Calculo III, ago-dic 2011.

Examen Final
(7 dic, 2011)

Parte A

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto que contiene a $(0,0)$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Para cada uno de los incisos siguientes, decide si implica o no que f es diferenciable en $(0,0)$. En caso que sí, hay que dar un breve argumento (mencionar un teorema, por ejemplo). En caso que no, hay que dar un contra ejemplo.

1. f es contínua.
2. $f(x,y) = p(x,y) + g(x,y)$ para todo $(x,y) \in U$, donde $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es un polinomio y $g : U \to \mathbb{R}$ es una función contínua tal que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)/\sqrt{x^2+y^2} = 0$.
3. Las derivadas parciales f_x y f_y existen en todo U.
4. Las derivadas parciales f_x y f_y existen y son contínuas en todo U.
5. $[f(x,y)]^2 = g(x,y)$ para todo $(x,y) \in U$, donde $g : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $(0,0)$.
6. $[f(x,y)]^2 = g(x,y)$ para todo $(x,y) \in U$, donde $g : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $(0,0)$ tal que $g(0,0) = 17$.
7. $f(x,y) = [g(x,y)]^2$ para todo $(x,y) \in U$, donde $g : U \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $(0,0)$.
8. $f(x,y) = \int_x^y h(t)dt$ para todo $(x,y) \in U$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es contínua.
9. $f(0,0) = 1$, f es contínua en $(0,0)$ y $x + yf(x,y) + [f(x,y)]^3 = 1$ para todo $(x,y) \in U$.

Parte B

1. Hacer un dibujo del campo gradiente de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = xy+x$.
2. Hacer un dibujo de las curvas de nivel de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + x - y$.
3. Encontrar los mínimos y máximos, locales y globales (si existen), de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 + 2xy - y$.
4. Encontrar los mínimos y máximos, locales y globales (si existen), de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x + 3xy - y$ restringida al conjunto $x^2 + y^2 = 1$.
5. Sea $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (4,5,6)$. Calcula $v_1 \times v_2$ (el producto vectorial estandar en $\mathbb{R}^3$).
6. Consideramos a $\mathbb{R}^3$, con la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ y la orientación canónica dada por la base canónica. Sea $v_1 = e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 + e_3$, $v_3 = e_1 + e_2$. Demuestra que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base y decide si tiene la orientación canónica o no.
7. Calcula el área del triángulo en $\mathbb{R}^3$ con vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.
8. Encuentra una ecuación para el plano tangente a la superficie $2x^2 + 3y^3 + 4z^4 = 9$ en el punto $(1,1,1)$.
9. Demuestra que la ecuación $2x^2 + 3y^3 + 4z^4 = 9$ define a z como una función diferenciable $z = f(x,y)$ en una vecindad de $(x,y) = (1,1)$ tal que $f(1,1) = 1$ y encuentra a $df(1,1)$.