

CAPÍTULO V

TOPOLOGÍA

Introducción.—A mediados del siglo XIX comenzó un desarrollo enteramente nuevo de la geometría, que pronto se convirtió en una de las fuerzas más potentes de la matemática moderna. La nueva disciplina, llamada *análisis situs* o *topología*, estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten aun si esas figuras se someten a deformaciones tan radicales que las hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas.

Uno de los grandes geómetras de esa época fue A. F. Moebius (1790-1868), un hombre cuya falta de seguridad en sí mismo le llevó al puesto de insignificante astrónomo en un observatorio de importancia secundaria de Alemania. A la edad de sesenta y ocho años sometió a la Academia de París una memoria sobre superficies de «una sola cara», que contenía algunos de los hechos más sorprendentes de este nuevo tipo de geometría. Al igual que otras importantes contribuciones anteriores, su trabajo permaneció sepultado varios años en los archivos de la Academia, hasta que por fin lo publicó su autor. Independientemente de Moebius, el astrónomo J. B. Listing (1808-1882), de Gotinga, hizo descubrimientos análogos, y a sugerencia de Gauss publicó en 1847 un pequeño libro, *Vorstudien zur Topologie*. Cuando Bernhard Riemann (1826-1866) llegó a Gotinga como estudiante, encontró la atmósfera matemática de esa ciudad universitaria llena de ansioso interés por estas nuevas y extrañas ideas geométricas. Pronto se dió cuenta de que allí estaba la clave para comprender las propiedades más profundas de las funciones analíticas de una variable compleja. Nada, quizá, ha dado más ímpetu al posterior desarrollo de la topología que la formidable estructura de la teoría de funciones de Riemann, en la cual los conceptos topológicos son absolutamente fundamentales.

Al principio, la novedad de los métodos en el reciente campo no dejó tiempo a los matemáticos para presentar sus resultados en la tradicional forma axiomática de la geometría elemental. En lugar de ello, los primeros investigadores, como Poincaré, se vieron forzados a confiar ampliamente en la intuición geométrica. Aún hoy, un estudiante de topología encontrará que si exagera la insistencia en el rigor de la presentación puede perder de vista el contenido geomé-

trico esencial entre la masa de detalles formales. Sin embargo, es un gran mérito de los trabajos recientes el haber incluido la topología dentro del marco de la matemática rigurosa, donde la intuición sigue siendo la fuente, pero no la última razón de validez de la verdad. Durante este proceso, comenzado por L. E. J. Brouwer, la importancia de la topología para casi toda la matemática se ha ido incrementando. Matemáticos americanos, en particular O. Veblen, J. W. Alexander y S. Lefschetz, han aportado importantes contribuciones al tema.

Aunque la topología es, en definitiva, una creación de los últimos cien años, hubo unos pocos descubrimientos aislados anteriores, que después encontraron su lugar en el moderno desarrollo sistemático. Sin duda, el más importante de ellos es una fórmula que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro simple, observada ya en 1640 por Descartes, y redescubierta y utilizada por Euler en 1752. El típico carácter de esta relación como teorema topológico se hizo evidente mucho más tarde, después de que Poincaré reconoció «la fórmula de Euler» y sus generalizaciones como uno de los teoremas centrales de la topología. Así, por razones tanto históricas como intrínsecas, iniciaremos nuestro estudio de la topología con la fórmula de Euler. Puesto que el ideal del rigor perfecto no es ni necesario ni deseable durante los primeros pasos en un campo no familiar, no dudaremos en apelar de cuando en cuando a la intuición geométrica del lector.

I. FÓRMULA DE EULER PARA LOS POLIEDROS

Aunque el estudio de los poliedros ocupó un lugar privilegiado en la geometría griega, cupo a Descartes y a Euler el descubrimiento del siguiente hecho: en un poliedro simple, si se designa por V el número de vértices, por A el de aristas y por C el número de caras, se verifica

$$V - A + C = 2. \quad [1]$$

Por *poliedro* se entiende un sólido cuya superficie consta de un cierto número de caras poligonales. En el caso de los poliedros regulares todos los polígonos son congruentes y todos los ángulos en los vértices son iguales. Un poliedro es *simple* si no hay en él «agujeros»; o sea, si su superficie puede ser deformada con continuidad hasta transformarse en la superficie de una esfera. La figura 120 muestra un poliedro simple no regular, mientras la figura 121 representa un poliedro que no es simple.

El lector puede comprobar el hecho de que la fórmula de Euler

se cumple para los poliedros simples de las figuras 119 y 120, pero no para el poliedro de la figura 121.

Para demostrar la fórmula de Euler, imaginemos que el poliedro simple dado es hueco y su superficie de caucho. Si separamos una de las caras, podremos deformar la superficie restante hasta extenderla sobre un plano. Por supuesto que las áreas de las caras y sus án-

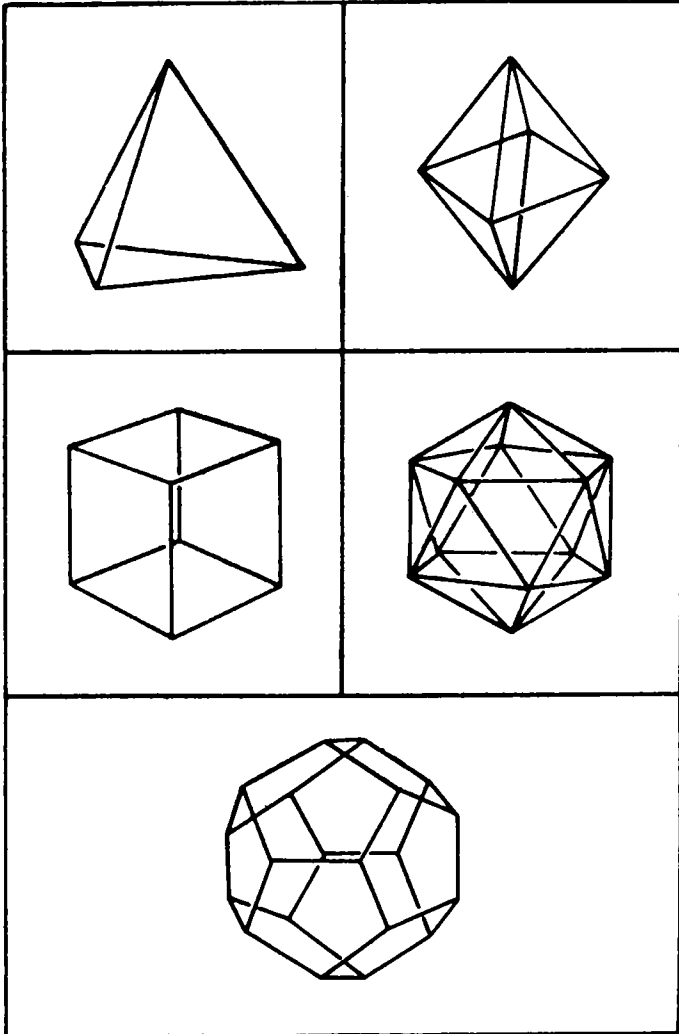


FIG. 119.—Los poliedros regulares.

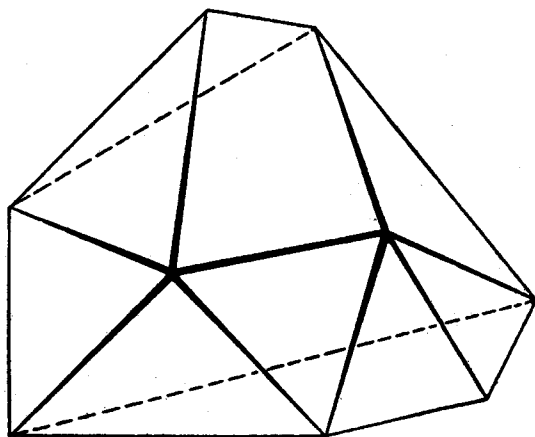


FIG. 120.—Poliedro simple. $V - A + C = 9 - 18 + 11 = 2$.

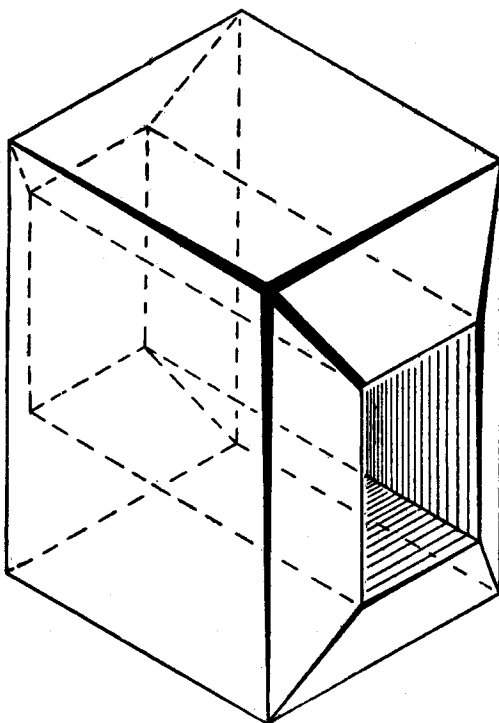


FIG. 121.—Poliedro no simple. $V - A + C = 16 - 32 + 16 = 0$.

gulos se alterarán en este proceso, pero la red plana de vértices y aristas contendrá el mismo número de unos y otros que el poliedro original, en tanto que el número de polígonos es inferior en uno al del primitivo poliedro del cual hemos suprimido una cara. Vamos a probar que para la red plana obtenida $V - A + C = 1$, de forma que si se tiene en cuenta la cara suprimida resulta $V - A + C = 2$, para el poliedro dado.

Comencemos por *triangular* la red plana del siguiente modo: En cualquier polígono de la red que no sea triángulo trazamos una diagonal, la cual incrementa ambos números A y C en 1, de forma que

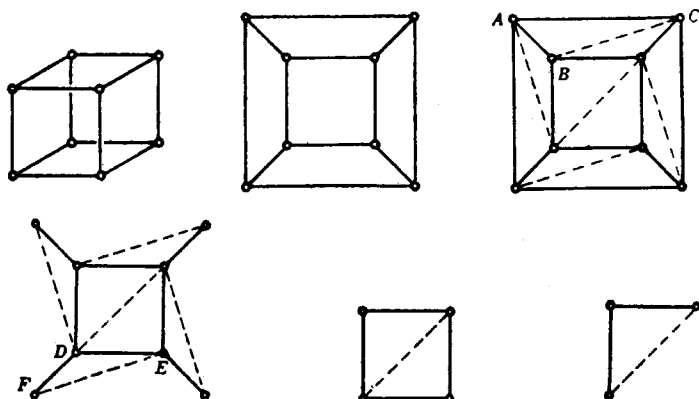


FIG. 122.—Demostración de la fórmula de Euler.

el valor de $V - A + C$ se conserva. Continuamos el trazado de diagonales que unen pares de puntos (Fig. 122) hasta que la figura consta sólo de triángulos, lo que puede ocurrir ya desde un principio. En la red triangulada, $V - A + C$ conserva el mismo valor que tenía antes de la triangulación, puesto que el trazado de diagonales no lo ha alterado. Algunos de los triángulos tienen sus lados en la frontera de la red plana, y de éstos, algunos—tal como el ABC —tienen sólo un lado formando parte de dicha frontera, mientras que otros pueden tener dos. Elegimos uno de estos triángulos frontera y suprimimos los lados que no sean comunes con algún otro triángulo; así, del ABC quitamos el lado AC y descontamos la cara correspondiente, pero conservamos los vértices A, B, C y los otros dos lados AB y BC , en tanto que del triángulo DEF suprimimos la cara, los dos lados DF y FE y el vértice F . La supresión de un triángulo del tipo ABC disminuye los números A y C en 1, mientras V queda invariable, de

forma que $V - A + C$ permanece inalterada. La supresión de un triángulo del tipo DEF hace disminuir V en 1, A en 2 y C en 1, de manera que $V - A + C$ continúa invariable. Mediante una adecuada elección de la sucesión de estas operaciones podemos ir separando triángulos que tengan algún lado en la frontera (la cual varía, por supuesto, con cada supresión), hasta dejar finalmente un solo triángulo, con tres vértices, tres lados y una cara. Para esta red simplificada $V - A + C = 3 - 3 + 1 = 1$, y como hemos visto que el proceso no alteraba el valor de $V - A + C$, también en la red plana inicial será $V - A + C = 1$, y lo mismo para el poliedro del que habíamos suprimido una cara. En conclusión, en el poliedro inicial completo $V - A + C = 2$, con lo cual queda demostrada la fórmula de Euler (véanse los problemas 56 y 57 del Apéndice).

