SERIE

SCHAUM

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

FRANK AYRES, JR.

TEORIA Y
1.175
PROBLEMAS RESUELTOS

schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

CALCULO
diferencial e integral

FRANK AYRES, JR., Ph. D.

Formerly Professor and Head,
Department of Mathematics
Dickinson College

•

TRADUCCIÓN Y ADAPTACIÓN

LUIS GUTIÉRREZ DÍEZ

Ingeniero de Armamento

ANGEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ

Ingeniero de Armamento
Licenciado en Ciencias Físicas
Diplomado en Ingeniería Nuclear

McGRAW-HILL

MADRID • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • JOHANNESBURGO • LONDRES • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

LIBROS McGRAW-HILL DE MEXICO, S. A. DE C. V.
Atlacomulco 499-501, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 465

ISBN 968-451-182-5

ISBN 0-07-091520-2

Traducido de la segunda edición en inglés de

CALCULUS

ISBN 0-07-002653-X

ISBN: 84-85-240-21-9
Depósito legal: M. 43944-1988

De esta edición se imprimieron 3.000 ejemplares en enero de 1989.

Impresión: Artes Gráficas EMA, S. A. Miguel Yuste, 27. 28037 Madrid

PRINTED IN SPAIN - IMPRESO EN ESPAÑA

Prólogo

El propósito de este libro sigue siendo, como en la primera edición (en inglés), proporcionar a los alumnos que inician sus estudios de cálculo una serie de problemas representativos, resueltos con todo detalle. Por sus características será asimismo de gran utilidad para los estudiantes de ciencias e ingeniería que necesiten consultar o repasar conceptos fundamentales de la teoría y encontrar el modo de resolver ciertos problemas, relacionados con alguna aplicación práctica. Por otra parte, al figurar en esta edición demostraciones de los teoremas y deducciones de las fórmulas de derivación e integración, junto con una amplia relación de problemas resueltos y propuestos, también se puede utilizar como libro de texto para desarrollar un curso de cálculo.

La disposición del libro es, en líneas generales, análoga a la de la edición anterior. Cada capítulo comienza por establecer las definiciones, principios y teoremas de los temas a tratar en él. Los ejemplos ilustrativos y los problemas resueltos que figuran a continuación se han seleccionado no solo con el objeto de ampliar o completar la teoría, sino también con el de que el alumno adquiera práctica en la formulación y resolución de problemas; para que éste pueda aplicar repetidamente los principios fundamentales y para que la enseñanza sea verdaderamente eficaz; para prevenirle ante las dificultades con que normalmente se tropieza el principiante y, finalmente, para mostrar el amplio campo en el que el cálculo tiene aplicación. En la explicación de los problemas resueltos se incluyen numerosas demostraciones de teoremas y se razonan, detalladamente, los resultados. Para sacar el máximo partido de este libro, bien se utilice como texto suplementario, bien como texto propiamente dicho, es necesario estudiar detenidamente los problemas resueltos. En cada uno de ellos hay algo que aprender y lo más práctico será que el alumno los vuelva a resolver él solo, justificando los sucesivos pasos o etapas de los mismos. De esta forma no se encontrarán grandes dificultades para resolver la mayor parte de los problemas propuestos.

El aumento de, aproximadamente, un cincuenta por ciento, que ha experimentado el contenido de esta edición se debe, solo en parte, a las adiciones reseñadas anteriormente. Otras innovaciones que merece la pena destacar son el estudio más completo del concepto de límite, de la continuidad de funciones y de las series infinitas, así como la introducción más extensa que se ha dado a los vectores en el plano y en el espacio.

Con objeto de que la parte en que se exponen las aplicaciones más elementales de la integración, como son el cálculo de áreas, volúmenes, etc., se pueda estudiar en orden de capítulos diferente al que aquí aparece, estos han sido expuestos de forma que en su mayor parte se puedan asimilar, una vez estudiados los seis primeros. Así, quienes utilicen este texto como libro de consulta o suplemento, encontrarán pocas dificultades para acomodarlo a sus necesidades.

El autor quiere aprovechar la oportunidad de poder expresar su gratitud a la Schaum Publishing Company por su magnífica cooperación.

FRANK AYRES, JR.

TABLA DE MATERIAS

Capítulo 1

Variables y funciones

EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES está formado por el de los números racionales (enteros positivos y negativos, cero y los fraccionarios de la forma a/b siendo a y b números enteros) y el de los números irracionales (de infinitas cifras decimales, como por ejemplo $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ y $\pi = 3{,}14159\ldots$ que no se pueden expresar como una relación entre enteros).

El álgebra de los números complejos no juegan aquí papel alguno y como no puede haber confusión siempre que se hable de un número, se sobrentenderá que se trata de un número *real*.

EL VALOR ABSOLUTO O NUMERICO ($|N|$) de un número (real) N se define por:

$$|N| = N \text{ si } N \text{ es cero o un número positivo,}$$
$$|N| = -N \text{ si } N \text{ es un número negativo.}$$

Por ejemplo,

$$|3| = |-3| = 3, \quad |3-5| = |5-3| = 2,$$
$$|x-a| = x-a \text{ si } x \geqslant a \quad \text{y} \quad |x-a| = a-x \text{ si } x < a.$$

En general, si a y b son dos números cualesquiera,

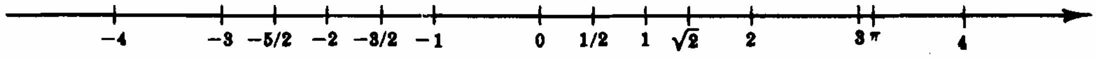
$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

$$|a \pm b| = |b \pm a|; \quad |ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|, \quad b \neq 0;$$

$$|a+b| \geqslant |a| - |b|; \quad |a-b| \leqslant |a| + |b|;$$
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|; \quad |a-b| \geqslant |a| - |b|.$$

UNA ESCALA NUMERICA es una representación gráfica de los números reales por medio de los puntos de una recta. A cada número le corresponde un solo punto de la recta y recíprocamente. Por tanto, los vocablos número y punto (en una escala numérica) se pueden utilizar indistintamente.

Para establecer una escala numérica sobre una recta hay que efectuar las siguientes operaciones: (i) tomar un punto cualquiera de ella como *origen* (asignándole el 0), (ii) elegir un sentido positivo (se indica por medio de una flecha) y (iii) con una unidad de medida adecuada situar el punto $+1$ a una distancia del 0 igual a dicha unidad. Los números (puntos) N y $-N$ están a ambos lados de 0 y a $|N|$ unidades de él.



Si a y b son dos números diferentes, $a < b$ significa que a está situado a la izquierda de b en la escala, mientras que $a > b$ quiere decir que a está a la derecha de b.

El segmento dirigido de a a b viene representado por $b - a$, siendo negativo si $a > b$ y positivo si $a < b$. En cualquiera de estos casos, b está a una distancia de a igual a $|b - a| = |a - b|$.

INTERVALOS FINITOS. Sean a y b dos números tales que $a < b$. El conjunto de todos los números x comprendidos entre a y b recibe el nombre de *intervalo abierto* de a a b y se escribe $a < x < b$. Los puntos a y b reciben el nombre de *extremos* del intervalo. Un intervalo abierto no contiene a sus extremos.

El intervalo abierto $a < x < b$ junto con sus extremos a y b recibe el nombre de *intervalo cerrado* de a a b y se escribe $a \leq x \leq b$.

intervalo abierto: $a < x < b$

intervalo cerrado: $a \leq x \leq b$

INTERVALOS INFINITOS. Sea a un número cualquiera. El conjunto de todos los números x tales que $x < a$ recibe el nombre de *intervalo infinito*. Otros intervalos infinitos son los definidos por $x \leq a$, $x > a$ y $x \geq a$.

(Ver Problemas 1-2.)

CONSTANTE Y VARIABLE. En la definición del intervalo $a < x < b$:

(i) cada uno de los símbolos a y b representan un solo número que se denomina una *constante*.

(ii) el símbolo x representa un número cualquiera del conjunto de números y se denomina *variable*.

El campo de variación de una variable es otra característica del conjunto de números que ella representa. Por ejemplo:

(1) si x es un libro de un conjunto formado por diez volúmenes, el campo de variación de x es el conjunto formado por los números enteros 1, 2, 3, . . ., 10.

(2) Si x es un día del mes de julio, su campo de variación estará formado por el conjunto de números 1, 2, 3, . . ., 31.

(3) Si x es la cantidad de agua (en litros) que se puede sacar de un depósito lleno de diez litros, su campo de variación es el intervalo $0 \leq x \leq 10$.

