en x si $f(x + \epsilon)$ está infinitamente cercano a $f(x)$ (es decir, $f(x + \epsilon) - f(x)$ es infinitesimal) para todo infinitesimal ϵ . (Compárese con la página 347.)

3. La función f tiene derivada d en x si y sólo si $[f(x + \Delta x) - f(x)]/\Delta x$ está infinitamente cercano a d para todos los infinitesimales Δx . (Compárese con la página 456.)

[†] Véase la nota de la página 565.

4. El área de una región limitada por una curva es una suma de una infinidad de rectángulos infinitesimales. (Compárese con la página 443.)

Sin embargo, en el marco del análisis no estándar estos enunciados pueden dotarse de un sentido riguroso.

De hecho, el análisis no estándar no conduce a ninguna conclusión acerca de R que difiera del análisis estándar. Es fácil concluir de ahí que no tiene sentido usar el enfoque no estándar, ya que “no conduce a nada nuevo”. Pero esta crítica no es concluyente, la pregunta no es: “¿da los mismos resultados?” sino más bien: “¿es una manera más sencilla o más natural de obtener esos resultados?” Como Newton mostró en su *Principia*, todo lo que puede demostrarse con cálculo puede también demostrarse con geometría clásica, lo cual no implica de manera alguna que el cálculo no sirva, y lo mismo vale para el análisis no estándar.

La experiencia sugiere que las demostraciones por medio del análisis no estándar son generalmente más cortas y más directas que las demostraciones clásicas en términos de ϵ y δ , lo cual se debe a que evitan estimaciones complicadas de los tamaños de las cosas, estimaciones que constituyen el grueso de una demostración clásica. El obstáculo principal para la adopción generalizada del análisis no estándar es que para saber apreciarlo se requiere una formación que incluya conocimientos de lógica matemática —muy diferente del análisis tradicional—.

BIBLIOGRAFÍA

REFERENCIAS GENERALES

- W. AHRENS: *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, 2.ª edición, 2 vols. Leipzig: Teubner, 1910.
- W. W. ROUSE BALL: *Mathematical Recreations and Essays*, 11.ª edición, revisada por H. S. M. Coxeter. Nueva York: Macmillan, 1939.
- E. T. BELL: *Historia de las matemáticas*. México. Fondo de Cultura Económica, 1949.
- *Los grandes matemáticos. Desde Zenón a Poincaré. Su vida y sus obras*. Buenos Aires. Losada, 1948.
- T. DANTZIG: *Aspects of Science*. Nueva York: Macmillan, 1937.
- A. DRESDEN: *An Invitation to Mathematics*. Nueva York: Holt, 1936.
- F. ENRIQUES: *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, 3.ª edición, 2 vols. Bolonia: Zanichelli, 1924 y 1926.
- E. KASNER y J. NEWMAN: *Mathematics and the Imagination*. Nueva York: Simon and Schuster, 1940.
- F. KLEIN: *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, traducida por E. R. Hedrick y C. A. Noble, 2 vols. Nueva York: Macmillan, 1932 y 1939.
- M. KRAITCHIK: *La Mathématique des Jeux*. Bruselas: Stevens, 1930.
- O. NEUGEBAUER: *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*. Volumen I: *Vorgriechische Mathematik*. Berlín: Springer, 1934.
- H. POINCARÉ: *The Foundations of Science*. Lancaster, Pa.: Science Press, 1913.
- H. RADEMACHER y O. TOEPLITZ: *Von Zahlen und Figuren*, 2.ª edición. Berlín: Springer, 1933.
- B. RUSSELL: *Introducción a la filosofía matemática* (en *Obras escogidas* de B. R.). Madrid. Aguilar, 1956.
- *Los principios de la matemática*. Buenos Aires. Espasa-Calpe, 1948.
- D. E. SMITH: *A Source Book in Mathematics*. Nueva York: McGraw-Hill, 1929.
- H. STEINHAUS: *Mathematical Snapshots*. Nueva York: Stechert, 1938.
- H. WEYL: «The Mathematical Way of Thinking», *Science*, XCII (1940), págs. 437 y sgs.
- *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, Handbuch der Philosophie, Bd. II, Munich: Oldenbourg, 1926, páginas 3-162.