Basándonos en la fórmula de Euler es fácil demostrar que no existen más que cinco poliedros regulares. Supongamos, en efecto, que un poliedro regular tiene C caras, siendo cada una un polígono regular de n lados, y que en cada vértice concurren r aristas. Si contamos las aristas por el número de caras o el de vértices, se tiene

$$nC = 2A, \quad [2]$$

pues cada arista es común a dos caras y está por ello contada dos veces en el producto nC ; además,

$$rV = 2A, \quad [3]$$

ya que cada arista tiene dos vértices. De [1], obtenemos la ecuación

$$\frac{2A}{n} + \frac{2A}{r} - A = 2,$$

o bien

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \quad [4]$$

Debemos comenzar con $n > 3$ y $r > 3$, ya que un polígono tiene al menos tres lados, y por lo menos tres aristas concurren en cada vértice del poliedro. Pero n y r no pueden ser mayores que 3, pues el primer miembro de la ecuación [4] no excedería a $1/2$, lo que es imposible, ya que A es entero positivo. Por tanto, veamos qué valores puede tener r para $n = 3$ y cuáles son los de n para $r = 3$. La totalidad de los poliedros obtenidos en estos dos casos nos da el número de poliedros regulares posibles.

Para $n = 3$, la ecuación [4] se transforma en

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A},$$

de donde r puede ser igual a 3, 4 ó 5 (6 ó un número mayor queda excluido, pues $1/A$ es siempre positivo). Para estos valores de n y r hallamos $A = 6, 12, 6, 30$,

que corresponden, respectivamente, al tetraedro, octaedro e icosaedro. Análogamente, para $r = 3$ se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A},$$

de la cual resulta que $n = 3, 4$ ó 5 , y $A = 6, 12$ ó 30 , respectivamente. Estos valores corresponden al tetraedro, cubo y dodecaedro. Si sustituímos estos valores de n, r y A en las ecuaciones [2] y [3], obtenemos los números de vértices y caras de los respectivos poliedros.

II. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DE LAS FIGURAS

1. Propiedades topológicas.—Hemos visto que la fórmula de Euler se verifica para todo poliedro simple, pero la validez de esta fórmula no queda restringida, ni mucho menos, a los poliedros de la geometría elemental, de caras planas y aristas rectas; la demostración que acabamos de dar se aplicaría igualmente a poliedros simples de caras y aristas curvas, o a cualquier subdivisión de la superficie de una esfera en regiones limitadas por arcos de curvas. Por otra parte, si imaginamos la superficie del poliedro o de la esfera constituida por una delgada lámina de caucho, la fórmula de Euler todavía conserva su validez si la superficie se deforma doblando y estirando el caucho hasta darle otra cualquier forma, en tanto este proceso de deformación no produzca desgarramiento. Esto se debe a que la fórmula se refiere sólo a los *números* de vértices, aristas y caras y no a longitudes, áreas, razones dobles o cualquier otro concepto ordinario de la geometría elemental o proyectiva.

Recordemos que la geometría elemental tiene que ver con las magnitudes (longitud, ángulo y área) que quedan invariables en los movimientos rígidos, en tanto que la geometría proyectiva trata con conceptos (punto, recta, incidencia y razón doble) que quedan invariables en el grupo más amplio de las transformaciones proyectivas. Pero los movimientos rígidos y las proyecciones son casos muy especiales de las llamadas *transformaciones topológicas*. Una transformación topológica de una figura geométrica A en otra A' está dada por cualquier correspondencia

$$p \longleftrightarrow p'$$

entre los puntos p de A y los p' de A' , caracterizada por las dos propiedades siguientes:

1) *La correspondencia es biunívoca.* Esto significa que a cada punto p de A corresponde un solo punto p' de A' , y recíprocamente.

2) *La correspondencia es continua en ambos sentidos.* Esto quiere decir que si tomamos dos puntos cualesquiera p , q de A y movemos p de forma que su distancia al punto q tienda a cero, la distancia entre los puntos correspondientes p' , q' de A' también tiende a cero, y reciprocamente.

Toda propiedad de una figura geométrica A que también se cumpla para cualquier figura en que A pueda transformarse por una transformación topológica, se llama una *propiedad topológica* de A , y



FIG. 123.—Superficies topológicamente equivalentes.



FIG. 124.—Superficies no equivalentes topológicamente.

topología es la rama de la geometría que se ocupa sólo de las propiedades topológicas de las figuras. Imaginemos una figura copiada «libremente» por un consciente pero inexperto dibujante, que deforme las rectas en curvas y altere los ángulos, distancias y áreas; pues bien, aunque las propiedades métricas y proyectivas de la figura original se hayan perdido, sus propiedades topológicas permanecerán idénticas.

Los ejemplos más intuitivos de transformaciones topológicas generales son las *deformaciones*. Imaginemos una figura, como una superficie esférica o un triángulo, fabricada con una delgada lámina de caucho o dibujada sobre ella, la cual es luego estirada o retorcida de cualquier forma, sin rasgarla y sin hacer coincidir puntos distintos. (Hacer coincidir dos puntos distintos violaría la condición 1. Rasgar la lámina de caucho violaría la condición 2, puesto que dos puntos de la figura original que tienden a coincidir provenientes de lados opuestos de la línea a lo largo de la cual se ha rasgado la lámina, no tenderán a coincidir en la figura rasgada.) La posición final de la figura

debe ser, pues, una imagen topológica de la original. Un triángulo puede ser deformado hasta obtener otro triángulo, un círculo (figuras 123 y 124) o una elipse, y, por tanto, estas figuras tienen exactamente las mismas propiedades topológicas; pero no se puede deformar un círculo de manera que resulte un segmento rectilíneo, ni la superficie de una esfera puede dar lugar a la superficie interior de un tubo.

El concepto general de transformación topológica es más amplio que el concepto de deformación. Por ejemplo, si una figura se rasga durante una deformación y seguidamente se unen los bordes del corte después de deformada, de igual manera que antes, el proceso define aún una transformación topológica de la figura original, aunque ya no es una deformación. Así las dos curvas de la figura 134 son topológicamente equivalentes entre sí y lo son también a una circunferencia, puesto que pueden cortarse, enderezarse, y luego unir ambos extremos. Pero es imposible deformar una curva en la otra o en una circunferencia, sin antes efectuar el corte de la curva.

Las propiedades topológicas de las figuras (tales como la dada por el teorema de Euler y otras que serán discutidas en esta sección)

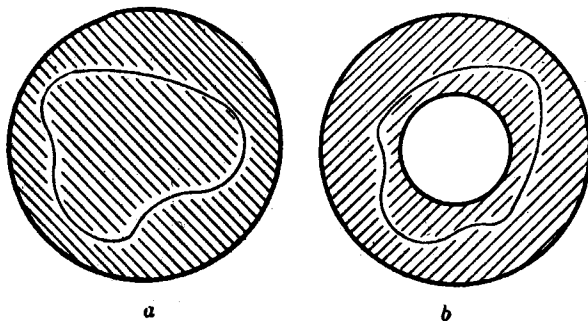


FIG. 125. — Conexión simple y doble.

tienen gran interés e importancia en muchas investigaciones matemáticas. Son, en cierto sentido, las más profundas y fundamentales de todas las propiedades geométricas, puesto que persisten después de realizados los cambios de forma más radicales.

2. Conexión.—Como nuevo ejemplo de dos figuras que no son topológicamente equivalentes, podemos considerar los dominios planos de la figura 125. El primero de ellos consta de todos los puntos interiores a un círculo, mientras que el segundo lo constituyen todos los puntos situados entre dos circunferencias concéntricas. Cualquier curva cerrada contenida en el dominio *a* puede deformarse o «con-

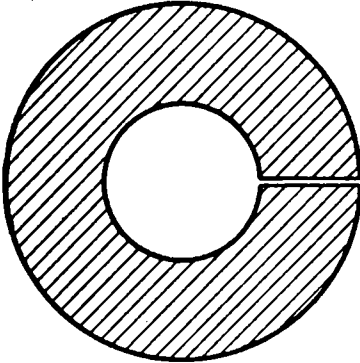


FIG. 126.—Corte de un dominio doblemente conexo para lograr uno simplemente conexo.

que no es simplemente conexo se llama *múltiplemente conexo*. Si el dominio múltiplemente conexo b se corta a lo largo de un radio, como en la figura 126, el dominio resultante es simplemente conexo.

Con mayor generalidad, podemos construir dominios con dos, tres,

traerse» continuamente alrededor de un único punto *dentro del dominio*. Un dominio con esta propiedad se dice *simplemente conexo*. El dominio b no es simplemente conexo; p. ej., una circunferencia concéntrica con las dos circunferencias que sirven de frontera no puede deformarse hasta reducirse a un único punto interior al dominio, puesto que durante este proceso la curva debería pasar necesariamente por el centro de las circunferencias, que no es un punto del dominio. Un dominio

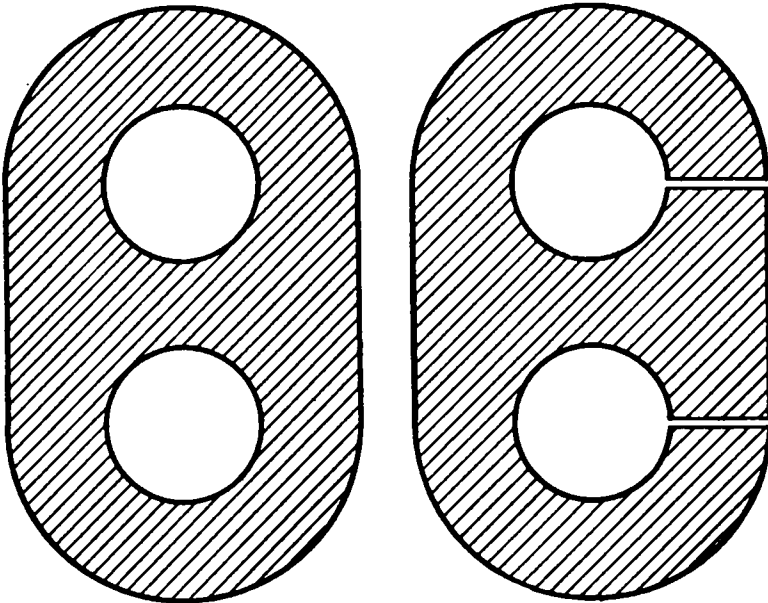


FIG. 127.—Reducción de un dominio triplemente conexo.

o más «agujeros», como el de la figura 127. Para convertir este dominio en otro simplemente conexo, son necesarios dos cortes. Si para convertir un dominio dado D múltiplemente conexo en otro simplemente conexo se necesitan $n - 1$ cortes que no se atraviesen y que unan un borde con otro, entonces el dominio D se dice que tiene orden de conexión n . El orden de conexión de un dominio en el plano es un importante invariante topológico del dominio.

