Notas núm. 1

6 dic, 2010

Temario del curso:

- Lunes, 6 dic: Definición y ejemplos de grupos de Lie y acciones de grupos de Lie.
- Martes, 7 dic: El álgebra de Lie.
- Miercoles, 8 dic: Representaciones lineales.

Los ejercicios están marcados con →.

Definición de grupo de Lie

Definición. Un **grupo de Lie** es un grupo con una estructura de variedad diferencial tal que la multiplicación y la inversa son funciones suaves. Un **homomorfismo** de grupo de Lie es un homomorfismo de grupos que es suave.

Ejemplos.

- $\mathbb{R}^n$, con adición, es un grupo de Lie conexo no compacto de dimensión n.
- S^1=números complejos de magnitud 1, con multiplicacion de números complejos, es un grupo de Lie compacto conexo.
- $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ es un grupo de Lie conexo compacto de dimensión=n.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$=matrices invertibles $n \times n$ con entradas reales. Como un subconjunto abierto del espacio de las matrices $n \times n$ es claramento una variedad diferencial de dimension n^2. La multiplicación es una función cuadrática y la inversa racional, así que son suaves. Es un grupo no compacto con dos componentes conexas (det> 0 y det< 0).
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$=matrices invertibles $n \times n$ con entradas complejas. Es no compacto y conexo de dimension $2n^2$.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$=matrices invertibles $n \times n$ con entradas cuaterniona. Es no compacto y conexo de dimension $4n^2$.
- $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ y $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ son las matrices $n \times n$ con entradas reales (resp. complejas) con determinante 1. Es de dimension $n^2 - 1$ (resp $2n^2 - 2$).
- O_n=matrices reales $n \times n$ ortogonales, ie $AA^t = I$. Es compacto, de dos componentes, de dimensión $n(n-1)/2$.
- SO_n=matrices reales $n \times n$ ortogonales con det=1. Es la componente de la identidad de O_n.
- U_n=matrices complejas $n \times n$ unitarias, ie $A\bar{A}^t = I$. Es compacto conexo de dimension n^2.
- SU_n=matrices complejas $n \times n$ unitarias, con det=1. Es compacto conexo de dimension $n^2 - 1$.

→**1.1.** U_1 es isomorfo a S^1, a SO_2 y a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

→**1.2.** Encuentra entre los ejemplos arriba los que son grupos conmutativos.

El ejemplo más importante en esta lista (y en la teoría en general) es sin duda $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Un subgrupo cerrado de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ se llama un **grupo de matrices** y todos los ejemplos arriba, excepto los primeros 3, son grupos de matrices. Aun los primeros 3 son isomorfos a grupos de matrices.

→**1.3.** Encuentra isomorfismos entre los primeros 3 ejemplos y grupos de matrices.

Se puede considerar a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ como subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ o $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ de manera obvia, pero tambien a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$) como subgrupo de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GL}_{4n}(\mathbb{R})$).

→**1.4.** Encuentra isomorfismos explicitos entre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H})$ y grupos de matrices.

Hay un teorema muy útil (pero algo avanzado) que afirma que un subgrupo cerrado de un grupo de Lie es automaticamente una subvariedad, asi que un grupo de Lie, y con eso se establece facilmente que todos los ejemplos arriba son grupos de Lie. Pero aun sin este teorema basta con el teorema de la función implicita para los ejemplos arriba (ver más adelante). Durante todo el curso vamos a regresar a estos ejemplos.

Ahora un comentario acerca de la definición de un subgrupo de Lie. Es la única definición que no es obvia. La definición obvia sería “un subgrupo que es una subvariedad”, pero es demasiado restrictiva. El ejemplo típico excluido por esta definición es el subgrupo de $G = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ que es la imagen del homomorfismo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to G$ dado por $t \mapsto (t, t\sqrt{2})$. La imagen es un subgrupo de G que es denso en G pero no es cerrado, por lo que no es una subvariedad. La definición “correcta” no excluye este ejemplo (por buenas razones que vemos más tarde).

<u>**Definición**</u>. Un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G es una inmersión $H \to G$ de grupos de Lie (homomrfismo de grupos que es una inmersión de variedades).

Si $H \subset G$ es un subgrupo y subvariedad entonces la inclusión de H en G nos da la inmersión requerida.

Acciones de grupos de Lie

<u>**Definición**</u>. Una **acción suave** de un grupo de Lie G en una variedad M es una función suave $\rho : G \times M \to M$ tal que

- $\rho(g) := \rho(g, \cdot)$ es un difeomorfismo de M para todo $g \in G$,
- $g \mapsto \rho(g)$ es un homomorfismo entre G al grupo de difeomorfismos de M.

