Guia de estudio –

Examen parcial núm. 1 (18 mar 2011)

Resumen de las definiciones prinicipales

- Un *campo* es un conjunto K, junto con dos operaciones $+, \cdot : K \times K \to K$ y dos elementos distinguidos distintos $0, 1 \in K$, tal que para todo $a, b, c \in K$: (1) $a+b = b+a$, (2) $a+(b+c) = (a+b)+c$, (3) $a+0 = a$, (4) existe un $a' \in K$ tal que $a+a' = 0$,(5) $ab = ba$, (6) $(ab)c = a(bc)$, (7) $a \cdot 1 = a$, (8) si $a \neq 0$ existe un $a'' \in K$ tal que $aa" = 1$, y (9) $a(b+c) = ab+ac$.
- Una *ecuación lineal* con n incognitas $x_1, \ldots, x_n$ sobre un campo K es una ecuación de la forma $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, donde $a_1, \ldots, a_n, b \in K$. La ecuación es *homogenea* si $b = 0$. Una *solución* a la ecuación es un elemento $(c_1, \ldots, c_n) \in K^n$ tal que $\sum_{j=1}^n a_jc_j = b$. Una *solución a un sistema* de m ecuaciones con n incognitas $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, \ldots, m$, es una solucion simultanea a las m ecuaciones. El sistema es homogeneo si todas las m ecuaciones son homogeneas. De otro modo es un sistema *inhomogeneo*. El *sistema homogeneo asociado* al sistema es el sistema $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$, $i = 1, \ldots, m$.
- Una *matriz* $m \times n$ sobre un campo K es una tabla rectangular con m reglones y n columnas cuyas entradas son elementos de K. Al conjunto de todas tales matrices se denota por $Mat_{m,n}(K)$. Los elementos de $Mat_{m,1}(K)$ son *vectores columna* y los de $Mat_{1,n}(K)$ son *vectores renglon* (o *vectores fila*). A las matrices cuadradas $Mat_{n,n}(K)$ se denota por $Mat_n(K)$. Si $A \in Mat_{m,n}(K)$, se denota por A_{ij} la entrada de A en el reglon i y columna j. Si $A, B \in Mat_{m,n}(K)$ y $c \in K$, se denota por $A+B$ y cA las matrices en $Mat_{m,n}(K)$ cuyas entradas son $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ y $(cA)_{ij} = cA_{ij}$. Si $A \in Mat_{l,m}(K)$ y $B \in Mat_{m,n}(K)$, se donota por AB la matriz en $Mat_{l,n}(K)$ cuyas entradas son $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^m A_{ik}B_{kj}$. Si $A \in Mat_{m,n}(K)$ la *matriz traspuesta* $A^t \in Mat_{n,m}(K)$ es la matriz con entradas $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. La *matriz nula* $O \in Mat_{m,n}(K)$ es tal que $O_{ij} = 0$. Una matriz $A \in Mat_n(K)$ es: *diagonal* si $A_{ij} = 0$ para $i \neq j$; *simétrica* si $A = A^t$; *antisimétrica* si $A^t = -A$; *la identidad*, I (o a veces I_n), si es diagonal y ademas $A_{ii} = 1$; (5) *invertible* (o *no-singular*) si existe una matriz $B \in Mat_n(K)$ tal que $AB = I$. Dos matrices $A, B \in Mat_n(K)$ son *congruentes* si existe una matriz invertible $P \in Mat_n(K)$ tal que $A = PBP^t$.
- Una *operación elemental de renglon* en una matriz (sobre algun campo) es uno de los siguientes cambios en la matriz: (1) intercambio de dos renglones; (2) multiplicar un renglon por un escalar no nulo; (3) sumar un renglon a otro renglon. Dos matrices (del mismo tamaño) son *equivalentes por renglones* si se puede tranformar una a la otra por una serie de operaciones elementales de renglones.
- Una matriz (sobre algun campo) es de *forma escalonada* si (1) cada renglon nulo se encuentra abajo de todos los renglones no-nulos (en caso que la matriz tiene renglones nulos y no-nulos) ; (2) en cada renglon no nulo, empezando con el segundo, la primera entrada no-nula (el *pivote* de este reglon) está a la derecha de los pivotes

de los renglones superiores. La matriz es de *forma escalonada reducida* si ademas (3) cada pivote es 1 y es el único elemento no nulo en su columna.