III. OTROS EJEMPLOS DE TEOREMAS TOPOLÓGICOS

1. **El teorema de la curva de Jordan.**—Una curva cerrada y simple (o sea, que no se corta a sí misma) está dibujada en el plano. ¿Qué propiedad de esta figura subsiste cuando el plano se considera como una lámina de caucho que puede deformarse de cualquier modo? La longitud de la curva y el área que encierra pueden alterarse con una deformación; pero hay una propiedad topológica de la configuración que es tan simple que puede parecer trivial: *una curva simple y cerrada C de un plano divide a éste en dos dominios, uno interior y otro exterior.* Esto significa que los puntos del plano se dividen en dos clases— A , el exterior de la

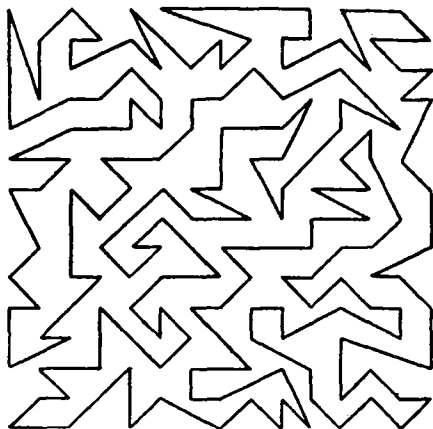


FIG. 128.—¿Qué puntos del plano son interiores a este polígono?

curva, y B , el interior—, tales que cualquier par de puntos de la misma clase pueden unirse por medio de una curva que no corta a C , mientras que cualquier curva que una dos puntos pertenecientes a clases distintas debe cortar a C . Esta aserción es evidentemente cierta para una circunferencia o una elipse; pero esta evidencia disminuye notablemente si se considera una curva complicada tal como el intrincado polígono de la figura 128.

Este teorema fué establecido por primera vez por Camille Jordan (1838-1922), en su famoso *Cours d'Analyse*, en el cual toda una generación de matemáticos aprendió el concepto moderno de rigor en aná-

lisis. Aunque parezca extraño, la demostración dada por Jordan no era ni corta ni sencilla, y la sorpresa resulta aún mayor si se advierte que dicha demostración era falsa y que se necesitó un considerable esfuerzo para llenar las lagunas de su razonamiento. La primera demostración rigurosa del teorema resultó muy complicada y difícil de entender, aun para muchos matemáticos bien entrenados. Sólo recientemente se han dado demostraciones relativamente sencillas. Una razón de la dificultad estriba en la generalidad del concepto de «curva simple cerrada», que no sólo incluye al conjunto de polígonos y curvas «uniformes», sino también a todas aquellas curvas, imágenes topológicas de una circunferencia. Por otra parte, muchos conceptos como «interior», «exterior», etc., que son tan claros para la intuición, deben precisarse antes de poder dar una demostración rigurosa. Es de gran importancia teórica analizar tales conceptos en su más amplia generalidad, y gran parte de la topología moderna se consagra a este fin. Pero no debe olvidarse nunca que en la gran mayoría de los casos que se presentan en el estudio de los fenómenos geométricos concretos resulta innecesario manejar conceptos cuya excesiva generalidad cree dificultades adicionales. Así, p. ej., el teorema de la curva de Jordan puede demostrarse con relativa facilidad para curvas de «comportamiento» razonable, como polígonos o curvas con tangente que varía con continuidad, que son las que aparecen en la mayoría de los problemas importantes. Demostraremos el teorema para los polígonos en el apéndice de este capítulo.

2. El problema de los cuatro colores.—A partir del ejemplo del teorema de la curva de Jordan, podría suponerse que la topología se ocupa de dar demostraciones rigurosas de ciertas aseveraciones obvias, de las cuales ninguna persona en su sano juicio dudaría. Por el contrario, hay muchas cuestiones topológicas, algunas de ellas de forma muy simple, para las cuales la intuición no da respuesta satisfactoria. Un ejemplo de este tipo es el famoso «problema de los cuatro colores».

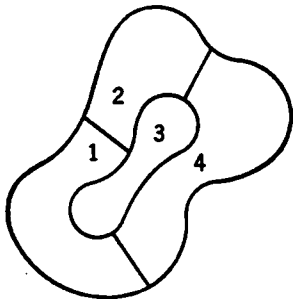


FIG. 129.—Iluminación de un mapa.

Al iluminar un mapa geográfico, se acostumbra asignar diferentes colores a dos países cualesquiera que tienen una porción de frontera común. Se ha encontrado empíricamente que cualquier mapa, indepen-

dientemente del número de países que contenga y de cómo estén éstos situados, puede iluminarse utilizando sólo cuatro colores diferentes. Es fácil ver que un número menor de colores no es suficiente para todos los casos. La figura 129 nos muestra una isla que, en efecto, no puede iluminarse con menos de cuatro colores, ya que pertenece a cuatro naciones, cada una de las cuales tiene frontera con las otras tres.

El hecho de que no se haya encontrado ningún mapa que requiera más de cuatro colores sugiere el siguiente teorema matemático: *Para cualquier subdivisión del plano en regiones que no se solapen, es siempre posible señalar las regiones con uno de los números 1, 2, 3, 4, de tal modo que a dos regiones adyacentes no se les asigne nunca el mismo número.* Por regiones «adyacentes» entendemos regiones con todo un arco de frontera común: dos regiones que sólo tengan un punto o un número finito de puntos comunes (como los estados de Colorado y Arizona) no se llamarán adyacentes, puesto que no puede surgir ninguna confusión si se iluminan con el mismo color.

El problema de demostrar este teorema parece haber sido propuesto primeramente por Moebius en 1840, después por DeMorgan en 1850, y de nuevo por Cayley en 1878. Kempe publicó una «demostración» en 1879; pero, en 1890, Heawood encontró un error en el razonamiento de Kempe. Mediante la revisión de la demostración de Kempe, Heawood pudo demostrar que *cinco* colores son siempre suficientes. (Una demostración del teorema de los cinco colores se da en el apéndice de este capítulo.) A pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos insignes, la cuestión sigue aún esencialmente estancada en este modesto resultado: se ha *probado* que cinco colores bastan para todos los mapas y se *supone* que cuatro colores son también suficientes. Pero, como en el caso del famoso teorema de Fermat (véase pág. 50), no se ha logrado ni una demostración de esta conjetura ni un contraejemplo, por lo cual sigue siendo éste uno de los grandes problemas no resueltos de la matemática. El teorema de los cuatro colores fué realmente demostrado para todos los mapas que contienen menos de 38 regiones. En vista de este hecho, parece que incluso si el teorema general es falso, no podrá demostrarse esta falsedad mediante un ejemplo sencillo.

En el problema de los cuatro colores los mapas pueden dibujarse, bien en el plano o sobre la superficie de una esfera. Los dos casos son equivalentes; todo mapa sobre la esfera puede representarse sobre el plano haciendo un pequeño agujero interior a una de las regiones A y deformando la superficie resultante hasta hacerla plana, como en

la demostración del teorema de Euler. El mapa resultante en el plano, puede ser el de una «isla» constituida por las regiones restantes, rodeada por «mar», que es la región A . Recíprocamente, invirtiendo este proceso, cualquier mapa plano puede representarse sobre una esfera. Podemos, por tanto, limitarnos a los mapas sobre la esfera. Además, dado que las deformaciones de las regiones y de sus fronteras no afectan al problema, podemos suponer que la frontera de cada región es un polígono simple cerrado, formado por arcos circulares. Aun así «regularizado», el problema permanece sin resolver; las dificultades en este caso, por oposición a las inherentes al teorema de la curva de Jordan, no residen en la generalidad de los conceptos de región y curva.

Un hecho notable, relativo al problema de los cuatro colores, es el de que para superficies más complicadas que el plano y la esfera, los teoremas correspondientes han sido efectivamente demostrados, o sea que, por paradójico que parezca, el análisis de superficies geométricas más complicadas aparece a este respecto más fácil que el de los casos más sencillos. Por ejemplo, sobre la superficie de un toro (véase figura 123), cuya forma es la de un buñuelo o de un neumático hinchado, se ha demostrado que cualquier mapa puede iluminarse utilizando siete colores, mientras pueden construirse mapas que contienen siete regiones, cada una de las cuales es fronteriza a las otras seis.

*3. El concepto de dimensión.—El concepto de dimensión no presenta grandes dificultades mientras se trata de figuras geométricas sencillas, tales como puntos, rectas, triángulos y poliedros. Un punto único o un conjunto *finito* de puntos tiene dimensión cero; un segmento rectilíneo es unidimensional, y la superficie de un triángulo o la de una esfera son bidimensionales.

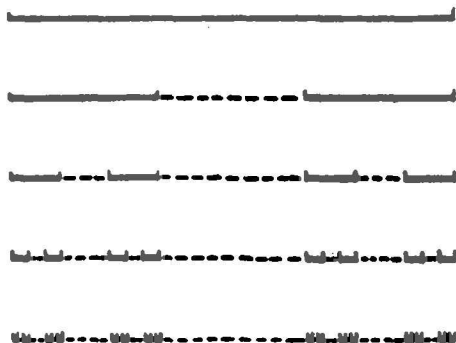


FIG. 130. — Conjunto de puntos de Cantor.

El conjunto de los puntos de un cubo sólido es tridimensional. Pero, en cuanto se trata de entender este concepto a conjuntos más generales de puntos, surge la necesidad de dar una definición precisa. ¿Qué dimensión deberá asignarse al conjunto de puntos R formado por todos los puntos del eje x , de abscisa *racional*?

El conjunto de los puntos racionales es denso sobre el segmento, por lo que podría considerarse unidimensional como el propio segmento. Por otra parte, existen algunas irracionales entre cualquier par de puntos racionales, como

sucede entre dos puntos cualesquiera de un conjunto finito de puntos, de forma que cabe considerar también que la dimensión del conjunto R es cero.

Se plantea una cuestión aún más espinosa al tratar de asignar una dimensión al siguiente y curioso conjunto de puntos, que Cantor fué el primero en considerar. Suprímase en el segmento unidad la tercera parte central, que se compone de todos los puntos tales que $1/3 < x < 2/3$. Llamemos C_1 al conjunto de puntos restantes. Suprímase ahora en cada uno de los dos segmentos en que está dividido C_1 el tercio central, llamando C_2 al conjunto restante. Repítase este proceso, suprimiendo el tercio central de cada uno de los cuatro intervalos de C_2 , con la que se obtiene un nuevo conjunto C_3 , y prosigase de esta manera formando los conjuntos C_4, C_5, C_6, \dots . Llamemos C al conjunto de puntos del segmento unidad que quedan después de haber suprimido todos estos intervalos; es decir, C es el conjunto de todos los puntos comunes a todos los conjuntos de la sucesión indefinida C_1, C_2, C_3, \dots . Puesto que se suprimió un intervalo de longitud $1/3$ en el primer paso del proceso, dos intervalos de longitud $1/3^2$ cada uno en el segundo, etcétera, la longitud total de los segmentos suprimidos es

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{3} \left[1 + \left(\frac{2}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots \right]$$

El paréntesis es una serie geométrica, cuya suma es $1/(1 - 2/3) = 3$, de donde se deduce que la longitud total de los segmentos suprimidos es 1. Sin embargo, todavía quedan puntos en el conjunto C ; p. ej., $1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, \dots$, que dividen en tres partes a los segmentos sucesivos. No es difícil ver que C se compone precisamente de todos aquellos puntos x , cuyo desarrollo en fracción indefinida en el sistema de base 3, puede escribirse en la forma

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots,$$

donde cada uno de los a_i es 0 ó 2, mientras que el desarrollo análogo de cualquiera de los números suprimidos contendría al menos uno de los a_i igual a 1.