CAPÍTULO I

- L. E. DICKSON: *Introduction to the Theory of Numbers*. Chicago: University of Chicago Press, 1931.
- *Modern Elementary Theory of Numbers*. Chicago: University of Chicago Press, 1939.
- G. H. HARDY: «An Introduction to the Theory of Numbers», *Bulletin of the American Mathematical Society*, XXXV (1929), págs. 789 y sgs.
- G. H. HARDY y E. M. WRIGHT: *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford: Clarendon Press, 1938.
- J. V. USPENSKY y M. H. HEASLET: *Elementary Number Theory*. Nueva York: McGraw-Hill, 1959.

CAPÍTULO II

- G. BIRKHOFF y S. MACLANE: *Álgebra moderna*. Barcelona. Teide, 1954.
- M. BLACK: *The Nature of Mathematics*. Nueva York: Harcourt, Brace, 1935.
- T. DANTZIG: *Number, the Language of Science*, 3.ª edición. Nueva York: Macmillan, 1939.
- G. H. HARDY: *A Course of Pure Mathe-*

- matics*, 7.ª edición. Cambridge: University Press, 1938.
- K. KNOPP: *Theory and Application of Infinite Series*, traducción de Miss R. C. Young. Londres: Blackie, 1928.
- A. TARSKI: *Introduction to Logic*. Nueva York: Oxford University Press, 1939.
- F. ENRIQUES: *Para la historia de la lógica*. Buenos Aires. Espasa-Calpe, 1953.

CAPÍTULO III

- J. L. COOLIDGE: *A History of Geometrical Methods*. Oxford: Clarendon Press, 1940.
- A. DE MORGAN: *A Budget of Paradoxes*, 2 vols. Chicago: Open Court, 1915.
- L. E. DICKSON: *New First Course in the Theory of Equations*. Nueva York: Wiley, 1939.
- F. ENRIQUES (director de la edición): *Fragen der Elementargeometrie*, 2.ª edición, 2 vols. Leipzig: Teubner, 1923.
- E. W. HOBSON: «*Squaring the Circle*», *a History of the Problem*. Cambridge: University Press, 1913.
- A. B. KEMPE: *How to Draw a Straight Line*. Londres: Macmillan, 1877.
- F. KLEIN: *Famous Problems of Geometry*, traducido por W. W. Beman y D. E. Smith, 2.ª edición. Nueva York: Stechert, 1930.
- L. MASCHERONI: *La geometría del compás*. Palermo: Reber, 1901.
- G. MOHR: *Euclides Danicus*. Copenhague: Holst, 1928.
- J. M. THOMAS: *Theory of Equations*. Nueva York: MacGraw-Hill, 1938.
- L. WEISNER: *Introduction to the Theory of Equations*. Nueva York: Wiley, 1939.

CAPÍTULO IV

- W. C. GRAUSTEIN: *Introduction to Higher Geometry*. Nueva York: Macmillan, 1930.
- D. HILBERT: *Fundamentos de la geometría*. Madrid. C. S. I. C., 1952.
- C. W. O'HARA y D. R. WARD: *An Introduction to Projective Geometry*. Oxford: Clarendon Press, 1937.
- G. DE B. ROBINSON: *The Foundations of Geometry*. Toronto: University of Toronto Press, 1940.
- GIROLAMO SACCHERI: *Euclides ab omni naevo vindicatus*, traducido por G. B. Halsted. Chicago: Open Court, 1920.
- R. G. SANGER: *Synthetic Projective Geometry*. Nueva York: McGraw-Hill, 1939.
- O. VEULEN y J. W. YOUNG: *Projective Geometry*, 2 vols. Boston: Ginn, 1910 y 1918.
- J. W. YOUNG: *Projective Geometry*. Chicago: Open Court, 1930.