LAS DESIGUALDADES, como por ejemplo $2x - 3 > 0$ y $x^2 - 5x - 24 \leq 0$, también definen intervalos sobre una escala numérica.

Ejemplo 1: Resolver la desigualdad (*a*) $2x - 3 > 0$, (*b*) $x^2 - 5x - 24 \leq 0$.

(*a*) Se resuelve $2x - 3 = 0$ y se obtiene $x = 3/2$; consideramos los intervalos $x < 3/2$ y $x > 3/2$. Para un valor cualquiera de x del intervalo $x < 3/2$, tal como $x = 0$, se verifica $2x - 3 < 0$; para un valor cualquiera de x del intervalo $x > 3/2$ tal como $x = 3$, se verifica $2x - 3 > 0$. Por tanto, $2x - 3 > 0$ para todo valor de x perteneciente al intervalo $x > 3/2$.

(*b*) Se resuelve $x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8) = 0$ y se obtiene $x = -3$ y $x = 8$; consideremos los intervalos $x < -3$, $-3 < x < 8$, $x > 8$. Ahora bien $x^2 - 5x - 24 > 0$ para todos los valores de x pertenecientes a los intervalos $x < -3$ y $x > 8$. Por otra parte $x^2 - 5x - 24 < 0$ para los valores del intervalo $-3 < x < 8$. Por tanto, $x^2 - 5x - 24 \leq 0$ en el intervalo $-3 \leq x \leq 8$.

(Ver Problema 3.)

FUNCION DE UNA VARIABLE. Se dice que una variable y es *función* de otra x, cuando ambas están relacionadas de forma que para cada valor de x perteneciente a su campo de variación le corresponde *un* valor de y. La variable y, cuyo valor depende del que tome x, recibe el nombre de *variable dependiente*, mientras que x es una *variable independiente*. La relación que liga a la función con la variable puede ser una tabla de valores en correspondencia (por ej., una tabla de logaritmos), una gráfica o una ecuación.

Ejemplo 2:

La ecuación $x^2 - y = 10$, siendo x la variable independiente, asigna un valor a y para cada valor que se dé a x. La función definida es $y = x^2 - 10$. La misma ecuación, tomando a y como variable independiente, hace corresponder dos valores de x con cada uno de los que se den a y. Por tanto, se pueden definir dos funciones de y: $x = \sqrt{10+y}$ y $x = -\sqrt{10+y}$.

Algunos autores definen a y como función de x, cuando a cada valor de x, perteneciente a su campo de variación, le corresponde uno o más valores de y. Así, pues, en el Ejemplo 2, y es una función *uniforme* de x, mientras que x es una función *multiforme* de y. Sin embargo, en el Cálculo, es conveniente descomponer las funciones multiformes en dos o más funciones uniformes.

Por ello, la definición que hemos dado de función lleva implícita esta propiedad de uniformidad.

El símbolo $f(x)$ se lee «función de x» o bien f de x, pero nunca «f veces x». Si en un mismo problema intervienen otras funciones de x se emplearán letras diferentes para denominarlas: $g(x)$, $h(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$, . . .

Para poder estudiar una función $y = f(x)$ se necesita siempre conocer el campo de variación de la variable independiente, que también recibe el nombre de *dominio de definición* de la función.

Ejemplo 3:

(*a*) La función $f(x) = 18x - 3x^2$ está definida para todo valor de x; es decir, que siempre que x sea un número real, $18x - 3x^2$ también lo es. Por consiguiente el campo de variación de x o dominio de definición de la función está formado por el conjunto de los números reales.

(*b*) Si el área de un rectángulo determinado viene dada por $y = 18x - 3x^2$, siendo x uno de sus lados, tanto x como $18x - 3x^2$ deben ser positivos. De la figura adjunta o bien del Problema 3 (*a*) se deduce que el dominio de definición es el intervalo $0 < x < 6$.

(*c*) El dominio de definición de la función $y = x^2 - 10$ del Ejemplo 2 es el conjunto de los números reales. En las funciones $x = \sqrt{10+y}$ y $x = -\sqrt{10+y}$ es necesario que $10 + y \geq 0$; por tanto, el dominio de definición de cada una de ellas es $y \geq -10$.