¿Cuál será la dimensión de este conjunto C ? El proceso diagonal, utilizado para demostrar la no numerabilidad del conjunto de todos los números reales, puede modificarse de tal manera que proporcione el mismo resultado para el conjunto C . En consecuencia, parecerá que el conjunto C es unidimensional; sin embargo, C no contiene ningún intervalo completo, por pequeño que se suponga, por lo que también podría pensarse que tiene la dimensión cero, como cualquier conjunto finito de puntos. Dentro del mismo orden de ideas, cabe preguntarse si el conjunto de puntos del plano obtenido levantando un segmento perpendicular de longitud unidad sobre todo punto racional o sobre cada punto del conjunto de Cantor C , debe considerarse de dimensión uno o dos.

En 1912, Poincaré llamó la atención acerca de la necesidad de analizar más profundamente y de dar una definición precisa del concepto de dimensión. Poincaré observó que la recta es unidimensional, debido a que podemos separar dos puntos cualesquiera de ella, cortándola en un solo punto (conjunto de dimensión cero), mientras el plano es bidimensional, porque para separar dos cualesquiera de sus puntos debemos cortarlo a lo largo de toda una curva cerrada (conjunto de dimensión 1). Esto nos sugiere la naturaleza inductiva de la dimensión:

un espacio es n -d-mensional, si se pueden separar dos puntos cualesquiera de él suprimiendo un subconjunto de $(n - 1)$ dimensiones, mientras no es siempre posible obtener el mismo resultado suprimiendo un conjunto de menos dimensiones. Implícitamente, los *Elementos* de Euclides contienen una definición inductiva del concepto de dimensión, donde se dice que una figura unidimensional es aquella cuya frontera está compuesta de puntos; bidimensional si su frontera está formada por curvas, y tridimensional, aquella figura cuya frontera se compone de superficies.

En los últimos años se ha desarrollado un extensa teoría del concepto de dimensión. Una de las definiciones de dimensión comienza precisando el concepto de «conjunto de puntos de dimensión 0». Cualquier conjunto *finito* de puntos tiene la propiedad de que es posible encerrar cada punto del conjunto en una región del espacio arbitrariamente pequeña, que no contiene ningún otro punto del conjunto en su frontera. Esta propiedad es la adoptada actualmente como definición del conjunto de dimensión cero y se conviene en decir que un conjunto vacío (que no contiene ningún punto) tiene dimensión -1 . Entonces, un conjunto de puntos S tiene dimensión 0, si no es de dimensión -1 (es decir, si S contiene al menos un punto), y si cada punto de S puede encerrarse en una región arbitrariamente pequeña cuya frontera corte a S en un conjunto de dimensión -1 (es decir, no contenga ningún punto de S); p. ej., el conjunto de los puntos racionales de la recta tiene dimensión cero, puesto que todo punto racional puede ser centro de un intervalo arbitrariamente pequeño, cuyos extremos sean irracionales. Se ve también que el conjunto de Cantor, C , tiene dimensión cero, ya que, análogamente al conjunto de los puntos racionales, se obtiene eliminando un conjunto denso de puntos de la recta.

Hasta ahora hemos definido solamente los conceptos de dimensión 0 y -1 ; la definición de dimensión 1 resulta inmediata: un conjunto S de puntos es de dimensión 1, si no es de dimensión cero o -1 , y si además cada punto de S puede encerrarse en una región arbitrariamente pequeña y tal que su frontera corte a S en un conjunto de dimensión cero. Un segmento rectilíneo tiene esta propiedad, puesto que la frontera de cualquier intervalo es un par de puntos, que es un conjunto de dimensión cero, de acuerdo con la definición anterior. Por otra parte, si se procede análogamente, podemos definir sucesivamente los conjuntos de dimensión 2, 3, 4, 5, ..., cada uno de los cuales se apoya en la definición precedente. Así, un conjunto S tendrá dimensión n si no es de dimensión menor, y si cada punto de S puede encerrarse en una región arbitrariamente pequeña, tal que su frontera corte a S en un conjunto de dimensión $n-1$; p. ej., el plano es de dimensión 2, puesto que cada punto del mismo puede encerrarse dentro de un círculo arbitrariamente pequeño, cuya circunferencia es de dimensión 1¹. Ningún conjunto de puntos en el espacio ordinario puede tener dimensión superior a 3, ya que cada punto del espacio puede ser centro de una esfera de radio arbitrariamente pequeño, cuya superficie tiene dimensión 2. Pero, en la matemática moderna, se utiliza la palabra «espacio» para representar un sistema cualquiera de objetos para los cuales se ha definido el concepto de «distancia» y de «entorno» (véase Cap. VI, Sec. V, 4). Estos «espacios» abstractos pueden tener más de tres

¹ No pretende ser ésta una demostración rigurosa de que el plano tiene dimensión 2, de acuerdo con nuestra definición, ya que supone que la circunferencia de un círculo es de dimensión 1 y que el plano no tiene dimensión 0 ni 1. Pero puede darse una demostración de estos hechos y de sus analogos para dimensiones mayores. Esta demostración nos dice que la definición de dimensión de un conjunto general de puntos no contradice los resultados conocidos de los conjuntos más sencillos.

dimensiones. Un ejemplo sencillo es el *espacio cartesiano de n dimensiones*, cuyos «puntos» son conjuntos ordenados de n números reales:

$$P = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$Q = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n);$$

y en el cual se define la «distancia» entre dos puntos P y Q por la igualdad

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Puede demostrarse que este espacio tiene n dimensiones. Un espacio que no tiene dimensión n , cualquiera que sea el entero n , se dice que es de dimensión infinita. Se conocen muchos ejemplos de tales espacios.

Uno de los hechos más interesantes de la teoría de la dimensión es la siguiente propiedad característica de las figuras de dos, tres y, en general, de n dimensiones. Consideremos primero el caso bidimensional.

Si se subdivide cualquier figura sencilla bidimensional en un número de regiones suficientemente pequeñas (cada una de las cuales incluya a su frontera), existirán necesariamente puntos, en los que se encuentran *tres o más* de estas regiones, *independientemente de su forma*. Además, *existen subdivisiones* de la figura para las que cada punto pertenece, *a lo sumo*, a tres regiones de la subdivisión.

Así, si la figura bidimensional es un cuadrado, como en la figura 131, existe un punto que pertenece a las tres regiones 1, 2, 3; aunque para esta subdivisión particular, ningún punto pertenece a más de tres regiones. Análogamente, en el caso tridimensional puede demostrarse que, si se descompone un volumen en otros suficientemente pequeños, existen siempre puntos comunes por lo menos a cuatro de estos últimos, y que para una subdivisión adecuadamente elegida, no más de cuatro tendrán un punto común.

Estas observaciones sugieren el siguiente teorema, debido a Lebesgue y Brouwer. Si se divide una figura de n dimensiones, de cualquier manera, en otras subregiones suficientemente pequeñas, siempre existirán puntos que pertenecerán, por lo menos, a $n + 1$ de ellas; además, en todos los casos es posible encontrar una subdivisión en regiones arbitrariamente pequeñas para la cual ningún punto pertenezca a más de $n + 1$ regiones. Debido a la forma en que se realiza la subdivisión, este teorema se llama también teorema del «recubrimiento». Caracteriza la dimensión de cualquier figura geométrica: aquellas figuras para las cuales el teorema es válido son n dimensionales, mientras todas las demás tendrán otra dimensión. Por esta razón, se puede tomar como *definición* de dimensión, tal como hacen algunos autores.

La dimensión de un conjunto cualquiera es una característica topológica del conjunto; dos figuras de diferente dimensión no pueden ser equivalentes topológicamente. Éste es el famoso teorema topológico de la «invariabilidad de la dimensión», cuya importancia resalta aún más, si se le compara con el hecho ex-

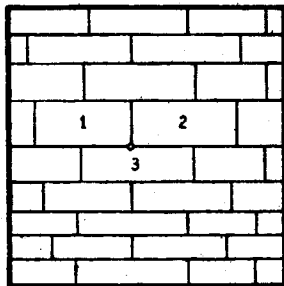


FIG. 131. — Teorema del recubrimiento.

puesto en la página 94, referente a que el conjunto de puntos de un cuadrado tiene el mismo número cardinal que el de los puntos de un segmento rectilíneo. La correspondencia allí definida no es topológica, puesto que no se cumplen las condiciones de continuidad.

***4. Un teorema de punto invariante.**—En las aplicaciones de la topología a las otras ramas de la matemática, los teoremas referentes a «puntos fijos» desempeñan un importante papel. Un ejemplo típico es la siguiente proposición de Brouwer. Para la intuición resulta mucho menos evidente que la mayoría de los hechos topológicos.

Consideremos un disco circular en el plano, con lo cual queremos significar el interior de un círculo, junto con su circunferencia. Supongamos que se someten los puntos de ese disco a una transformación

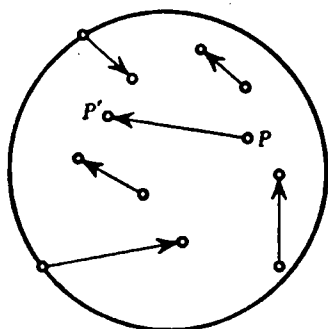


FIG. 132. — Vectores de transformación.

ción continua cualquiera (que no precisa ser biunívoca), en la cual cada punto permanece interior al círculo, aunque cambie su situación. Por ejemplo, puede encogerse, doblarse, estirarse o deformarse de cualquier manera un delgado disco de goma, en tanto que la posición final de cada punto del disco permanezca interior a la circunferencia original. Así también, si se pone en movimiento el líquido contenido en una vasija, agitándolo de tal manera que las partículas de la superficie permanezcan en ella, pero cambiando su posición, en un momento determinado la posición de esas partículas de la superficie define una transformación continua de su distribución original. El teorema de Brouwer afirma que *toda transformación de ese tipo deja invariable la posición de un punto por lo menos*, es decir, existe al menos un punto cuya posición, después de la transformación, coincide con la que tenía inicialmente. (En el ejemplo de la superficie del líquido, el punto fijo, en general, cambiará de posición con el tiempo, aunque para una simple rotación circular el centro permanece siempre inmóvil.) La demostración de la existencia de un punto fijo es típica de la clase de razonamiento utilizado para establecer muchos teoremas topológicos.

