Calculo III, ago-dic 2011.

Tarea num. 5
(Para el 15 sep, 2011)

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = x^2 - y$. Sea $A = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (1, -1)$.

   a) Encuentra una ecuación de la forma $ax + by + c = 0$ para la recta tangente en A a la curva de nivel de f que pasa por A. Dibuja esta recta, junto con la curva de nivel.

   Sugerencia: si B es un punto sobre la tangente, entonces $Df(A)(B - A) = 0$.

   b) Encuentra una ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$ para el plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $P = (A, f(A)) \in \mathbb{R}^3$.

   Sugerencia: si $P \in \mathbb{R}^3$ es un punto en la superficie de nivel de una función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y Q es un punto sobre el plano tangente a la superficie en P, entonces $DF(P)(Q - P) = 0$. La gráfica de f es una superficie de nivel de la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = z - f(x, y)$.

   c) Estas parado sobre la superficie de la gráfica de f en el punto $P = (A, f(A)) \in \mathbb{R}^3$. Empiezas a caminar sobre la superficie hacia el sureste (tu proyección al plano xy mueve en la dirección de $\mathbf{v}$). (i) Encuentra la pendiente de tu camino. (ii) ¿En qué dirección $\mathbf{v}_{max} \in \mathbb{R}^2$ debes moverte para maximizar la penediente de tu camino? (iii) Encuentra la pendiente en esta dirección maximal.

   Respuestas: (i) $Df(A)\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. (ii) $\nabla f(A) = (f_x(A), f_y(A))$ (el gradiente de f en A). (iii) $\|\nabla f(A)\|$.

   d) (Opcional) Suponemos que $f(x, y) = x^2 - y$ es la temperatura del punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encuentra una curva en el plano que pasa por A tal que si caminas sobre esta curva (en cierta dirección) siempre caminas en la direccion de máximo calientamiento.

   Respuesta: $x = ae^{by}$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Consideramos a la superficie S en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $z = x^2 - y^2$. Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

   a) Encuentra una ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$ para el plano tangente a S en P_0.

   b) Encuentra dos rectas que pasan por P_0 y que estan *contenidas* en S. Demuestra que la proyección de estas dos rectas sobre el plano xy son dos rectas ortogonales, dadas por $x - x_0 = \pm(y - y_0)$.

   Sugerencia: busca $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{P_0 + t\mathbf{v} | t \in \mathbb{R}\} \subset S$.

   Nota: una superficie con esta propiedad se llama *doblamente reglada* ("doubly ruled" en ingles). La propiedad permite construcciones bonitas de la superficie de materiales simples (palitos, hilos, papel etc). Gracias a la alumna Fernanda de la Torre que me mostró esta propiedad con un bonito modelo de papel de la superficie!

   Ligas:
   1) `http://diffgeom.subwiki.org/wiki/Doubly_ruled_surface`
   2) `http://www.cutoutfoldup.com/902-hyperbolic-paraboloid.php`
   3) `http://www.cutoutfoldup.com/967-fold-a-hyperbolic-paraboloid.php`

3. En este ejercicio demostramos que la definición usual de diferenciabilidad que hemos dado en el curso hace algunas semanas es equivalente a la definición que hemos dado la semana pasada.

   Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función, $\mathbf{x} \in U$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal tal que $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - T\mathbf{v}]/\|\mathbf{v}\| = 0$. Demuestra que

   a) Para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$ (la derivada de $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ con respecto a t en $t = 0$) existe y es igual a $T\mathbf{v}$.

   b) Las $n \times m$ derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ existen.

   c) La entrada ij de la matriz de T con respecto a las bases canónicas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})$.

   d) Encuentra un ejemplo que muestra que la existencia de las derivadas parciales de f en un punto $\mathbf{x} \in U$, e incluso en todos los puntos de U, no garantiza la existencia de una transformación lineal T tal que $\lim_{\mathbf{v}\to 0}[f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) - T\mathbf{v}]/\|\mathbf{v}\| = 0$.

   Sugerencia: revisa la tarea 3.