Calculo III, ago-dic 2011.

Tarea num. 7
(Para el 6 oct, 2011)

Del libro de Courant y John:

- Pág. 76: 1ach, 2,4.
- Pág. 86: 3
- Pág. 91-92: 1,2,3,4.

Comentarios sobre los problemas de la pág. 90-91

Un comentario general es que todas las funciones en estos ejercicios las suponemos diferenciables tantas veces que sea necesario para que los problemas tengan sentido y que las derivadas parciales conmuten.

1. En problema 1, $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función (diferenciable), con derivadas parciales u_x, u_y y las derivadas parciales de $u \circ \Phi$ de denotan por u_r, u_θ. El problema pide expresar $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ (la norma de ∇u) en términos de u_r, u_θ.

2. En problema 2, $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\Phi(X,Y) = (x,y) = (\alpha X + \beta Y, -\beta X + \alpha Y)$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (una rotación), $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ y $\Delta(f \circ \Phi) = (f \circ \Phi)_{XX} + (f \circ \Phi)_{YY}$. El problema pide demostrar que $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$.

   Nota: la fórmula $\Delta(f \circ \Phi) = (\Delta f) \circ \Phi$ sigue siende cierta para Φ que es una isometría: una composición de rotación o reflexión y translación. Tambien es cierto para $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una isometría (transformación lineal ortogonal compuesta con translación).

3. En problema 3, $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal cualquiera, $\Phi(X,Y) = (\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)$, $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. El problema pide demostrar que (f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}) y (a,b,c) "se transforman de la misma manera bajo Φ".

   Es decir: sean $Q = q \circ \Phi$ y $F = f \circ \Phi$. Entonces Q también es una forma cuadrática, $Q(X,Y) = AX^2 + 2BXY + CY^2$. Luego, sea $(X_0, Y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) = \Phi(X_0, Y_0)$. Entonces lo que se pide demostrar es que existe una transformacion lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que solo depende de Φ, tal que $T(a,b,c) = (A,B,C)$, y tal que $T(f_{xx}(x_0,y_0), f_{xy}(x_0,y_0), f_{yy}(x_0,y_0)) = (F_{XX}(X_0,Y_0), F_{XY}(X_0,Y_0), F_{YY}(X_0,Y_0))$.

   Sugerencia: sea A la matriz de Φ (con respecto a la base canónica). Sea $S(q)$ la matriz simétrica que representa a q. Es decir, $q(\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t S \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v}$ (vector columna) en $\mathbb{R}^2$. Luego, sea $h(f)$ la matriz simétrica (de funciones) de las segunas derivadas parciales de f, $h(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$. Demuestra que (1) $S(q \circ \Phi) = A^t S(q) A$; (2) $h(f \circ \Phi) = A^t [h(f) \circ \Phi] A$.

4. En el problema 4, tenemos dos funciones, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dadas por $\Phi(r,\theta) = (x,y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, $(u \circ \Phi)(r,\theta) = r^2\cos\theta$. Las derivadas parciales de u se denotan por u_x, u_y y las derivadas parciales de $u \circ \Phi$ de denotan por u_r, u_θ. Nos piden (1) encontrar las derivadas parciales u_x, u_y en el punto $\Phi(2, \pi/4)$. (2) Expresar las derivadas parciales de $u \circ \Phi$ en términos de las derivadas parciales de u.