Consideremos el disco antes y después de la transformación y supongamos, contra lo que afirma el teorema, que *ningún* punto conserva su posición anterior, por lo que, en la transformación, cada punto se traslada a otro punto, situado dentro del círculo o en su

circunferencia original. Así también, si se pone en movimiento el líquido contenido en una vasija, agitándolo de tal manera que las partículas de

circunferencia. Asignemos a cada punto P del disco primitivo una flecha o «vector» en la dirección PP' , siendo P' la imagen del punto P en la transformación. Para todo punto del disco existe dicho vector, pues se ha supuesto que cada uno de ellos variaba su posición. Consideremos ahora los puntos de la circunferencia del círculo con sus vectores asociados. Todos ellos están dirigidos hacia el interior del círculo, pues, por hipótesis, ningún punto se transforma en otro exterior al círculo. Comencemos por un punto cualquiera P_1 del contorno y recorramos la circunferencia en sentido contrario a las agujas de un

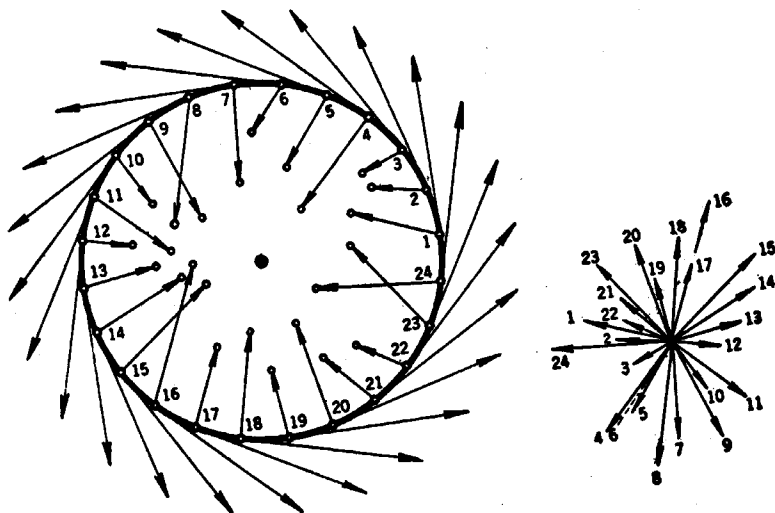


FIG. 133.

reloj. Al proceder así, cambiará la dirección del vector, pues los puntos del contorno tienen asociados vectores de dirección variable; las direcciones de estos vectores pueden ponerse de manifiesto trazando vectores paralelos por un punto del plano. Observemos que, al atravesar el círculo partiendo de P_1 para volver de nuevo a P_1 , el vector gira y vuelve a su posición original. Designemos el número completo de vueltas dadas por este vector como el «índice» de los vectores del círculo; con más precisión, definamos el índice como la *suma algebraica* de las distintas variaciones angulares de los vectores, de forma que las efectuadas en el sentido de las agujas del reloj se tomarán con signo negativo, mientras que consideraremos como positivas las realizadas en sentido contrario. El índice es la suma final que, a

priori, puede ser cualquiera de los números $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, correspondiendo a una variación total del ángulo de $0^\circ, \pm 360^\circ, \pm 720^\circ, \dots$. Nuestra afirmación es que *el índice es igual a 1*; esto es, que la variación total en la dirección del vector es exactamente una vuelta positiva completa. Para probarlo, recordemos que el vector asociado a cualquier punto P de la circunferencia está dirigido siempre hacia el interior del círculo y nunca en la dirección de la tangente. Ahora bien: si este vector girase un ángulo total distinto del ángulo total girado por el vector *tangente* (que es de 360° , ya que el vector tangente efectúa evidentemente una revolución positiva completa), entonces la diferencia entre los ángulos totales girados por el vector tangente y el vector transformación sería un múltiplo (distinto de 0) de 360° , ya que efectúa un número entero de revoluciones. De ahí que el vector transformación deba girar completamente alrededor de la tangente por lo menos una vez, durante el circuito completo de P_1 a P_1 ; y puesto que el vector transformación y el tangente giran continuamente, en un cierto punto de la circunferencia el vector transformación debe coincidir con el tangente, lo que, como ya hemos visto, es imposible.

Si consideramos ahora una circunferencia cualquiera, concéntrica con la del disco e interior a ella, junto con los correspondientes vectores transformación de esta nueva circunferencia, el índice de dichos vectores para esta circunferencia debe ser 1. Pues si pasamos con continuidad de la circunferencia a cualquiera otra concéntrica, el índice debe variar continuamente, ya que las direcciones de los vectores transformación varían continuamente de punto a punto, dentro del disco. Pero como el índice puede tomar sólo valores enteros, permanecerá constantemente igual a 1, puesto que si saltara de 1 a cualquier otro valor entero habría una discontinuidad en el valor del índice. (La conclusión de que debe ser constante una cantidad que varía continuamente, pero que sólo puede tomar valores enteros, es una muestra típica de una clase de razonamiento matemático que interviene en muchas demostraciones.) Así podemos encontrar un círculo concéntrico tan pequeño como se quiera, para el cual el índice de los vectores transformación correspondientes es 1. Pero esto es imposible, puesto que de la supuesta continuidad de la transformación, los vectores de un círculo suficientemente pequeño tendrán aproximadamente la misma dirección que el vector del centro del círculo. Así, pues, el cambio total de sus ángulos puede llegar a ser tan pequeño como se quiera, p. ej., menor que 10° , tomando un círculo suficientemente pequeño. En consecuencia, como el índice debe ser

un número entero, será igual a cero. Esta contradicción demuestra que es falsa nuestra hipótesis inicial, según la cual no existía ningún punto fijo en la transformación, con lo que queda completada la demostración.

El teorema que acabamos de demostrar no sólo es válido para un disco, sino para cualquier otra región triangular o cuadrada, o para cualquier superficie que sea imagen de un disco en una transformación topológica. Pues si A es una figura cualquiera, correlacionada con un disco mediante una transformación biunívoca y continua, una transformación continua de A en sí misma, que no tuviera punto fijo, definiría una transformación continua del disco en sí mismo, sin punto fijo, y ya hemos demostrado que esto es imposible. El teorema conserva su validez en tres dimensiones, para esferas o cubos, pero la demostración no es tan sencilla.

Aunque para la intuición no resulta demasiado evidente el teorema del punto fijo de Brouwer, es fácil demostrarlo como consecuencia inmediata del hecho siguiente, cuya evidencia es mucho más intuitiva: es imposible transformar con continuidad un disco circular en su circunferencia exclusivamente, de tal modo que todo punto de ésta permanezca fijo. Demostraremos que la existencia de una transformación, sin punto fijo, de un disco en sí mismo contradice dicha proposición. Supongamos que $P \rightarrow P'$ fuera una transformación de ese tipo; para cada punto P del disco podemos trazar una flecha, que comienza en P' y continúa, pasando por P , hasta que alcanza la circunferencia en algún punto P^* . Entonces, la transformación $P \rightarrow P^*$ sería continua y tal que transformaría el disco completo en su circunferencia exclusivamente, dejando invariable todo punto de la circunferencia, contra la hipótesis de que una tal transformación es imposible. Puede utilizarse un razonamiento similar para establecer el teorema de Brouwer en tres dimensiones, para una esfera o un cubo.

Es fácil ver que algunas figuras geométricas admiten transformaciones en sí mismas, continuas y sin puntos fijos; p. ej., la región anular comprendida entre dos circunferencias concéntricas admite, como transformación continua sin puntos fijos, una rotación de ángulo cualquiera, no múltiplo de 360° , alrededor de su centro. La superficie esférica admite, como transformación continua sin puntos fijos, la que lleva cada punto al diametralmente opuesto. Pero puede demostrarse mediante razonamiento análogo al utilizado para el disco, que cualquier otra transformación continua que no haga corresponder a ningún punto el diametralmente opuesto (p. ej., cualquier pequeña deformación) tiene un punto fijo.

Los teoremas del punto fijo tales como éstos proporcionan un método potente para demostrar muchos «teoremas de existencia» que a primera vista no parecen tener carácter geométrico. Un ejemplo famoso es un teorema de punto fijo, sospechado por Poincaré en 1912, poco antes de su muerte. Este teorema tiene consecuencias inmediatas en la existencia de un número infinito de órbitas periódicas en el problema restringido de los tres cuerpos. Poincaré no pudo confirmar su sospecha, y constituyó una gran hazaña de los matemáticos americanos el que, al año siguiente, G. D. Birkhoff consiguiera dar una demostración. Desde

entonces, los métodos topológicos se aplican con gran éxito al estudio del comportamiento cualitativo de los sistemas dinámicos.

5. Nudos.—Como último ejemplo, indicaremos que el estudio de los nudos ofrece difíciles problemas matemáticos de carácter topológico. Un nudo se hace entrelazando un trozo de cuerda, después de lo cual se unen los extremos. La curva cerrada resultante representa una figura geométrica que sigue siendo esencialmente la misma después de deformar o retorcer la cuerda, sin romperla. Pero ¿cómo es posible dar una caracterización intrínseca que permita distinguir una curva cerrada, con nudos, situada en el espacio, de otra sin ellos, como, p. ej., una circunferencia? La respuesta no es en modo alguno sencilla y menos todavía lo es el análisis matemático completo de las

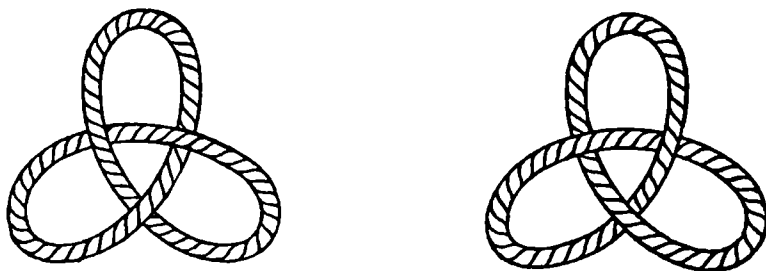


FIG. 134.—Nudos topológicamente equivalentes, que no se pueden deformar uno en el otro.

distintas clases de nudos y de sus diferencias mutuas. Aun para los casos más sencillos esto ha resultado una tarea ímproba. Considérense los dos nudos triples que aparecen en la figura 134. Ambos son completamente simétricos, «imágenes especulares» uno del otro; son topológicamente equivalentes, pero no congruentes. Surge el problema de saber si es posible deformar uno de estos nudos en el otro de una forma continua. La respuesta es negativa, pero la demostración de este hecho requiere mayores conocimientos de la técnica topológica y de la teoría de grupos que es posible dar aquí.

IV. CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA DE LAS SUPERFICIES

1. Género de una superficie.—Al estudiar las superficies de dos dimensiones se plantean muchos e importantes problemas topológicos; p. ej., comparemos la superficie de una esfera con la de un toro.

Resulta evidente, de la figura 135, que ambas superficies difieren de un modo fundamental. Sobre la esfera, como en el plano, toda curva simple cerrada, tal como C , divide a la superficie en dos partes, mientras que en el toro existen curvas cerradas, tales como C' , que no

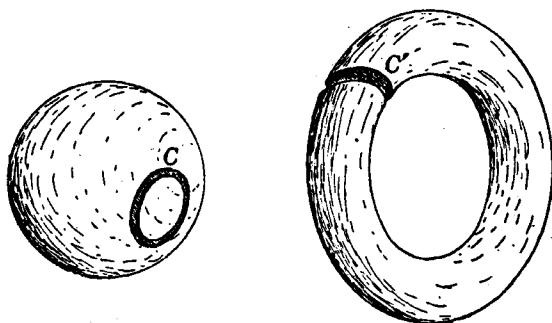


FIG. 135. — Cortes en la esfera y el toro.

dividen a la superficie en dos partes. Decir que C divide a la superficie esférica en dos partes significa que, si ésta se corta a lo largo de C , se obtendrán dos trozos distintos e inconexos, lo que equivale a poder encontrar dos puntos de la superficie esférica tales que cualquier curva esférica que los una deba cortar a C . Por otra parte, si se corta el toro a lo largo de la curva cerrada C' , la superficie resultante se mantiene todavía unida; cualquier punto de la superficie puede unirse con otro de la misma, mediante una curva que no corta a C' .

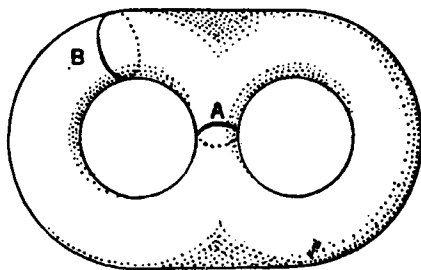


FIG. 136. — Superficie de género 2.