CAPÍTULO V

- P. ALEXANDROFF: *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*. Berlín: Springer, 1932.
- D. HILBERT y S. COHN-VOSSEN: *Anschauliche Geometrie*. Berlín: Springer, 1932.
- M. H. A. NEWMAN: *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*. Cambridge: University Press, 1939.
- H. SEIFERT y W. THRELFALL: *Lehrbuch der Topologie*. Leipzig: Teubner, 1934.

CAPÍTULO VI

- R. COURANT: *Differential and Integral Calculus*, traducido por E. J. McShane, edición revisada, 2 vols. Nueva York: Nordemann, 1940.

- G. H. HARDY: *A Course of Pure Mathematics*, 7.ª edición. Cambridge: University Press, 1938.
- W. L. FERRAR: *A Text-book of Convergence*. Oxford: Clarendon Press, 1938.
- Para la teoría de las fracciones continuas, véase:
- S. BARNARD y J. M. CHILD: *Advanced Algebra*. Londres: Macmillan, 1939.

CAPÍTULO VII

- R. COURANT: Soap Film Experiments with Minimal Surfaces», *American Mathematical Monthly*, XLVII (1940), págs. 167 - 74.
- J. PLATEAU: «Sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur», *Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, nouvelle série, XXIII (1949) — *Statique expérimentale et théorique des Liquides*. Paris: 1873.

CAPÍTULO VIII

- C. B. BOYER: *The Concepts of the Calculus*. Nueva York: Columbia University Press, 1939.
- R. COURANT: *Differential and Integral Calculus*, traducido por E. J. McShane, edición revisada, 2 vols. Nueva York: Nordemann, 1940.
- G. H. HARDY: *A Course of Pure Mathematics*, 7.ª edición. Cambridge: University Press, 1938.

ÍNDICE ALFABÉTICO

ÍNDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

- Aceleración, 434.
Adición:
 de conjuntos, 120.
 de números naturales, 8-10.
 de números racionales, 61.
 de números reales, 79.
Adjunción de Irracionales, 144.
Agotamiento, método de, 410.
Algebra:
 de Boole, 124.
 de los conjuntos, 118-26.
 de los cuerpos numéricos, 127-52.
 teorema fundamental del, 110-12, 281-83.
Algebraicos, números, 112, 113.
Algoritmo:
 de Euclides, 50-59.
 definición, 51.
Amortiguadas, vibraciones, 469.
Analítica, geometría, 81-85, 203-09, 498-504.
 de n dimensiones, 240-42.
Antecedente, punto, en la representación, 153.
Apolonio, problema de, 127, 136-38, 173, 174.
Area, 509-11, 474.
Argumento de un número complejo, 103.
Aritmética:
 leyes, 8-11.
 media, 371-74.
 números primos en, 33, 34.
 progresión, 19, 20, 497, 498.
 teorema fundamental, 30, 54, 55.
Armónica:
 razón doble, 187.
 serie, 490.
Armónico, conjugado, 187.
Arquímedes, trisección del ángulo, 150.
Asíntotas de la hipérbola, 84.
Asintóticamente igual, 36.
Asociativa, ley:
 en los conjuntos, 120.
 en los números naturales, 9.
 en los números racionales, 62.
Axiomática, 226-30.
Binomio de Newton, 23-25.
Biúnívoca, correspondencia, 86.
Bolzano, teorema de, 323, 324.
 aplicaciones, 328-32.
Boole, álgebras de, 124.
Braquistocrona, problema de la, 389, 390, 393, 394.
Brianchon, teorema de, 202, 203. 221-24.
Cálculo:
 de variaciones, 389-95.
 infinitesimal, 408-96, 513-20.
 teorema fundamental, 445-49.
Cantor:
 conjunto de, 261.
 números cardinales, de, 92-95.
 teoría de los conjuntos infinitos, 86-95
Característica de Euler, 248-53, 270, 274.
Cartesianas, coordenadas, 81-83.
Centro de la circunferencia, construcción con compás, 158.
Cicloides, 164-67, 390.
Ciclotómica, ecuación, 109.
Cinco colores, teorema de los, 276-79.
Circunferencia, ecuación de la, 83.
Clasificación topológica de las superficies, 268-76.
Coaxiales, planos, 188.
Cociente diferencial, 444.
Cofia cruzada, 273.
Colineales, puntos, 182.
Combinatoria, geometría, 242-46.
Compacto, conjunto, 327.
Compás, construcciones sólo con, 157-63.
Compleja, variable, teoría de funciones de, 488, 489.
Complejos:
 conjugados, 102.
 números, 97-112.
 argumento, 103.
 módulo, 102.
 operaciones con, 99-110.
Complejos, números:
 representación trigonométrica, 104.
 valor absoluto, 102.
Complemento de un conjunto, 121.
Completo, cuadrilátero, 191, 192.
Compuestas, funciones, 293, 294.
Compuesto, interés, 467.
Compuestos, números, 29.