- Una *forma cuadrática* en n variables sobre un campo K es una función $f : K^n \to K$ tal que $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, donde $a_{ij} \in K$ (alternativamente: $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A \mathbf{v}$, $A \in Mat_n(K)$). La forma es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Para $K = \mathbb{R}$ (los reales), f es: *positiva definida* ($f > 0$) si $f(\mathbf{v}) > 0$ para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$; *no-negativa* (o *positiva semi-definida*, $f \geq 0$) si $f(\mathbf{v}) \geq 0$ para todo $\mathbf{v}$. De manera similar se define *negativa definida* ($f < 0$) y *no-positiva* (o *negativa semi-definidas*, $f \leq 0$). La forma es *indefinida* si tiene valores positivos y negativos.
- Una matriz A con entradas reales es *no-negativa* ($A \geq 0$) si (1) A es simétrica y (2) la forma cuadrática $f_A(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A \mathbf{v}$ es no-negativa. A es *positiva* ($A > 0$) si es simétrica y $f_A > 0$. De manera similar se define matriz negativa definida y no-positiva.
- Un *espacio vectorial* sobre un campo K es un conjunto V, junto con dos operaciones $+ : V \times V \to V$, $\cdot : K \times V \to V$ y un elemento distinguido $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $a, b \in K$: (1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, (2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$, (3) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, (4) existe un $\mathbf{u}' \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{u}' = 0$, (5) $(ab)\mathbf{u} = a(b\mathbf{u})$, (6) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$, (7) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$, (8) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$.
- Un *subespacio vectorial* (o *subespacio lineal*) de un espacio vectorial V sobre un campo K es un subconjunto no vacio $W \subset V$ tal que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ y $c \in K$ (1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ (2) $c\mathbf{u} \in W$.

Teoremas

Hay que concocer los siguientes teoremas (su anunciado y uso), pero no es necesario saber la demostración.

- Toda matriz es equivalente por reglones a una matriz en forma escalonada reducida.
- Toda matriz simétrica sobre $\mathbb{R}$ es congruente a una matriz diagonal única, cuyas entradas en el diagonal son $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ (p 1's, n -1's y el resto 0's).

  Alternativamente: toda forma cuadrática $f(x_1, \ldots, x_N)$ sobre $\mathbb{R}$ es transformable, mediante un cambio de variables lineal e invertible, $x_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} y_j$ (la matriz $P = (p_{ij})$ es invertible), a una forma diagonal única del tipo $\sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_{p+i}^2$.

  Nota: por definición, $s = p - n$ es la *signatura* de la forma , $r = p + n$ es su *rango* y $N - p - n$ su *nulidad*.

Algoritmos

- Eleminación Gaussiana: encontrar una serie de operaciones elementales que convierte una matriz a una matriz en forma escalonada reducida.
- Aplicación de eleminación Gaussiana para resolver (encontrar el conjunto de soluciones de) un sistema de ecuaciones lineales.
- Inversión de una matriz cuadrada usando eleminación Gaussiana.
- Diagonalización de una forma cuadrática usando eleminación Gaussiana.

Problemas

Hay que conocer las soluciones a todos los problemas de la tarea. Aquí estan algunos problemas adicionales, del tipo que va aparecer en el examen. Los problemas marcados con asterisco (*) son opcionales (más dificiles).

1. Sea K un campo. Usando los axiomas de campo demuestra lo siguiene:
   a) Para todo $a, b \in K$, $ab = 0 \implies a = 0$ o $b = 0$.
   b) Para todo $a \in K$, el elemento a' en axioma (4) es único. Mismo para el elmento a'' de axioma (8) (cuando $a \neq 0$). Se denota $-a = a'$, $1/a = a^{-1} = a''$.
   c) $(-1) \cdot a = -a$ para todo $a \in K$.
   d) $(-1)^n = 1$ si n es par, -1 si n es impar.
   e) Si $a \in K$ tal que $a^2 = 1 \implies a = 1$ o $a = -1$.

2. Demuestra que $\mathbb{Z}_n$ (los enteros mod n), con la suma y producto usuales mod n, es un campo ssi n es primo.

3. Sea K un campo. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a \in K$, se define $n \cdot a = a + \ldots + a$ (n veces). Se define $car(K)$ (la característica de K) como el mínimo entero $n > 0$ tal que $n \cdot 1 = 0$ (si existe). Si tal n no existe, se define $car(K) = 0$. Demuestra que
   a) Si $p = car(K) > 0$ entonces p es un primo.
   b) Si K es finito entonces $car(K) > 0$.
   c) * Cierto o Falso: si $car(K) > 0$ entonces K es finito.
   d) $car(\mathbb{Z}_p) = p$ para todo primo p.
   e) * Si $car(K) = p$ entonces $(a + b)^p = a^p + b^p$ para todo $a, b \in K$.

4. Sea K un campo y $A \in Mat_{2\times 2}(K)$; es decir,
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
   donde $a, b, c, d \in K$.