Esta diferencia entre la esfera y el toro nos dice que ambos tipos de superficies son topológicamente distintos y nos prueba que es imposible transformar una en la otra de una manera continua.

Consideremos ahora la superficie con dos agujeros representada en la figura 136. En ella se pueden trazar *dos* curvas cerradas, A y B , no mutuamente secantes, que no dividen a la superficie; en cambio, el toro queda dividido siempre en dos partes por dos cualesquiera de tales curvas. Por otra parte, *tres* curvas cerradas, que no se corten entre sí, dividen siempre a una superficie con dos agujeros.

Estos hechos nos inducen a definir el *género* de una superficie como el número máximo de curvas simples cerradas, no secantes entre sí, que pueden trazarse sobre la superficie sin dividirla. El género de la esfera es 0, el del toro es 1, mientras que el de la superficie de la figura 136 es 2. Una superficie similar con p agujeros tiene género p . El género es una propiedad topológica de una superficie que permanece invariable al deformarla. Recíprocamente, puede probarse (omitimos la demostración) que si dos superficies cerradas tienen el mismo género, es posible deformar una en la otra, por lo que el género $p = 0, 1, 2, \dots$ de una superficie cerrada la caracteriza completamente desde el punto de vista topológico. (Suponemos que las superficies consideradas son superficies cerradas ordinarias de «dos caras». Más adelante consideraremos superficies de «una sola cara».) Por ejemplo, el buñuelo con dos agujeros y la esfera con dos *asas* de la figura 137 son ambas superficies cerradas de género 2; y es evidente que se puede deformar con continuidad cualquiera de las dos hasta obtener la otra. Puesto que el buñuelo con p agujeros, o su equivalente, la esfera de p asas, es de género p , podemos tomar cualquiera de ellas como representante topológico de todas las superficies cerradas de género p .

***2. Caracterización euleriana de una superficie.**—Supongamos que una superficie cerrada S de género p se divide en un cierto número de



FIG. 137.— Superficies de género 2.

regiones, marcando vértices sobre S y uniéndolos por arcos de curva. Vamos a demostrar que

$$V - A + C = 2 - 2p, \quad [1]$$

donde V = número de vértices, A = número de arcos y C = número de regiones. El número $2 - 2p$ se llama *característica de Euler* de la superficie. Ya hemos visto que para la esfera $V - A + C = 2$, lo que coincide con [1], pues en este caso, $p = 0$.

Para demostrar la fórmula general [1] podemos suponer que S es una esfera de p asas, pues, como ya hemos dicho, cualquier superficie de género p puede deformarse continuamente en tal superficie, y

durante esta deformación permanecerán invariables los números $V - A + C$ y $2 - 2p$. Elegiremos la deformación de tal manera que las curvas cerradas $A_1, A_2, B_1, B_2 \dots$, por donde las asas se unen a la esfera, estén formadas por arcos de la subdivisión dada (véase figura 138, que aclara la demostración para el caso $p = 2$).

Cortemos ahora la superficie S a lo largo de las curvas $A_2, B_2 \dots$ y enderecemos las asas. Cada una tendrá una arista libre, limitada por una nueva curva A^*, B^*, \dots con el mismo número de vértices y arcos que $A_2, B_2 \dots$, respectivamente. Por tanto, $V - A + C$ no variará, puesto que los nuevos vértices adicionales compensarán exactamente

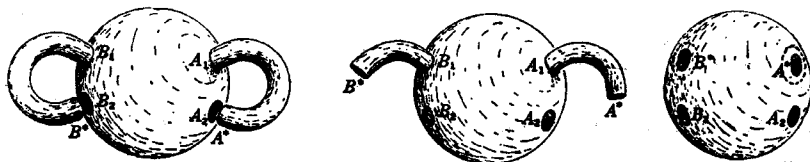


FIG. 138.

los nuevos arcos, en tanto que no se crean así nuevas regiones. Deformemos ahora la superficie achatando las asas salientes, hasta que la superficie resultante sea simplemente una esfera, de la cual se han suprimido $2p$ regiones. Como $V - A + C$ es igual a 2 para cualquier subdivisión de la esfera completa, tendremos

$$V - A + C = 2 - 2p$$

para la esfera de la que se han suprimido $2p$ regiones, o sea, también para la primitiva esfera de p asas, según queríamos demostrar.

La figura 121 aclara la aplicación de la fórmula [1] para una superficie S compuesta por polígonos planos. Dicha superficie puede deformarse continuamente hasta convertirla en un toro, de tal forma que el género p sea igual a 1 y se tenga: $2 - 2p = 2 - 2 = 0$. Como prevé la fórmula [1]

$$V - A + C = 16 - 32 + 16 = 0.$$

Ejercicio: Subdivídase en regiones el buñuelo con dos agujeros de la figura 137 y demuéstrese que $V - A + C = -2$.

3. Superficies uniláteras.—Una superficie ordinaria tiene siempre dos caras, lo cual se aplica tanto a las superficies cerradas (la esfera o el toro) como a las superficies limitadas por curvas (el disco, o un toro del cual se ha suprimido un pedazo). Las dos caras de una su-

perficie de esa clase podrían pintarse de distintos colores para distinguirlas. Si la superficie es cerrada, los dos colores quedan separados; si está limitada por curvas, los dos colores se encuentran sólo a lo largo de éstas. Un insecto que caminase por una de esas superficies,

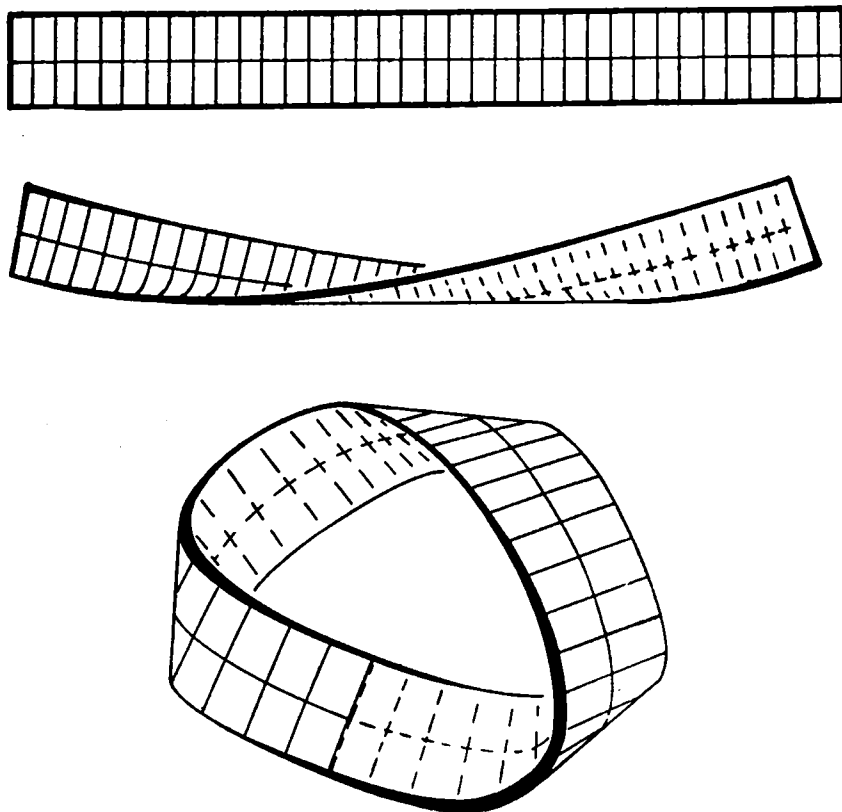


FIG. 139. — Construcción de la cinta de Moebius.

y al que se le impidiera atravesar las curvas que forman el contorno (si existe), permanecería siempre sobre la misma cara.

Moebius hizo el descubrimiento sorprendente de que existen superficies de una *sola* cara. La más sencilla de dichas superficies, llamada cinta o banda de Moebius, se forma tomando una tira larga y rectangular de papel y pegando sus dos extremos después de darle media vuelta, como indica la figura 139. Un insecto que recorriera

esta superficie, manteniéndose siempre en el eje de la cinta, volvería a su posición de partida.

La banda de Moebius tiene sólo un borde, pues su frontera consiste en una curva cerrada única. La superficie ordinaria de dos caras, formada pegando los dos extremos de un rectángulo, sin retorcerlo, está limitada por dos curvas distintas. Si se corta esta última banda, a lo largo de la línea central, se descompone en otras dos bandas del mismo tipo. Pero si se corta la superficie de Moebius a lo largo de dicha línea (Fig. 139), vemos que sigue siendo de una sola pieza. No es fácil que quien no conozca previamente la superficie de Moebius prevea esto, pues es opuesto a lo que la intuición nos dice que «debería» ocurrir. Si la superficie que resulta después de cortar la cinta de Moebius a lo largo de su eje se corta de nuevo en

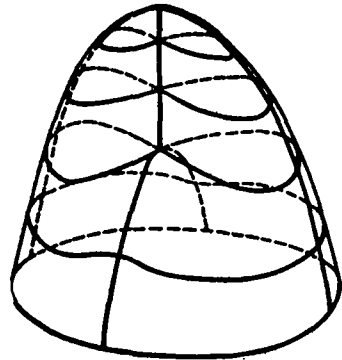


FIG. 140.—Cofia cruzada.

igual forma, resultan dos nuevas superficies del mismo tipo, pero entrelazadas.

Constituye un pasatiempo entretenido cortar dichas superficies a lo largo de líneas paralelas al borde a una distancia de $1/2$, $1/3$, etc., de la anchura total. El contorno de la cinta de Moebius es una curva cerrada, simple y sin nudos, que puede convertirse por deformación en una curva plana; p. ej., una circunferencia. Al efectuar la deformación puede permitirse que la superficie se corte a sí misma, de modo que resulte una superficie de una sola cara que se corta a sí misma, como está representada en la figura 140 (cofia cruzada). Se considera que la línea de autointersección está compuesta en realidad de otras dos, cada una

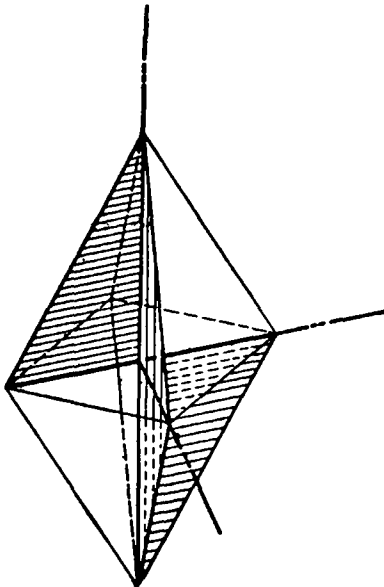


FIG. 141.—Cinta de Moebius de contorno plano triangular.

de ellas perteneciente a una de las dos porciones que se cortan en ella. La unilateralidad de la cinta de Moebius queda conservada, puesto que dicha propiedad es topológica; es imposible deformar continuamente una superficie de una sola cara en otra de dos caras. Aunque resulta sorprendente, es posible realizar la deformación de manera que el contorno de la cinta de Moebius se haga plano (p. ej., triangular), mientras la banda permanece sin cortarse a sí misma. La figura 141 representa dicho modelo, que ha sido ideado por B. Tuckermann. El contorno es un triángulo, mitad de un cuadrado diagonal de un octaedro regular. La banda consta de seis caras del octaedro y cuatro triángulos rectángulos, cada uno un cuarto de un plano diagonal.