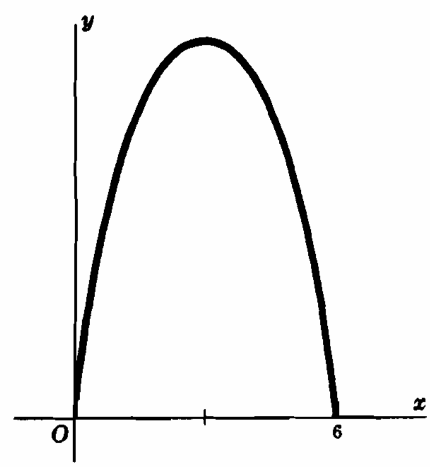


Fig. 1-1

Se dice que una función $f(x)$ está definida *en* un intervalo, cuando lo está en un punto *cualquiera* de dicho intervalo.

Si $f(x)$ es una función de x y a es un valor de su dominio de definición, la expresión $f(a)$ significa el valor numérico obtenido al sustituir x por a en $f(x)$ o sea el valor que toma $f(x)$ cuando $x = a$.

Ejemplo 4: Si $f(x) = x^3 - 4x + 2$, tendremos

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^3 - 4(1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1, \\ f(-2) &= (-2)^3 - 4(-2) + 2 = -8 + 8 + 2 = 2, \\ f(a) &= a^3 - 4a + 2, \text{ etc.} \end{aligned}$$

(Ver Problemas 4-13.)

UNA SUCESION INFINITA es una función de una variable (representada normalmente por n) cuyo campo de variación está formado por el conjunto de los números enteros positivos. Por ejemplo, cuando n va tomando los valores 1, 2, 3, 4, . . ., la función $\dfrac{1}{n+1}$ da lugar a la sucesión de términos $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ La sucesión se denomina *infinita* para indicar que no tiene último término.

El término $\dfrac{1}{n+1}$ de la sucesión anterior recibe el nombre de término *general* o *término enésimo.* Una sucesión se representa por su término general encerrado entre llaves $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ o bien indicando algunos de los términos que la componen, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \dfrac{1}{n+1}, \ldots$ (Ver problemas 14-15).

Problemas resueltos

1. Enunciar y dibujar los intervalos: (*a*) $-3 < x < 5$, (*b*) $2 \leq x \leq 6$, (*c*) $-4 < x \leq 0$, (*d*) $x > 5$, (*e*) $x \leq 2$.

(*a*) Todos los números mayores que -3 y menores que 5.

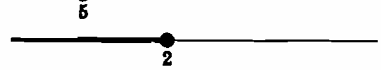
(*b*) Todos los números igual o mayor que 2 e igual o menor que 6.

(*c*) Todos los números mayores que -4 e igual o menor que 0.

Este intervalo finito que contiene a uno de sus extremos, recibe el nombre de intervalo *semiabierto.*

(*d*) Todos los números mayores que 5.

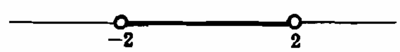
(*e*) Todos los números igual o menor que 2.



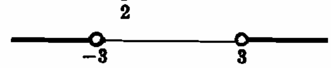
2. Enunciar y dibujar los intervalos:

(*a*) $|x| < 2$; (*b*) $|x| > 3$; (*c*) $|x - 3| < 1$; (*d*) $|x - 2| < \delta$, $\delta > 0$; (*e*) $0 < |x + 3| < \delta$, $\delta > 0$.

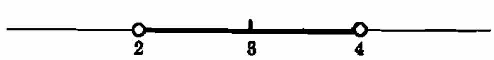
(*a*) Intervalo abierto $-2 < x < 2$.



(*b*) Dos intervalos infinitos: $x < -3$ y $x > 3$.

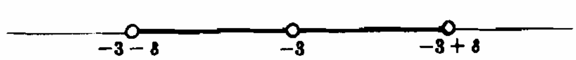


(*c*) Intervalo abierto que contiene al punto 3. Para hallar los extremos hacemos $x - 3 = 1$, con lo cual, $x = 4$ y $3 - x = 1$, de donde $x = 2$. (Hay que tener en cuenta que $|x - 3| = x - 3$ ó $3 - x$ según el valor de x.) Los extremos son 2 y 4 y el intervalo es el $2 < x < 4$. Obsérvese que el intervalo está formado por todos los puntos cuya distancia a 3 sea menor que 1.



(*d*) Siendo δ un número positivo dado, el intervalo $2 - \delta < x < 2 + \delta$ está formado por todos los puntos cuya distancia a 2 sea menor que δ. Este intervalo es un *entorno* del punto 2.

(*e*) La desigualdad $|x + 3| < \delta$ define el intervalo $-3 - \delta < x < -3 + \delta$ que contiene al punto -3. La condición $0 < |x + 3|$ implica que $x \neq -3$. Por tanto, el campo de variación de x está formado por los dos intervalos abiertos $-3 - \delta < x < -3$ y $-3 < x < -3 + \delta$. Los dos intervalos constituyen el *entorno reducido* del punto -3.



3. Resolver las desigualdades: (*a*) $18x - 3x^2 > 0$, (*b*) $(x+3)(x-2)(x-4) < 0$, (*c*) $(x+1)^2(x-3) > 0$.

(*a*) De la igualdad $18x - 3x^2 = 3x(6-x) = 0$, se deduce, $x = 0$ y $x = 6$; a continuación, se determina el signo de $18x - 3x^2$ para los valores de x pertenecientes a los intervalos $x < 0$, $0 < x < 6$ y $x > 6$. La desigualdad se verifica para los valores de x comprendidos en el intervalo $0 < x < 6$.

(*b*) Una vez determinado el signo de $(x+3)(x-2)(x-4)$ en cada uno de los intervalos $x < -3$, $-3 < x < 2$, $2 < x < 4$ y $x > 4$, se llega a la conclusión de que la desigualdad se satisface para todos los valores de x de los intervalos $x < -3$ y $2 < x < 4$.

(*c*) Los intervalos que se deben estudiar son $x < -1$, $-1 < x < 3$ y $x > 3$. La desigualdad se cumple para $x > 3$. Obsérvese que como $(x+1)^2 > 0$ para todos los valores de x, no es preciso tenerlo en cuenta. ¿Se podría decir lo mismo del factor $(x+1)^3$?

4. Dada $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$, hallar $f(0), f(-1), f(2a), f(1/x), f(x+h)$.

$$f(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}, \qquad f(-1) = \frac{-1-1}{1+2} = -\frac{2}{3}, \qquad f(2a) = \frac{2a-1}{4a^2+2},$$

$$f(1/x) = \frac{1/x - 1}{1/x^2 + 2} = \frac{x - x^2}{1 + 2x^2}, \qquad f(x+h) = \frac{x+h-1}{(x+h)^2+2} = \frac{x+h-1}{x^2+2hx+h^2+2}$$

5. Si $f(x) = 2^x$, demostrar que (*a*) $f(x+3) - f(x-1) = \dfrac{15}{2} f(x)$ y (*b*) $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$.

(*a*) $f(x+3) - f(x-1) = 2^{x+3} - 2^{x-1} = 2^x(2^3 - \frac{1}{2}) = \dfrac{15}{2} f(x)$ (*b*) $\dfrac{f(x+3)}{(x-1)} = \dfrac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = 2^4 = f(4)$.

6. Si $f(x) = \log_a 1/x$, demostrar que (*a*) $f(a^3) = -3$ y (*b*) $f(a^{-1/z}) = 1/z$.

(*a*) $f(a^3) = \log_a 1/a^3 = \log_a a^{-3} = -3$ (*b*) $f(a^{-1/z}) = \log_a 1/a^{-1/z} = \log_a a^{1/z} = 1/z$.

7. Si $f(x) = \log_a x$ y $F(z) = a^z$, demostrar que $F(f(x)) = f(F(x))$.

$F(f(x)) = F(\log_a x) = a^{\log_a x} = x = \log_a a^x = f(a^x) = f(F(x))$.

8. Determinar el campo de variación de la variable independiente x en las funciones siguientes:

(*a*) $y = \sqrt{4 - x^2}$, (*b*) $y = \sqrt{x^2 - 16}$, (*c*) $y = \dfrac{1}{x-2}$, (*d*) $y = \dfrac{1}{x^2-9}$, (*e*) $y = \dfrac{x}{x^2+4}$.

(*a*) Como y debe ser real, $4 - x^2 \geq 0$, o sea, $x^2 \leq 4$; el campo de variación de x es el intervalo $-2 \leq x \leq 2$ o bien $|x| \leq 2$. Es decir, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ está *definida* en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$ y solo en él.