- Concurrentes, rectas, 182.
 Conexión, 255-57.
 Conexiones, 167-70.
 Congruencia de figuras geométricas, 177.
 Congruencias (en aritmética), 39-47.
 Cónicas, 210-24.
 definición métrica, 211, 504, 506.
 definición proyectiva, 215.
 ecuaciones de, 83-85.
 puntos, 216.
 rectas, 220.
 Conjugados:
 armónicos, 187.
 complejos, 102.
 Conjunto, 86.
 compacto, 327.
 complemento de un, 121.
 vacío, 26.
 Conjuntos:
 álgebra de los, 118-26.
 equivalencia de, 86.
 Conmutativa, ley:
 en los conjuntos, 120.
 en los números naturales, 9.
 en los números racionales, 62.
 Constante, 285.
 Construcciones geométricas, 127-76.
 con instrumentos diversos, 153-76.
 de cantidades racionales, 131-32.
 de cuerpos de números, 131-38.
 de Mascheroni, 159-62.
 de polígonos regulares, 133-36.
 de raíces cuadradas, 133.
 sólo con compás, 157-63.
 sólo con la regla, 163, 164, 209, 210.
 Constructiva, prueba, 95.
 Continua, variable, 286.
 Continuas, fracciones, 57-59, 312-14.
 Continuidad de una función:
 de una sola variable, 294-97, 321-23,
 338, 339, 432.
 de varias variables, 299.
 Continuo:
 hipótesis del, 97.
 numérico, 76.
 no-numerabilidad del, 87.
 Contorno, condiciones en los proble-
 mas de extremos, 386-89.
 Convergencia:
 de series, 482, 489.
 de sucesiones, 305.
 Coordenadas:
 en general, 204.
 homogéneas, 205-09.
 rectangulares (cartesianas), 81-83.
 Coplanarias, rectas, 188.
 Correspondencia:
 biunívoca, en los conjuntos, 86.
 continua en ambos sentidos, 254.
 proyectiva, 190, 216.
 Cortadura (en el campo de los números
 racionales), 80.
 Crecimiento, ley de, 467.
 Criba de Eratóstenes, 32.
 Cuadrantes, 82.
 Cuadrática, ecuación, 110, 101.
 Cuadráticos, restos, 46, 47.
 Cuadratura del círculo, 152.
 Cuádricas, superficies, 224-26.
 Cuadrilátero completo, 191, 192.
 Cuatro colores, problema de los, 258-60.
 Cuerpo, 64.
 ampliado, 140.
 Cuerpos numéricos:
 álgebra de los, 127-52.
 construcción geométrica de, 131-38.
 Curva, longitud de un arco de, 476-79.
 Curvas:
 de nivel, 298.
 ecuaciones de, 83-85.
 Curvatura media, 396.
 De Moivre, fórmula de, 105, 107-10.
 Decágono regular, construcción del, 133.
 Decimales:
 de infinitas cifras, 69-71.
 fracciones, 67-71.
 Dedekind, cortadura de, 80, 81.
 Deformaciones, 254.
 Delta (Δ), 412.
 Densidad de los números racionales, 66.
 Dependiente, variable, 287.
 Derivación, 427, 432, 437-43, 472-74.
 Derivada, 424-43.
 segunda, 435.
 Desargues, teorema de, 182-84, 199,
 200.
 Descomposición única en factores pri-
 mos, 30, 54, 55.
 Desigualdades, 10, 11, 22, 23, 65, 66,
 104, 333, 371-76, 511.
 Diádico, sistema, 16.
 Diferencial, cociente, 444.
 Diferenciales, 443-45.
 ecuaciones, 464-71.
 Dimensión, 260-64.
 Dinámica de Newton, 469-71.
 Diofánticas, ecuaciones, 57-59.
 Dirichlet, principio de, 377.
 Discontinuas, funciones, como límites
 de funciones continuas, 336, 337.