Otra superficie unilátera interesante es la *botella de Klein*. Es una superficie cerrada, pero no tiene ni exterior ni interior. Topológicamente equivale a un par de cofias cruzadas, cuyos contornos coinciden.

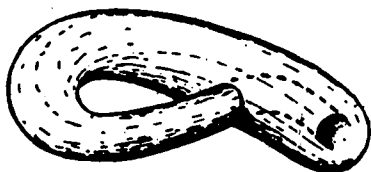


FIG. 142.—Botella de Klein.

Puede demostrarse que cualquier superficie cerrada, de una sola cara, de género $p = 1, 2, \dots$, es topológicamente equivalente a una esfera, en la cual se han suprimido

p discos y se los ha reemplazado por otras tantas cofias cruzadas. De ahí se deduce fácilmente que la característica euleriana $V - A + C$ de una superficie de ese tipo está relacionada con p por la ecuación

$$V - A + C = 2 - p.$$

La demostración es análoga a la correspondiente para superficies de dos caras. Demostraremos, primero, que la característica euleriana de una cofia cruzada, o de una cinta de Moebius, es 0. Para conseguirlo, observaremos que si se corta de través una superficie de Moebius, subdividida previamente en un cierto número de regiones, se obtiene un rectángulo que contiene dos vértices más, una arista más y el mismo número de regiones que la superficie de Moebius. Para el rectángulo, $V - A + C = 1$, como se ha visto en la página 251. De ahí que, para la superficie de Moebius, sea $V - A + C = 0$. El lector puede completar la demostración como ejercicio.

Resulta mucho más sencillo estudiar la naturaleza topológica de superficies como éstas mediante polígonos planos, en los cuales se identifican conceptualmente ciertos pares de aristas (véase Cap. IV, Apéndice). En los diagramas de la figura 143 las flechas se hacen coincidir, real o conceptualmente, en posición y dirección.

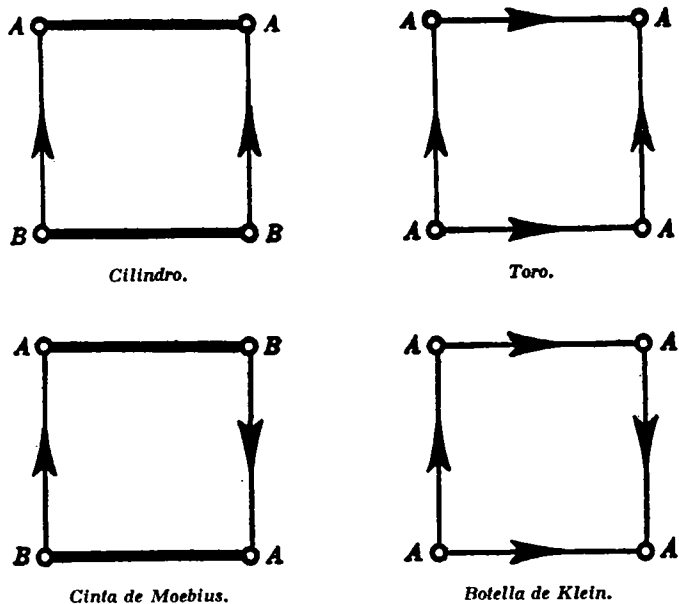


FIG. 143.—Superficies cerradas definidas por coordinación de aristas en una figura plana.

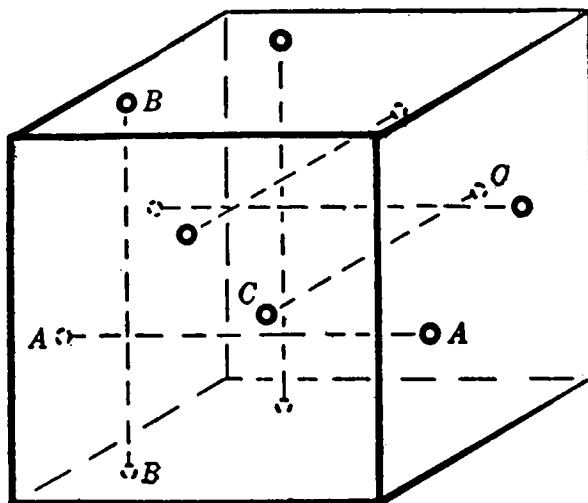


FIG. 144.—Toro tridimensional definido por identificación de contorno.

Puede utilizarse también este método de identificación para definir variedades cerradas tridimensionales, análogas a las superficies cerradas bidimensionales; p. ej., si identificamos los puntos correspondientes de las caras opuestas de un cubo (Fig. 144), obtenemos una variedad cerrada tridimensional, llamada toro tridimensional. Esta variedad equivale topológicamente al espacio comprendido entre dos toros

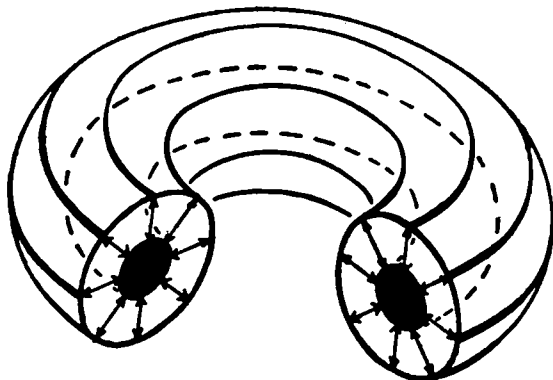


FIG. 145.—Otra representación del toro tridimensional (la sección indica la identificación).

concéntricos, uno dentro del otro, en el cual se identifican los puntos correspondientes de ambas superficies (Fig. 145). Esta última variedad resulta a partir de un cubo en el cual se hagan coincidir dos pares de caras identificadas conceptualmente.

APÉNDICE

***1. El teorema de los cinco colores.**—Basándonos en la fórmula de Euler podemos demostrar que es posible iluminar adecuadamente cualquier mapa sobre una superficie esférica utilizando, a lo más, cinco colores distintos. (Según lo dicho en la pág. 258, se considera que un mapa está adecuadamente iluminado si dos regiones contiguas, que tienen como límite común todo un segmento de sus fronteras, no están pintadas con el mismo color.) Nos limitaremos a aquellos mapas cuyas regiones están limitadas por polígonos simples cerrados, compuestos de arcos circulares. Podemos suponer también que en cada vértice se encuentran exactamente tres arcos; diremos que un mapa de este tipo es *regular*. Si reemplazamos cada vértice en el que concurran más de tres arcos por un pequeño círculo y unimos el interior

de cada uno de esos círculos a una de las regiones que se encuentran en el vértice, tenemos un nuevo mapa, en el cual los vértices múltiples vienen reemplazados por un cierto número de vértices triples. El nuevo mapa contendrá el mismo número de regiones que el primitivo. Si este nuevo mapa, que es regular, se puede iluminar adecuadamente con cinco colores, haciendo que disminuya el radio de los círculos hasta convertirse en puntos, tendremos iluminado en la forma deseada el mapa primitivo. Por ello, basta demostrar que cualquier mapa regular sobre la superficie esférica puede iluminarse con cinco colores.

En primer lugar, demostraremos que todo mapa regular debe contener al menos un polígono de menos de seis lados. Sea F_n el número de regiones de n lados en un mapa regular; si es C el número total de regiones,

$$C = F_2 + F_3 + F_4 + \dots \quad [1]$$

Cada arco tiene dos extremos y en cada vértice se encuentran tres arcos. De ahí que si A indica el número de arcos del mapa y V el de vértices,

$$2A = 3V. \quad [2]$$

Además, una región limitada por n arcos tiene n vértices, y cada vértice pertenece a tres regiones, por lo que

$$2A = 3V = 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \dots \quad [3]$$

Por la fórmula de Euler, se tiene

$$V - A + C = 2, \quad \text{o} \quad 6V - 6A + 6C = 12.$$

De [2] se deduce que $6V = 4A$, por lo que $6C - 2A = 12$.

Por tanto, de [1] y [3] resulta:

$$6(F_2 + F_3 + F_4 + \dots) - (2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \dots) = 12,$$

o

$$(6 - 2)F_2 + (6 - 3)F_3 + (6 - 4)F_4 + (6 - 5)F_5 + (6 - 6)F_6 + (6 - 7)F_7 + \dots = 12.$$

Por lo menos uno de los términos del primer miembro debe ser positivo, así que, al menos, uno de los números F_2, F_3, F_4, F_5 es positivo, como queríamos demostrar.

Vamos a probar ahora el teorema de los cinco colores. Sea M un mapa regular cualquiera sobre la superficie esférica, que tiene en total n regiones. Sabemos que por lo menos una de estas regiones debe tener menos de seis lados.

Caso 1. M contiene una región A de 2, 3 ó 4 lados. En este caso, se suprime la frontera entre A y una de las regiones limítrofes. (Si A tiene cuatro lados, una región puede extenderse y tocar dos lados de A no adyacentes. En este caso,

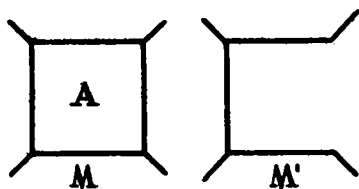


FIG. 146.

por el teorema de la curva de Jordan, quedarán diferenciadas las regiones que tocan los otros dos lados de A , y suprimimos la frontera entre A y una de las últimas regiones.)

El mapa resultante, M' , será regular, con $n - 1$ regiones. Si M' se puede iluminar con cinco colores, lo mismo puede hacerse con M . Dado que a lo más cuatro regiones de M limitan con A , siempre podremos encontrar un quinto color para A .

Caso 2. M contiene una región A con cinco lados. Consideremos las cinco regiones limítrofes con A y llamémoslas B , C , D , E , y F . Podremos encontrar siempre entre ellas un par sin frontera común; pues si, p. ej., B y D se tocan, impiden que C toque a E o F , ya que

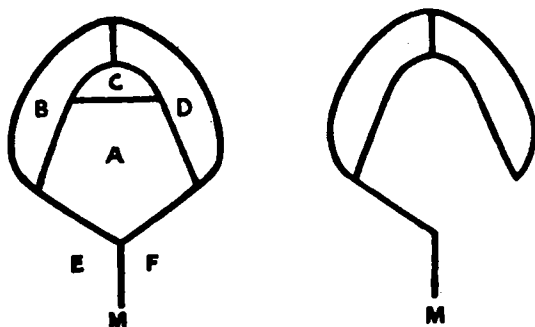


FIG. 147.

cualquier camino que conduzca de C a E o F tendrá que atravesar por lo menos una de las regiones A , B o D (Fig. 147). (Es evidente que este hecho depende también del teorema de la curva de Jordan, cierto para el plano o la esfera, pero no válido para el toro, p. ej.) En consecuencia, podemos suponer que, p. ej., C y F no se tocan. Suprimimos los lados de A que limitan con C y F , formando así un nuevo mapa M' con $n - 2$ regiones, que también es regular. Si el nuevo mapa se puede iluminar con cinco colores, puede hacerse lo mismo con el mapa original M . Pues cuando se restablecen las fronteras, A

no estará en contacto con más de cuatro colores diferentes, ya que C y F tienen el mismo color, y siempre podremos encontrar un quinto color para A .