Otra manera de decirlo: si definimos $gx := \rho(g, x)$, entonces tenemos la “ley de asociatividad” $(gh)x = g(hx)$.

Si $M = V =$ un espacio vectorial y $\rho(g)$ es una transformación lineal para todo g la acción se llama una *representación lineal* (o simplemente una ”represenatción”). La representación es *irreducible* si los únicos subespacios de V invariantes bajo G son V y $\{0\}$.

<u>Ejemplos de acciones</u>

• Todo grupo actua en su mismo por translaciones por la izquierda, $x \mapsto gx$, por la derecha, $x \mapsto xg^{-1}$ y por conjugación $x \mapsto gxg^{-1}$. Para un grupo de Lie estas acciones son suaves.

• $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ viene equipado con una representación en $\mathbb{R}^n$. Mismo para cualquer subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (por restricción).

• $G = S_n$, el grupo de permutaciones de n objetos, viene equipado con una acción en el conjunto de los primeros n números $\{1, \dots, n\}$.

• Si G actua en M, se puede definir una representación lineal en el espacio vectorial V de todos las funciones en M por $[\rho(g)f](x) = f(g^{-1}x)$.

→**1.5.** La dimensión de V es la cardinalidad de M.

• Pensando en un vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como en una función $\{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, obtenemos una representación lineal en $\mathbb{R}^n$ del grupo de permutaciones de n objetos en $\mathbb{R}^n$.

• El grupo de isometrias de un cubo tiene una representación de dimensión 8 que viene de la acción en el conjunto de los vértices, otra de dimensión 12 que viene de la acción en el conjunto de aristas, otra de dimensión 6 que viene de la acción en el conjunto de las caras, otra de dimensión 3 que viene en la acción en el conjunto de los pares de caras opuestas, otra de dimensión 4 que viene de la acción en el conjunto de los diagonales...

→**1.6.** El grupo de isometrias de un cubo es isomorfo a S_4.

• La acción de un grupo G en su mismo por translaciones por la izquierda y la derecha induce una representación lineal de $G \times G$ en el espacio de las funciones en G. Se llama la **representación regular**.

→**1.7.** Determina los subconjuntos invariantes de la repersentación usual de $G = \mathrm{SO}_n$ en $V = \mathbb{R}^n$. Demustra que esta repersentación es irreducible. Mismo para la representación de U_n en $\mathbb{C}^n$.

→**1.8.** La representación lineal de SO_n en $\mathbb{R}^n$ es isomorfa a su dual. El mismo inciso para la acción de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$ es falso. (Sugerencia: considera el determinante de esta representación).

→**1.9.** La representación regular de un grupo finito de orden n tiene dimensión n. Es ismorfa a la suma directa de $\hat{n}$ representaciones irredicubles, donde $\hat{n}$ es el número de clases de equivalencia de representaciones irreducibles de G, que es lo mismo que el número de clases de conjugación de G. Para cada (clase de equivalencia de) representación irreducible U de G de dimensión d corresponde en la representación regular de $G \times G$ la representación irreducible $U \otimes U^*$ de dimensión d^2. La acción de $G \times G$ en $U \otimes U^*$ está dada por $(g, g')(v \otimes v^*) = (gv) \otimes (g'v^*)$. Una base para el espacio $U \otimes U^*$ está dada por las d^2 entradas de $G \to GL(U)$. Esta es una base ortonormal, y la representación regular es una representación ortogonal, con respecto al producto escalar $\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_g f_1(g) f_2(g)/n$. Ejemplos: $G = \mathbb{Z}_n$, $\hat{n} = n$; $G = S_3$, $n = 6$, $\hat{n} = 3$, $d = 1, 1, 2$; $G = S_4$, $n = 24$, $\hat{n} = 5$, $d = 1, 1, 2, 3, 3$; $G = S_5$, $n = 120$, $\hat{n} = 7$, $d = ?$

Referencia: el libro de J.P. Serre sobre representaciones de grupos finitos.

Repaso de variedades diferenciales

Definición. Una **variedad diferencial** M ....

Definición. Una **función suave** (o mapeo) entre variedades diferenciales $f : M \to N$ ....

Definición. Se denota por $C^\infty(M)$ el conjunto de las funciones suaves $M \to \mathbb{R}$. Es una álgebra conmutativa sobre $\mathbb{R}$ con unidad (la función constante 1).

Definición. Un **campo vectorial** X en M es una derivación $\mathbb{R}$-lineal de $C^\infty(M)$. O sea X es una tranformación $\mathbb{R}$-lineal de $C^\infty(M)$ que satisface $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$.