- Discontinuidad:
 de una función, 295-97.
 finita, 295.
- Distancia, 82, 327.
- Distancias extremales a una curva dada, 247-49.
- Distributiva, ley:
 en los conjuntos, 120.
 en los números naturales, 9.
 en los números racionales, 62.
- Divergencia:
 de series, 482.
 de sucesiones, 305.
- Domnio:
 de una variable, 285.
 simplemente conexo, 255.
- Dualidad, principio de:
 en el álgebra de los conjuntos, 122.
 en geometría, 203, 205-09, 221, 229.
- Duodecimal, sistema, 13, 14.
- Duplicación del cubo, 127, 146, 147, 158.
- e , número de Euler, 308-10.
 como base de los logaritmos naturales, 455.
 en forma de límite, 458-60.
 expresiones del, 309.
 irracionalidad del, 310, 314.
- École Polytechnique, 179.
- Ecuación:
 ciclotómica, 109.
 cuadrática, 100.
 de la circunferencia, 83.
 de la elipse, 84, 504.
 de la hipérbola, 84, 504.
 de la recta, 83, 500-02.
 de una curva, 83-85.
 diofántica, 57, 59.
 multiplicidad de raíces, 111.
 raíces, 110.
- Ecuaciones:
 algebraicas, 110-12- 281-83.
 del movimiento, 469-71.
- Ejes:
 de las cónicas, 83-85.
 en coordenadas cartesianas, 81.
- Elipse:
 ecuación de la, 84.
 propiedades de las tangentes a la, 344, 345.
- Elíptica, geometría, 237-39.
- Elípticos, puntos, 238.
- Empírica, inducción, 17.
- Entero, principio del menor, 26.
- Enteros:
 negativos, 63.
 positivos, 8-17.
- Epicicloide, 167.
- Equivalencia de conjuntos, 86.
- Eratóstenes, criba de, 32.
- Ergódico, movimiento, 363, 364.
- Erlanger, programa de, 170.
- Estacionarios, puntos, 352-56.
- Euclides, algoritmo de, 50-59.
- Euler:
 características de, 248-53, 270, 274.
 función φ de, 55-57.
- Excentricidad (en las cónicas), 84.
- Exclusión de la división por cero, 64, 100.
- Existencia:
 matemática, 97.
 pruebas de, 95, 376-83.
- Exponencial, función, 456, 457, 459, 460.
 ecuación diferencial de la, 464-67.
 orden de magnitud de la, 479, 480.
- Extracción geométrica de la raíz cuadrada, 133.
- Factorial de n , 25.
- Fermat:
 números de, 33, 129.
 principio de, 390-93.
 teorema de, 44-46, 57.
 último teorema de, 48-50.
- Focos de la cónica, 84.
- Formalismo, 97, 227.
- Fraciones:
 continuas, 57-59, 312-14.
 decimales, 69-71.
- Función:
 compuesta, 293, 294.
 continuidad de una, 294-97, 299, 338, 339.
 convexa, 510.
 de variable compleja, 489, 490.
 de varias variables, 297-300.
 definición, 286.
 gráfica, 290.
 inversa, 290-93.
 monótona, 292.
 primitiva, 448.
- Fundamentos de la matemática, 97
- Generalización, proceso de, 64.
- Género de una superficie, 268-70, 274.
- Geodésicas, 238.
 en una esfera, 394, 395.