Así, en cualquiera de los casos, si M es un mapa regular de n regiones, podemos construir otro nuevo mapa regular, M' , que tiene $n - 1$ ó $n - 2$ regiones, y tal que si se puede iluminar M' con cinco colores, cabe hacer lo mismo con M . Este proceso se puede aplicar también a M' , etc., lo que conduce a una sucesión de mapas deducidos de M :

$$M, M', M'', \dots$$

Dado que el número de regiones de esta sucesión de mapas decrece constantemente, debemos llegar al fin a un mapa con no más de cinco regiones, el cual se puede siempre iluminar con cinco colores a lo sumo. De ahí, volviendo paso a paso hasta M , vemos que también éste puede iluminarse con cinco colores, con lo que queda terminada la demostración. Obsérvese que la prueba es constructiva, ya que proporciona un método perfectamente practicable, aunque laborioso, para iluminar efectivamente cualquier mapa de n regiones en un número finito de pasos.

2. El teorema de la curva de Jordan para polígonos.—El teorema de Jordan dice que cualquier curva simple y cerrada C divide a los puntos del plano no situados sobre C en dos recintos distintos (que no tienen punto alguno común), de los cuales C es la frontera común. Daremos una demostración de este teorema para el caso en que C sea un polígono cerrado P .

Probaremos que los puntos del plano que no se hallan sobre P quedan subdivididos en dos clases, A y B , de tal manera que dos puntos cualesquiera de la misma clase pueden unirse mediante una poligonal que no corta a P , mientras que cualquier poligonal que una un punto de A con otro de B debe cortar a P . La clase A formará el «exterior» del polígono, mientras que la B constituye el «interior».

Iniciaremos la demostración eligiendo una dirección fija en el plano, no paralela a ninguno de los lados de P ; como P tiene un número finito de lados, esto es siempre posible. Definiremos ahora las clases A y B en la forma siguiente:

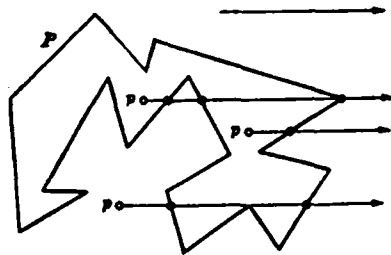


FIG. 148.—Cómputo de intersecciones.

El punto p pertenece a A si el rayo que pasa por p en la dirección prefijada corta a P en un número *par* de puntos 0, 2, 4, 6, ... El punto p pertenece a B si el rayo que pasa por p en dicha dirección corta a P en un número *impar* de puntos 1, 3, 5, ...

En lo que respecta a las rayos que pasan por los vértices de P , no los contaremos como intersecciones si los lados de P que se cortan en ellos se encuentran del mismo lado del rayo; pero consideraremos que hay intersección si ambos lados se encuentran en distinta parte del rayo. Diremos que dos puntos, p y q , tienen la misma «paridad» si pertenecen a la misma clase, A o B .

Observaremos, en primer lugar, que todos los puntos de un segmento rectilíneo que no corta a P tienen la misma paridad. Pues la paridad de un punto p que se mueve a lo largo de un tal segmento, puede cambiar sólo cuando el rayo en la dirección fija trazado por p pasa por un vértice de P ; y en ninguno de los casos posibles cambiará

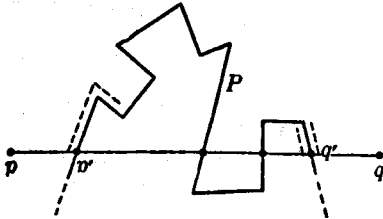


FIG. 149.

la paridad, debido al convenio que acabamos de hacer. De esto se deduce que si se une un punto p_1 de A con otro p_2 de B mediante una poligonal, ésta debe cortar a P ; pues en otro caso, la paridad de todos los puntos de la trayectoria, y en particular de p_1 y p_2 , sería la misma. Además, podemos demostrar que dos puntos cuales-

quiera de la misma clase, A o B , pueden unirse mediante una poligonal que no corta a P . Sean p y q los dos puntos; si el segmento rectilíneo pq , que une p con q , no corta a P , es la poligonal buscada. En caso contrario, sea p' el primer punto de intersección de ese segmento con P , y q' el último (Fig. 149). Construyamos la poligonal que arranca de p , a lo largo del segmento pp' , que se desvía antes de llegar a p' , y sigue a lo largo de P hasta que P encuentra a pq en q' . Si podemos demostrar que esta poligonal corta a pq entre q' y q y no entre p' y q' , podrá continuarse aquélla hacia q , siguiendo $q'q$, sin cortar a P . Es evidente que dos puntos cualesquiera, r y s , muy próximos entre sí, pero a distinto lado de algún segmento de P , deben tener distinta paridad, pues el rayo que pasa por r cortará a P en un punto más que el rayo que pasa por s . Vemos así que la paridad cambia cuando atravesamos el punto q' a lo largo del segmento pq . Se sigue de ello que la poligonal de trazos debe cortar a pq entre q' y q , ya que

p y q (y, en consecuencia, cualquier otro punto de la línea de trazos) tienen la misma paridad.

Esto completa la demostración del teorema de la curva de Jordan para el caso de un polígono P . Puede identificarse ahora el «exterior» de P con la clase A , puesto que si nos alejamos lo suficiente a lo largo de un rayo cualquiera en la dirección fijada, llegaremos a un punto más allá del cual no existirá intersección con P , por lo que todos esos puntos tienen paridad 0, y pertenecen a A . Esto identifica el «interior» de P con la clase B . No importa lo complicado que sea el polígono P , pues siempre podremos determinar si un punto dado p del plano está dentro o fuera de P , trazando un rayo y contando el número de sus intersecciones con P . Si éste es impar, el punto p se encuentra dentro de P , y no puede salir de su interior sin atravesar P en algún punto. Si el número de puntos de intersección es par, el punto p es exterior a P (véase Fig. 128).

*Se puede demostrar el teorema de la curva de Jordan para los polígonos de la siguiente manera: defínase el *orden* de un punto p_0 respecto a una curva cerrada cualquiera C , que no pasa por p_0 , como el número de revoluciones completas que efectúa el radio vector que une p_0 con un punto móvil p' sobre la curva, mientras éste recorre toda la curva una sola vez. Sea

A = el conjunto de los puntos p_0 que no se encuentran sobre P y que tienen un orden *par* respecto a P ,

B = el conjunto de los puntos p_0 que no se encuentran sobre P y que tienen un orden *impar* respecto a P .

Entonces, los conjuntos A y B así definidos forman, respectivamente, el exterior y el interior de P . Se deja como ejercicio al lector efectuar la demostración con detalle.

****3. El teorema fundamental del álgebra.**—El «teorema fundamental del álgebra» dice que si

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1z + a_0 \quad [1]$$

es un polinomio, en el cual $n \geq 1$ y $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$, números complejos cualesquiera, existe un número complejo α tal que $f(\alpha) = 0$. Dicho de otra manera: *en el campo de los números complejos, toda ecuación polinómica tiene una raíz.* [Vimos en la pág. 110 que de ello se deduce la posibilidad de descomponer $f(z)$ en el producto de n factores lineales:

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, los *ceros* de $f(z)$.] Es notable que este teorema pueda demostrarse mediante consideraciones de carácter topológico, relacionadas con las que se utilizaron para demostrar el teorema de Brouwer del punto fijo.

Recordará el lector que un número complejo es un símbolo $x+iy$,

en el cual, tanto x como y son números reales e i tiene la propiedad de que $i^2 = -1$. Puede representarse el número complejo $x + iy$ mediante el punto del plano cuyas coordenadas, respecto a un par de ejes perpendiculares, son x e y . Si en ese plano introducimos coordenadas polares, tomando el origen y la dirección positiva del eje de las x como polo y eje polar respectivamente, podemos escribir:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Se deduce de la fórmula de De Moivre que

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

(véase pág. 105). Así, pues, si hacemos que el número complejo z describa una circunferencia de radio r y centro en el origen, z^n describirá n veces una circunferencia completa de radio r^n mientras z describe la suya una sola vez. Recordemos también que r , módulo de z ,

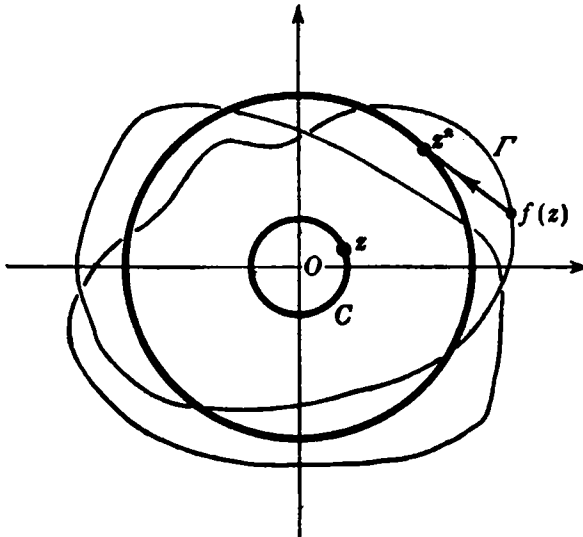


Fig. 150.—Demostración del teorema fundamental del álgebra.

que se expresa mediante el símbolo $|z|$, da la distancia de z a O , y que si $z' = x' + iy'$, la distancia entre z y z' es $|z - z'|$. Después de estos preliminares, podemos proceder a la demostración del teorema.

Supongamos que el polinomio [1] no tiene raíces, de donde resulta que para todo número complejo z se tiene:

$$f(z) \neq 0.$$

Supuesto esto, si hacemos que z describa cualquier curva cerrada en el plano x, y , $f(z)$ describirá una curva cerrada Γ , que no pasará por el origen (Fig. 150). Podemos, por tanto, definir el *orden* del origen O respecto a la función $f(z)$ para cualquier curva cerrada C como el *número total de revoluciones completas que efectúa el radio vector que une O con un punto de la curva Γ trazada por el punto representativo de $f(z)$, mientras z recorre la curva C* . Como curva C tomaremos una circunferencia de centro O y de radio t y definimos la función $\varphi(t)$ como el orden de O respecto a la función $f(z)$ para el círculo de centro O y radio t . Es evidente que $\varphi(0) = 0$, puesto que un círculo de radio igual a cero es un punto y la curva Γ se reduce al punto $f(0) \neq O$. En el próximo párrafo demostraremos que $\varphi(t) = n$ para valores grandes de t . Pero el orden $\varphi(t)$ depende de continuidad de t , ya que $f(z)$ es una función continua de z . De ahí resulta una contradicción, pues la función $\varphi(t)$ sólo puede tomar valores enteros y, en consecuencia, no puede pasar con continuidad del valor 0 al valor n .

Queda sólo por probar que $\varphi(t) = n$ para valores grandes de t . Obsérvese que en un círculo de radio $z = t$, tal que

$$t > 1 \quad \text{y} \quad t > |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|,$$

tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} |f(z) - z^n| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| < |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \\ &+ |a_{n-2}| \cdot |z|^{n-2} + \dots + |a_0| = t^{n-1} \left[|a_{n-1}| + \dots + \frac{|a_0|}{t^{n-1}} \right] < \\ &< t^{n-1} [|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|] < t^n = |z^n|. \end{aligned}$$

Dado que el primer miembro es la distancia entre los puntos z^n y $f(z)$, mientras el último es la distancia del punto z^n al origen, vemos que el segmento rectilíneo que une los dos puntos $f(z)$ y z^n no puede pasar por el origen en tanto z se encuentre sobre la circunferencia de radio t y centro en el origen. Siendo esto así, podemos deformar continuamente la curva trazada por $f(z)$ hasta obtener la descrita por z^n , sin pasar nunca por el origen, trasladando simplemente todo punto de $f(z)$ a lo largo del segmento que lo une con z^n . Como el orden del origen varía con continuidad y puede tomar sólo valores enteros durante esa deformación, debe ser el mismo para ambas curvas. Como el orden de z^n es n , el de $f(z)$ ha de ser también n , con lo que la demostración queda ultimada.