Esta es una definición algebraica y requiere una interpretación geométrica. Para $M = \mathbb{R}$, la derivada $f \mapsto f'$ es claramente una derivación de $C^\infty(\mathbb{R})$, i.e. campo vectorial, denotado por

$\frac{d}{dx}$. Tambien es claro que si X es un campo vectorial y $a \in C^\infty(M)$, tambien $aX : f \mapsto a(Xf)$ es un campo vectorial.

→**1.10.** Demuestra que todo campo vectorial en $\mathbb{R}$ es de la forma $X = a\frac{d}{dx}$, donde $a \in C^\infty(\mathbb{R})$, y que todo campo vectorial en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es de la forma $X = \sum_i a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$, donde $a_i \in C^\infty(U)$.

<u>**Definición**</u>. El conjunto de los **germenes de funciones** en un punto $x \in M$ se denota por $C_x(M)$ y se define como el conjunto de clases de equivalencia de pares (U, f) ("elementos de funciónes") donde U es una vecindad de x y f una función suave en U. Dos tales elementos de funciones son equivalentes si coinciden en una vecindad de x. Este conjunto es también una álgebra conmutativa sobre $\mathbb{R}$.

<u>**Definición**</u>. El **espacio tangente** en un punto $x \in M$, denotado por T_xM, es el espacio de las derivaciones $\mathbb{R}$-lineales $C_x(M) \to \mathbb{R}$. El **haz** (o fibrado) **tangente** de M es $TM = \bigcup_x T_xM$ (unión disjunta de espacios vectoriales, un espacio, o "fibra", para cada $x \in M$).

→**1.11.** T_xM es un espacio vectorial de dimension=dim M, con una base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$, donde $x_1, \ldots, x_n$ es un sistema de coordenadas en M en la vecindad de x.

→**1.12.** Para cada curva suave $\gamma : (a, b) \to M$ tal que $a < 0 < b$ y $\gamma(0) = x$ se define $\dot\gamma(0) : C_x(M) \to \mathbb{R}$ por $\dot\gamma(0)f = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(t))$ (el "vector de velocidad de γ en $t = 0$"). Entonces $\dot\gamma(0)$ es un elemento bien definido de T_xM y todo elemento de T_xM es de esta forma.

<u>**Definición**</u>. La **derivada** (o diferencial) de una función suave $\phi : M \to N$, $d\phi : TM \to TN$, se define por $d\phi(x) : T_xM \to T_yN$, donde $y = \phi(x)$ y $[d\phi(x)X]f := X(f \circ \phi)$.

→**1.13.** $d\phi$ está bien definida y $d\phi(x)$ es una transformación lineal $T_xM \to T_yN$. Encuentra la matriz de $d\phi(x)$ con respecto a bases de derivadas parciales con respecto a coordenadas en vecindades de x y $\phi(x)$ (resp.)

→**1.14.** Si U es un abierto en un espacio euclideano V demuestra que para todo $x \in U$ existe un isomorfismo lineal $V \to T_xU$ dado por $v \mapsto \dot\gamma_v(0)$, donde $\gamma_v(t) = x + tv$.

Ojo: el isomorfismo del último ejercicio es importante y se va usar durante todo el curso.

→**1.15.** Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entonces $dT(x) = T$ para todo $x \in V$. (Ojo: usamos el ejercicio anterior para las identificaciones $T_xV = V$, $T_yW = W$).

<u>**Definición**</u>. Un subconjunto $N \subset M$ es una **subvariedad** si....

<u>**Teorema**</u>. Una subvariedad $N \subset M$ tiene una única estructura de variedad diferencial tal que...

<u>**Definición**</u>. Un **valor regular** de una función suave $f : M \to N$ es un punto $y \in N$ tal que para todo $x \in M$ tal que $f(x) = y$, $df(x) : T_xM \to T_yN$ es suprayectiva.

<u>**Teorema**</u>. (**Teorema de la función implicita**). Si $f : M \to N$ es una función suave y $y \in N$ un valor regular entonces $f^{-1}(y) = \{x \in M | f(x) = y\}$ es una subvariedad de M de codim=dim N.

→**1.16.** Completar los anunciados y demostraciones de todas las definiciones y teoremas en este repaso.

(Fin de repaso de variedades diferenciales).

* * *

Aplicamos ahora el teorema de función implicita para demostrar que O_n es un grupo de Lie de dimensión $n(n-1)/2$. Definimos $f : M \to N$, donde M es el espacio euclideano de las matricies $n \times n$, $N \subset M$ es el espacio de las matricies simétricas y $f(A) = AA^t$. Se calcula ahora que $df(A)X = AX^t + XA^t$. Tenemos entonces que demostrar que para toda matriz ortogonal A y matriz simétrica Y existe una matriz X tal que $AX^t + XA^t = Y$.

→**1.17.** Da una demostración completa que O_n, con la estructura de variedad inducida de $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, es un grupo de Lie.

(Fin de notas núm. 1).