- Geometría analítica, 81-85, 203-09, 498-504.
 axiomas en, 226-30.
 combinatoria, 242-46.
 de n dimensiones, 240-42.
 de Riemann, 237-39.
 elemental, problemas extremales de, 341-49.
 elíptica, 237-39.
 hiperbólica, 230-37.
 inversión, 153-58, 170-76.
 métrica, 181.
 no euclídea, 230-37.
 proyectiva, 177-226.
 sintética, 177.
 teoría de las construcciones en, 127-76, 209, 210.
 topología, 247-83.
- Geométrica:
 media, 371-74.
 progresión, 20, 21.
 serie, 74.
- Geométricas:
 construcciones, teoría de las, 127-76.
 transformaciones, 153, 177-79.
- Goldbach, conjetura de, 38.
- Gráfica de una función, 290.
- Griegos, tres clásicos problemas, 127, 146-52.
- Grupo, 180.
- Hart, inversor de, 169.
- Haz de rectas, 216.
- Heptágono regular, imposibilidad de su construcción, 151.
- Herón, teorema de, 341-43.
- Hexágono regular, construcción del, 134.
- Hipérbola:
 ecuación de la, 84.
 propiedades de las tangentes a la, 345-47.
- Hiperbólica, geometría, 230-37.
- Hiperbólicas, funciones, 514, 515.
- Hiperbólico, paraboloides, 298.
- Hiperbólicos, puntos, 238.
- Hiperboloide, 224-26.
- Hipocicloide, 166.
- Hipótesis del continuo, 97.
- Homogéneas, 205-09.
- Ideales, puntos, en geometría proyectiva, 192-97.
- Iluminación de mapas, 258-60, 276-79.
- Imagen, punto (de la representación), 153.
- Imaginarios, números (véase *Complejos, números*).
- Imposibilidad de los tres problemas griegos, 146-52.
 demostraciones de, 131-52.
- Incidencia, 181, 182.
- Inconmensurables, segmentos, 66-69.
- Indefinida, fracción continua, 313.
- Indefinidas, progresiones geométricas, 71-75.
- Independiente, variable, 287.
- Indirecta, prueba, 95, 96.
- Inducción:
 empírica, 17.
 matemática, 17-27.
- Infinitamente pequeños, 443-45.
- Infinitas, series, 482-87.
- Infinito, 65, 86-97.
 análisis del concepto matemático, 86-97.
 punto del (en la inversión), 154.
 puntos del (en geometría proyectiva), 192-97.
- Infinitos, productos, 311, 491-93.
- Infinitud:
 de los números primos, 29, 33, 34, 491.
 órdenes de, 479-82.
- Integral, 409-24, 474, 475, 515-20.
- Interés compuesto, 467.
- Intersección de conjuntos, 120.
- Intervalo, 65.
- Intervalos, encajes de, 76-79.
- Intuicionismo, 96, 227.
- Invariancia, 177-79.
 de ángulos en la inversión, 170, 171.
 de la razón doble, 185, 186.
- Inversas:
 funciones, 290-93.
 operaciones, 11.
- Inversión, 153-58, 170-76.
- Inversores, 167-70.
- Inversos, puntos, 154.
 construcción de, 156, 157.
- Irracionales, números:
 como decimales infinitos, 71.
 definidos por cortaduras, 80.
 definidos por encajes de intervalos, 76-80.
 definidos por sucesiones, 81.
- Isoperímetros, problema de los, 383-386.
- Iteración, límites por, 337, 338.

