Calculo III, DEMAT-CIMAT, aug-dic 2011.

Examen parcial 2

8 nov 2011

1. (30 pt) Formula con precisión y demuestra uno de los siguientes teoremas.
   a) La regla de la cadena para la derivada de una composición de funciones $g : U \to V$, $f : V \to W$, donde U, V, W son unos abiertos en $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l$ (resp.).
   b) Un punto crítico de una función real de n variables con hessiano positivo definido es un mínimo local.
   c) El criterio de Lagrange para un mínimo de una función real de n variables sujeta a una condición subsidiaria dada por otra función de n variables. (Se puede usar en la demostración el teorema de función implicita).
   d) El teorema de Taylor para una función real de n variables con el resíduo (término de error) en forma de Lagrange. (Si usas el Teorema de Taylor en 1 variable hay que demostrarlo también).

2. (70 pt) Consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
   $$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + y.$$
   Sea $P_0 = (2, 3)$. Encuentra los siguientes:
   a) La derivada de f en P_0.
   b) El desarrollo de Taylor de orden n de f alrededor de P_0, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
   c) Una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ para la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por P_0.
   d) Un dibujo de la curva de nivel del inciso anterior.
   e) Una ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$ para el plano tangente a la gráfica de f en $(2, 3, 24)$.
   f) Los puntos críticos de f, el hessiano de f en estos puntos, su tipo (positivo/negativo definido etc.) y decide cual es el tipo del punto crítico (mínimo/máximo, local/global etc).
   g) El mínimo y máximo de f restringida al conjunto $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$.