Notas núm. 3

8 dic, 2010

Los ejercicios están marcados con $\rightarrow$.

Representaciones lineales de grupos de Lie

Definición. Una representación lineal de un grupo G en un espacio vectorial V (complejo, real etc) es un homomorfismo $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$. La representación es irreducible si los únicos subespacios G-invariantes de V son V o el subespacio nulo. Si G es un grupo de Lie y V es de dimensión finita se pide que ρ sea suave. Dos representaciones (V, ρ), (V', ρ') del mismo grupo G son isomorfas si existe un isomorfismo lineal $T : V \to V'$ G-equivariante ($T \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ T$ para todo $g \in G$). Una representación real (resp. compleja) V es ortogonal (resp. unitaria) si existe en V un producto escalar (resp. hermitiano) G-invariante.

Todas las construcciones usuales de álgebra lineal se pueden hacer para representaciones: suma directa, producto tensorial, la representacion dual, ...

$\rightarrow$**6.1.** Define la suma directa y producto tensorial de dos representaciones.

$\rightarrow$**6.2.** Clasifica las representaciones complejas de dimensión finita de $(\mathbb{Z}, +)$. (Sugerencia: usa el teorema de Jordan).

$\rightarrow$**6.3.** Toda representación ortogonal (o unitaria) de dimensión finita es isomorfa a la suma directa de representaciones irreducibles. (Sugerencia: si $W \subset V$ es un subespacio invariante entonces su compemento ortogonal, con respecto a un producto escalar o hermitiano G-invariante, es tambien G-invariante.

Teorema. Toda representación de un grupo de Lie compacto es ortogonal (o unitaria).

La idea de la demostración es empezar con un producto escalar (o hermitiano) arbitrario y al "promediarlo", con respecto a una medida finita en G invariante por la derecha, se obtiene un producto G invariante.

Teorema. (El lema de Schur)

(a) Si V y W son irreducibles y $T : V \to W$ es G-equivariante entonces T es un isomorfismo o nulo.

(b) Si V es una G-representación compleja irreducible y $T : V \to V$ es G-equivariante entonces T es una multiplicación por escalar.

$\triangleright$ El (a) se demuestra observando que el kernel y la imagen de T son G-invariantes, por lo que si T no es nulo tiene que ser un ismorfismo. El (b) se demuestra considerando un valor propio λ de T y aplicar la parte (a) al endomorfismo $T - \lambda I$. $\square$

$\rightarrow$**6.4.** Toda representación irreducible compleja de un grupo abeliano es 1-dimensional.

$\rightarrow$**6.5.** Toda representación irreducible de $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ es 1-dimensional y está dada por $\rho(z) = z^n$ para algun $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema. Dada una representación lineal de dimensión finita de un grupo de Lie $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$, la derivada de ρ en la identidad $d\rho(e) : Lie(G) \to \mathrm{End}(V)$ es un homomrfismo de álgebras de Lie. El converso - todo homomrfismos de álgebras de Lie $Lie(G) \to \mathrm{End}(V)$ es la derivada de un homomorfismo $G \to \mathrm{Aut}(V)$, único) - es cierto si G es simplemente conexo.

La primera parte es una simple cuenta. La segunda parte requiere el teorema de existencia e unicidad de soluciones a EDO.

Ejemplo: las representaciones de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, SU_2 y SO_3

Sea $V = \mathbb{C}[z_1, z_2]$ el espacio de polinomios en dos variables con coeficientes complejas. Consideramos la representación de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ en V dada por sustitución: $p(z_1, z_2) \mapsto p(g^{-1}(z_1, z_2))$. Sea $V_n \subset \mathbb{C}[z_1, z_2]$ el subespacio de polinomios homogeneos de grado n.

→**6.6.** V_n es $SL_2(\mathbb{C})$-invariante. Una base de V_n está dada por $z_1^n, z_1^{n-1}z_2, \ldots, z_2^n$ así que $\dim V_n = n+1$.

Teorema. Cada V_n es irreducible bajo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ y sus subgrupos $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ y SU_2. Toda representación compleja irreducible de uno de estos 3 grupos es isomorfa a una de las V_n.

Demostración I: álgebras de Lie.

Primero tratamos a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Una base del álgebra de Lie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ está dada por

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los corchetes de Lie son

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = 0.$$

Denotamos a $v_i = z_1^{n-i} z_2^i$, $i = 0, \ldots, n$. Entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base que diagonaliza a la acción de H, con valores propios $n, n-2, n-4, \ldots, -n$. Así que todo subespacio $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-invariante de V_n tiene como base un subconjunto de la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Por otro lado, bajo X tenemos $v_0 \mapsto v_1 \mapsto \ldots v_n \mapsto 0$, y bajo Y, $v_n \mapsto v_{n-1} \mapsto \ldots v_0 \mapsto 0$. Así que si un subespacio invariante contiene a uno de los v_i contiene a todos los demas. Esto demuestra que cada V_n es $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-irreducible.

En la otra dirección, dada una representación lineal compleja irreducible W de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, consideramos un vector propio $w \in W$ de la acción de H, con un valor propio con parte real maximal m. Las imágenes sucecivas de w bajo X y Y generan una base de un subespacio invariante irreducible isomorfo a uno de los V_n (**** cuentas).

Para extender el argumento a los sungrupos SU_2 y $SL_2(\mathbb{R})$ se observa que la complexificación de sus álgebras de Lie es el álgebra de Lie de $SL_2(\mathbb{C})$.

Demostración II: teoría de caracteres.

El caracter de una representación ρ de un grupo G es la función en G dada por $\chi_\rho = \mathrm{tr}\rho$. Representación equivalentes tienen el mismo caracter y para grupos compactos (como SU_2), el converso tambien es cierto.

Además, para grupo compacto G el caracter de una representación lineal es un elemento de norma 1 en $L_2(G)$ (la integración es con respecto a una medida bi-invariante de volumen =1), y los caracteres de representaciones irreducibles no isomorfas son ortogonales en $L_2(G)$.

Para completar las demostración, para $\mathrm{SU}(2)$, basta entonces (1) calcular las normas de los caracteres de los V_n; (2) demostrar que cualquer "función de clase"(función en SU_2 invariante bajo conjugación, como son los caracteres de representaciones) que es ortogonal a todos los caracteres de los V_n se anula. $\square$

→**6.7.** Para n par $-I \in SU_2$ actua trivialmente en V_n por lo que la representación factoriza por SO_3.