- Jordán, teorema de la curva de, 257, 258, 279-81.
- Klein:
 botella de, 274.
 modelo de, 232-34.
- Leibniz, fórmula para π de, 451.
- Límites, 301-32.
 de las series geométricas, 73, 74.
 de una sucesión, 301-14.
 ejemplos, 333-38.
 por aproximación continua, 314-23.
 por iteración, 337, 338.
- Liouville, teorema de, 113-17.
- Logaritmo.
 (nl), orden de Infinitud, 481, 482.
 natural, 36, 453-56, 460-64, 479, 480.
- Lógica:
 matemática, 97, 122-24.
 suma, 120.
- Lógico, producto, 120.
- Longitud de una curva, 475-79.
- Luminosos:
 propiedad extremal de los rayos, 341-43.
 triángulos formados por rayos, 362, 363.
- Mapa regular, 276.
- Mapas, iluminación de, 258-60, 276-79.
- Mascheroni, construcciones de, 159-63.
- Matemática:
 existencia, 97.
 inducción, 17-27.
 lógica, 97, 122-24.
- Máximo común divisor, 51-53.
- Máximos y mínimos, 340-407, 436, 437, 442.
- Mecánicos, instrumentos, trazado con, 164-67.
- Media:
 aritmética, 371-74.
 geométrica, 371-74.
- Medias, desigualdades entre, 372-74.
- Menor entero, principio del, 26.
- Metamatemática, 97.
- Métrica, geometría, 181.
- Mínimos:
 método de los cuadrados, 374-76.
 puntos, 353-56.
- Módulo:
 d, 39.
 de un complejo, 102.
- Moebius, cinta de, 272-75.
- Monótona:
 función, 292.
 sucesión, 306-08.
- Morse, relaciones de, 356.
- Movimiento:
 ecuaciones de, 467-71.
 ergódico, 363, 364.
 rígido, 164.
- Multiplicidad de raíces en la ecuación algebraica, 11.
- n dimensiones, geometría de, 240-42.
- Naturales, números, 8-27.
- Negativos, números, 63.
- Newton, dinámica de, 469-71.
- Nivel, curvas de, 298.
- No euclídea, geometría, 230-37.
- No-numerabilidad del continuo numérico, 89-91.
- Nudos, 268.
- Numerabilidad de los números racionales, 87-89.
- Números:
 algebraicos, 112, 113.
 cardinales, 92-95.
 complejos, 97-112.
 compuestos, 29.
 construibles y cuerpos de números, 138-46.
 definición, 144.
 cuerpos de, 138-46.
 de Fermat, 33, 129.
 naturales, 8, 27.
 negativos, 63.
 pitagóricos, 48-50.
 primos, 28-39.
 racionales, 60-66.
 reales, 66-18.
 sistema de, 60-117.
 trascendentes, 112, 113.
- Ordenes de infinitud, 479-82.
- Pappus, teorema de, 250.
- Paradojas:
 de Zenón, 316, 317.
 del infinito, 96.
- Paralela única, postulado de la, 230.
- Paralelismo e infinito, 192-97.
- Pascal:
 teorema de, 200, 203, 221-24.
 triángulo de, 24.

- Peaucellier, inversor de, 167-70.
- Películas, experimentos con, 395-407.
- Pendiente, 425, 500.
- Pentágono regular, construcción del, 109, 133.
- Perspectivas, figuras, 181.
- Pi, 152, 310-12, 314, 451, 452.
- Pitagóricos, números, 48-50.
- Plano del infinito, 197.
- Plateau, problema de, 396.
- Poliedros:
 - fórmula de Euler para los, 248-53, 270, 271, 274.
 - género de los, 268-70.
 - n -dimensiones, 239-46.
 - regulares, 248-53.
 - simples, 248.
 - uniláteros, 271-75.
- Postulados, 226.
- Primitivas, funciones, 448.
- Primos, números, 28-39, 491, 493-96.
- teorema de los, 34-37.
- Probabilidades, teoría de las, 124-26.
- Producto:
 - infinito, 311, 491-93.
 - lógico, 120.
- Progresiones:
 - aritméticas, 19, 20, 33, 34, 497, 498.
 - geométricas, 20, 21.
- Proyectiva:
 - correspondencia, 190, 216.
 - geometría, 177-226.
 - transformación, 179-82.
- Pruebas constructiva, indirecta y existencial, 95, 96.
- Punto:
 - invariante, teorema de, 264-68.
 - medio de un segmento, forma de hallarlo sólo con compás, 157.
- Puntos:
 - colineales, 182.
 - del infinito, 192-97.
 - series de, 219, 220.
- Racionales, números, 60-66.
- construcción geométrica de, 131-132.
- densidad de los, 66.
- numerabilidad de los, 87-89.
- operaciones con, 61, 62.
- Radiactiva, desintegración, 466, 467.
- Radianes, medida en, 289, 290.
- Raíces de la unidad, 107-10.
- Raíz cuadrada, construcción geométrica de la, 133.
- Razón doble, 184-92, 197.
- Reales, números, 66-81.
- continuo de los, 76.
- operaciones con, 78, 79.
- Recta:
 - del infinito, 194.
 - línea, ecuación de la, 83.
- Rectas:
 - concurrentes, 182.
 - haz de, 216.
- Red de carreteras, problema de la 369-71.
- Reflexión:
 - circular, 154.
 - en los triángulos, 362, 363.
 - en un sistema de círculos, 175, 176.
 - en una o varias rectas, 340-43.
 - problemas extremos de, 363, 364.
 - reiterada, 174-76.
- Regulares:
 - construcción de polígonos, 129, 133-36, 505.
 - poliedros, 248-53.
 - de n dimensiones, 239-46.
- Relativa, notación, 12.
- Relatividad, 239, 242.
- Representación, 153.
- Resolución de problemas, 128.
- Restos cuadráticos, 46, 47.
- Riemann, geometría de, 237-39.
- Rígido, movimiento, 154.
- Schwarz, problema del triángulo órtico, 357-64, 387.
- Segmento, 65, 82.
- Segunda derivada, 435.
- Sentido de un ángulo, 171.
- Septimal, sistema, 13, 15.
- Serie binómica, 485.
- Series:
 - convergencia de, 482, 489.
 - infinitas, 482-87.
 - simple, poliedro, 248.
- Simplemente conexo, dominio, 255.
- Sintética, geometría, 177.
- Solución experimental de problemas de mínimo, 395-407.
- Steiner:
 - construcciones de, 163, 164, 209, 210.
 - problema de, 364-71, 387-89, 401.
- Subconjunto, 149.
- propio, 87.
- Subcuerpo, 140.
- Subíndices, 12.