   Demuestra que los siguientes incisos son equivalentes:
   a) La matriz A es invertible.
   b) $ad \neq bc$.
   c) La única solución $\mathbf{v} \in K^2$ al sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
   d) Para todo $\mathbf{b} \in K^2$ el sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ tiene una solución $\mathbf{v} \in K^2$.
   e) Para todo $\mathbf{b} \in K^2$, si el sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ tiene una solución $\mathbf{v} \in K^2$ entonces esta solución es única.
   f) La matriz A^n es invertible para algun entero $n > 0$.

5. Sean $A, B \in Mat_n(\mathbb{R})$. Demuestra:
   a) Si A, B son congruentes entonces A es simétrica ssi B es simétrica.
   b) Si A, B son congruentes y simétricas entonces $A > 0$ (positiva definida) ssi $B > 0$.
   c) Si A, B son congruentes entonces A es invertible ssi B es invertible.
   d) Congruencia es una relación de equivalencia en $Mat_n(\mathbb{R})$.

6. Demuestra las siguientes propiedades de la traspuesta (en cada caso especifica las dimensiones de las matrices para que el inciso tenga sentido):

a) $(A+B)^t = A^t + B^t$.
b) $(cA)^t = cA^t$, $c \in K$.
c) $(AB)^t = B^tA^t$.
d) $(A^t)^t = A$.
e) Si A es invertible entonces A^t es invertible tambien y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
f) Para toda A, $AA^t \geq 0$ y $A^tA \geq 0$ (no-negativa).
g) * Para toda A: $A^tA > 0$ ssi el sistema $Av = 0$ no tiene soluciones no triviales; $AA^t > 0$ ssi el sistema $Av = w$ tiene solución para todo w.

7. Demuestra: dada una forma cuadrática f en n variables sobre un campo K de característica $\neq 2$, existe una única matriz simétrica A tal que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^tA\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in K^n$.

8. Para cada una de las formas cuadráticas siguientes encuentra su signatura, rango y nulidad:
a) $f(x,y) = (x-y)^2$
b) $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 + \ldots + x_n)^2$
c) $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{ij}(i+j)x_ix_j$
d) $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{ij}|i-j|x_ix_j$;

9. Sean $A, B \in Mat_n(K)$. Demuestra: $AB = I$ ssi $BA = I$.

10. Cierto o Falso.
a) Todo sistema de ecuaciones lineales tiene por lo menos una solución.
b) Todo sistema homogeneo de ecuaciones lineales tiene por lo menos una solución.
c) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene más que una solución entonces el sistema homogeneo asosciado tiene una solulción no trivial.
d) Si para un sistema de n ecuaciones con n incognitas, $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1,\ldots,n$, la matriz de coeficientes $A = (a_{ij})$ es invertible, entonces el sistema tiene una solución única.
e) Si un sistema de n ecuaciones lineales con n incognitas tiene una solución, entonces esta solución es única.
f) Si un sistema de ecuaciones lineales con más incognitas que ecuaciones tiene una solución, entonces esta solución no es única.
g) El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en n incognitas sobre un campo K es un subespacio vectorial de K^n.
h) El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogeneo en n incognitas sobre un campo K es un subespacio vectorial de K^n.
i) * Todo subespacio vectorial de K^n se puede obtener como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales en n incognitas.
j) Sea $A = BC$, donde A, B, C son matrices 3×3, 3×2 y 2×3 (resp.). Entonces A no es invertible.
k) Si A, B son dos matrices $n\times n$ tal que $AB = 0$, entonces $A = 0$ ó $B = 0$.
l) La suma de matrices invertibles es invertible.
m) El producto de matrices invertibles es invertible.
n) La transpuesta de una matriz invertible es invertible.
ñ) Toda matriz simétrica es invertible.

o) Toda matriz simétrica positiva definida es invertible.
p) Una matriz simétrica positiva definida tiene entradas positivas sobre su diagonal.
q) Una matriz simétrica positiva definida tiene todas sus entradas positivas.
r) Toda matriz diagonal $n \times n$ conmuta con todas las matrices $n \times n$.
s) Si A es una matriz $n \times n$ que conmuta con todas las matrices $n \times n$ entonces A es diagonal.
t) Si A, B son dos matrices $n \times n$ equivalentes por reglones, entonces B es invertible si A es invertible.
u) Si A, B son dos matrices $n \times n$ equivalentes por reglones, entonces B es simétrica si A es simétrica.
v) Si A, B son dos matrices $n \times n$ congruentes, entonces A es simétrica positiva definida si B es simétrica positiva definida.
w) La unión de dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio.
x) La intersección de dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio.