Calculo III, aug-dic 2011.

Tarea num. 4
(Para el 15 sep, 2011)

Nota: Para hacer esta tarea recomendo usar las definiciones que aparecen en la guía del primer examen parcial.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = x^2 - y$. Sea $P = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$.

1. Marca en el plano x, y el vector $\mathbf{v}$ como una flecha basada en P, y dibuja la curva de nivel de f que pasa por P.

2. Calcula f_x, f_y (las primeras derivadas parciales de f). Demuestra que son funciones contínuas $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Cocncluye que f es diferenciable en todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Calcula f_x, f_y en P.

4. Calcular $Df(P)$ (la derivada de f en P).

   Nota: La derivada de f en P es una transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (un elemento del espacio dual de $\mathbb{R}^2$). Una tal transformación lineal está dada por una fórmula de la forma $L(v_1, v_2) = av_1 + bv_2$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. "Calcular la derivada de f en P"significa encontrar tal fórmula para $Df(P)$.

   Sugerencia: la matriz de la derivada de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ en un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, con respecto a las bases canónicas en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, es la matriz cuya entrada ij es la derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ evaluada en $\mathbf{x}$.

5. Calcula $Df(P)\mathbf{v}$ (la imagen del vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ bajo la transformación lineal $Df(P) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).

6. Calcula $D_{\mathbf{v}}f(P)$.

   Nota: $D_{\mathbf{v}}f(P)$ es "la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{v}$". Por definición, es el siguiente número: sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(t) = f(P + t\mathbf{v})$. Entonces $D_{\mathbf{v}}f(P) := g'(0)$. Te tiene que salir el mismo número que el inciso anterior.

7. Encuentra el vector $\nabla f(P)$ (la gradiente de f en P) y dibujalo como una flecha basada en P.

8. Calcula el producto escalar $\langle \nabla f(P), \mathbf{v} \rangle$.

   Nota: tiene que salir el mismo número como en incisos 5 y 6.

9. Usa $Df(P)\mathbf{v}$ para aproximar el valor $f(3.1, 3.9)$ en términos de $f(3, 4)$. Compara el valor producido por esta aproximación con el valor real de $f(3.1, 3.9)$.

10. Sea $C = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 | \|\mathbf{u}\| = 1\}$ y $g : C \to \mathbb{R}$ la función $g(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{u}}f(P)$. Encuentra el máximo valor de g en C. Encuentra el vector $\mathbf{u} \in C$ en donde g obtiene este máximo valor.

    Sugerencia: la función g se puede re-escribir como $g(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle$, donde $\mathbf{w} = \nabla f(P)$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, demuestra que g obtiene su máximo valor en el punto $\mathbf{u} = \mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|$.

11. Repita los incisos 5,6,7,8,9,10 para un punto general $P = (x, y)$ y vector general $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

    Nota: al hacer inciso 7 (calcular y dibujar la gradiente) tienes que dibujar la gradiente en varios puntos en el plano, hasta que se vueleve claro como se ve este campo de vectores. Al dibujar las flechas, tienes que cambiar la escala, para que no se encimen las flechas. Es decir, el campo que vas a dibujar en el plano no es ∇f, sino $c\nabla f$, para un $c > 0$ bastante pequeño (digamos $c = 0.1$).

    En inciso 9, tienes que aproximar $f(x + v_1, y + v_2)$ en términos de $f(x, y)$ y $Df(x, y)\mathbf{v}$, y luego comparar esta aproximación al valor real de $f(x + v_1, y + v_2)$.

12. Repita el inciso anterior para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.