- Sucesiones, 301-14.
 acotadas, 306.
 convergentes, divergentes y oscilantes, 305.
 monótonas, 306-08.
 teorema sobre, 326, 327.
- Suma:
 de los n primeros cuadrados, 21.
 de los n primeros cubos, 22.
 lógica, 120.
- Superficies:
 cuádricas, 224-26.
 uniláteras, 271-76.
- Tangente, 425.
- Taylor, serie de, 486, 487.
- Teorema fundamental:
 de la aritmética, 30, 54, 55.
 del álgebra, 110-12.
 del cálculo, 445-49.
- Teoría de números, 28-59, 491-96.
- Tertio excluso*, 95.
- Topología, 247-83.
 y puntos mínimos, 355, 356.
- Topológica:
 clasificación, de superficies, 268-76.
 transformación, 254.
- Toro, 260.
 tridimensional, 274-76.
- Trabajo, 475, 476.
- Transformación:
 ecuaciones de, 300.
 geométrica, 153, 177-79.
 proyectiva, 179-82.
 topológica, 253.
- Trascendencia de π , 113, 152.
- Trascendentes, números, 112-17.
- Triángulos, propiedades extremales de los, 341, 343, 344, 357-63, 364-69.
- Trigonométricas, funciones, definición, 289.
- Trisección del ángulo, 127, 149, 150.
- Única, descomposición en factores, 30, 54, 55.
- Unidad:
 circunferencia, 102.
 raíces de la, 107-10.
- Uniláteras, superficies, 271-76.
- Unión de conjuntos, 120.
- Vacío, conjunto, 26.
- Valor absoluto, 65.
- Valores extremos:
 con condiciones de contorno, 386-89.
 en geometría elemental, 341-49.
 principio general, 349-52.
 problemas de, 340-407.
 y desigualdades, 371-76.
- Variable:
 compleja, 488, 489.
 continua, 286.
 dependiente, 287.
 independiente, 287.
 noción de, 285.
 real, 286.
- Variaciones, cálculo de las, 389-95.
- Vector, 82.
- Velocidad, 432-35.
- Vibraciones amortiguadas, 469.
- Vibratorio, movimiento, 468, 469.
- Wallis, producto de, 493, 520.
- Weierstrass, teorema de, sobre valores extremos, 324-27.
- Zenón, paradojas de, 316, 317.
- Zeta, función, 491.