Exámen parcial 1
Soluciones de Parte I

Jueves, 25 feb, 2010

Duración del exámen: 90 minutos.

Parte I. "Cierto o Falso". (60 pts)

En caso de "cierto"hay que dar una breve explicación (no es necesario dar una demostración rigurosa completa). En caso de "falso"solo hay que dar un contra ejemplo (sin mayores explicaciones).

1. Si dos enteros $a, b > 1$ son primos relativos entonces por lo menos uno de ellos es primo.

   $\triangleright$ Falso. $a = 4$, $b = 9$. $\square$

2. Dados cualquer 3 dígitos d_1, d_2, d_3 (cada d_i es un dígito entre 0 y 9), existe un múltiplo de 13 que termina con $d_1d_2d_3$.

   $\triangleright$ Cierto. Si $a := d_1d_2d_3$, entonces se requiere encontrar un x tal que $13x \equiv a \bmod 1000$. Como $(13, 1000) = 1$, 13 tiene un recíproco mod 1000, digamos b, por lo que $x \equiv ba \bmod 1000$. $\square$

3. Un entero es impar si su representación en una base termina con 1.

   $\triangleright$ Falso. $(4)_3 = 11$. $\square$

4. Si $a, b, n \in \mathbb{Z}$ tal que $a|n$, $b|n \implies ab|n$.

   $\triangleright$ Falso. $a = b = n = 2$. $\square$

5. Si un entero a divide a un entero b entonces a divide a todos los múltiplos de b.

   $\triangleright$ Cierto. $a|b \implies b = am$ para algun $m \implies$ para todo entero k, $bk = a(mk) \implies a|bk$. $\square$

6. Si el resíduo de un número entero positivo n al dividirlo entre 19 es 18, entonces n no puede ser un múltiplo de 17.

   $\triangleright$ Falso. $n = 170$.

   Explicación. Para buscar tal n, buscamos un x tal que $n = 17x \equiv 18 \bmod 19$. Como $(17, 19) = 1$, 17 tiene un recíproco mod 19, digamos a. Así que $x \equiv 18a \bmod 19$. Para encontrar a (el recíproco de 17 mod 19), notamos que $17 \equiv -2 \bmod 19$, un obvio recíproco de 2 es 10, así que $a \equiv -10$ y $x \equiv 18 \cdot (-10) \cdot (-1)(-10) = 10$. De aquí, $n = 17x = 170$. $\square$

7. Si la representación de dos números enteros positivos m, n en base 5 termina con los mismos 3 dígitos entonces su diferencia $m - n$ es un múltiplo de 125.

   $\triangleright$ Cierto. Si $m = a_0 + 5a_1 + 5^2a_2 + 5^3a_3 + \ldots$, $n = b_0 + 5b_1 + 5^2b_2 + 5^3b_3 + \ldots$, entonces $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, así que $m - n = 5^3[(a_3 - b_3) + 5(a_4 - b_4) + \ldots]$, lo cual es un múltiplo de $5^3 = 125$. $\square$

8. Si un entero n no es un múltiplo de 119 entonces n tiene un recíproco módulo 119.

   $\triangleright$ Falso. $n = 7$. (Nota que $(7, 119) = 7$ por lo que 7 no tiene un recíproco mod 119.) $\square$

9. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que $(a, 24) = 1$ y $a \equiv b \bmod 24 \implies (b, 24) = 1$.

   $\triangleright$ Cierto. $a \equiv b \bmod 24 \implies 24|a - b \implies$ existe un k tal que $a - b = 24k \implies a = b + 24k$. Luego, si $d|b, 24 \implies d|b + 24k = a \implies d|a, 24 \implies d \leq 1 \implies (b, 24) = 1$. $\square$

10. Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tal que $a|bc \implies a|b$ ó $a|c$.

    $\triangleright$ Falso. $a = 4$, $b = c = 2$. $\square$

Parte II. Resolver uno de los siguientes 3 problemas. (40 pts)

1. Formular y demostrar el Teorema Fundamental de la Aritmética.
2. Demuestra: existe una infinidad de primos de la forma $4k + 3$.
3. Demuestra: $a, b \in \mathbb{Z}$ son primos relativos si y solo si existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax + by = 1$.