Algebra lineal I, DEMAT, ene-jun, 2011

Examen parcial núm. 1 – segunda oportunidad (2 abr 2011)

1. (20 pts)
   a) Define: K es un campo.
   b) Sea K un campo. Demuestra (usando solamente los axiomas del campo del inciso anterior): para todo $a, b \in K$, $ab = 0 \implies a = 0$ o $b = 0$.
   c) Sea K un campo. Define: V es un espacio vectorial sobre K.
   d) Sea V un espacio vectorial sobre K. Demuestra (usando solamente los axiomas de campo y espacio vectorial o lo que demostraste en el segundo inciso de este problema): para todo $c \in K$ y $\mathbf{v} \in V$, $c\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies c = 0$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

2. (30 pts) Sea
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$
   a) Encuentra el conjunto de soluciones del sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ (vectores columna).
   b) Cierto o Falso: A es invertible.
   c) Encuentra el conjunto de los vectores $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ (vectores columna) para los cuales el sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$ tiene una solución.
   d) Cierto o falso: si $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ es tal que el sistema $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$ tiene una solución, entonces esta solución no es única.

3. (50 pts)
   a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Define: f es (i) forma cuadrática; (ii) forma cuadrática diagonal; (iii) forma cuadrática diagonalizable; (iv) forma cuadrática positiva definida. (Son 4 definiciones).
   b) Sea A una matriz $n \times n$ con entradas reales. Define: A es (i) matriz simétrica; (ii) matriz diagonal; (iii) matriz simétrica diagonalizable (por congruencia); (iv) matriz positiva definida. (Son 4 definiciones).
   c) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Demuestra: (i) f es una forma cuadrática si y solo si existe una matriz simétrica $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ tal $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t A\mathbf{v}$ pata todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ (vectores columna); (ii) si f es una forma cuadrática, la matriz simétrica A del inciso anterior es única. (Son 2 demostraciones).
   d) Cierto o Falso: pata todo n, existe un conjunto *finito* S de formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$, tal que toda forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ se puede transformar, mediante un cambio de variables lineal, a una de las formas cuadráticas en el conjunto S.
   e) Diagonaliza la forma cuadrática $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ y decide si es positiva definida o no.

4. (Opcional, extra crédito) Cierto o Falso: existe un campo K en donde $(a+b)^6 = a^6+b^6$ para todo $a, b \in K$.