(*b*) En este caso $x^2 - 16 \geq 0$ o bien $x^2 \geq 16$; el campo de variación de x está formado por los intervalos $x \leq -4$ y $x \geq 4$, o bien $|x| \geq 4$.

(*c*) La función está definida para todos los valores de x excepto para $x = 2$. El campo de variación de x se puede expresar por $x < 2$, $x > 2$ o por $x \neq 2$.

(*d*) La función está definida para $x \neq \pm 3$.

(*e*) Como $x^2 + 4 \neq 0$ para todo valor de x, el campo de variación de x es el conjunto de los números reales.

9. Representar gráficamente las funciones definidas por:

$f(x) = 5$ cuando $0 < x \leq 1$ $\quad f(x) = 10$ cuando $1 < x \leq 2$
$f(x) = 15$ cuando $2 < x \leq 3$ $\quad f(x) = 20$ cuando $3 < x \leq 4$ $\quad$ etc.

Determinar los campos de variación de x y de $y = f(x)$.

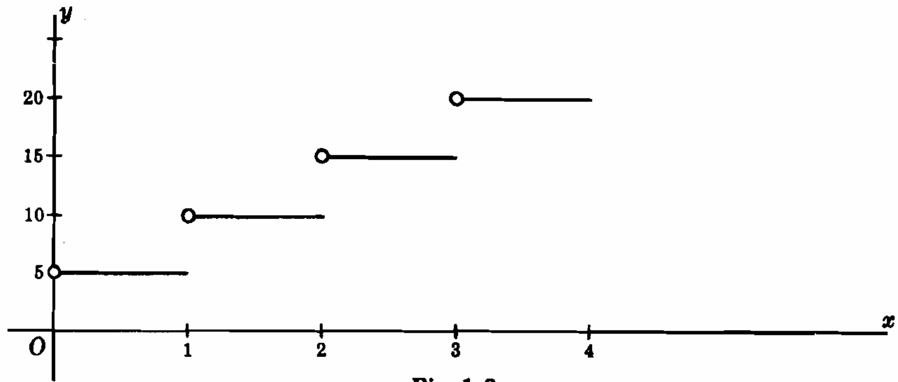


Fig. 1-2

La función $f(x)$ representa el coste (en unidades arbitrarias) de la franquicia de correos por el interior para el envío de un peso x (en unidades arbitrarias). El campo de variación de x es el intervalo $x > 0$ y el de $y = f(x)$, es el conjunto formado por los números 5, 10, 15, 20, . . .

10. Para proteger un terreno rectangular se precisaron 2 000 m de alambrada. Si una de las dimensiones es x m, expresar el área, y (m²), en función de x. Determinar el campo de variación de x.

Como una de las dimensiones es x, la otra será $\frac{1}{2}(2\,000 - 2x) = 1\,000 - x$.

El área es $y = x(1\,000 - x)$ y el campo de variación de x es $0 < x < 1\,000$.

11. Expresar la longitud l de una cuerda de una circunferencia de 8 cm de radio en función de su distancia x cm al centro de la misma. Determinar el campo de variación de x.

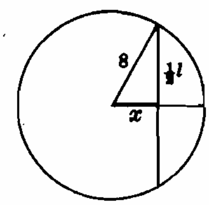


Fig. 1-3

De la Fig. 1-3 se deduce, $\frac{1}{2}l = \sqrt{64 - x^2}$ y $l = 2\sqrt{64 - x^2}$.

El campo de variación de x es el intervalo $0 \le x < 8$.

12. En cada uno de los vértices de una placa cuadrada de estaño de 12 cm de lado, se cortan pequeños cuadrados de x cm de lado, doblándose a continuación los bordes hacia arriba para formar una caja abierta. Expresar el volumen V (cm³) en función de x y determinar el campo de variación de cada una de las variables.

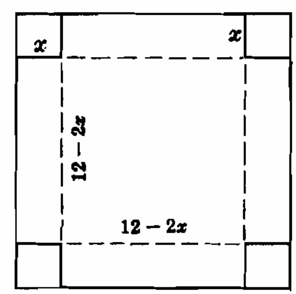


Fig. 1-4

La base de la caja es un cuadrado de $(12 - 2x)$ cm de lado y su altura es de x cm. El volumen, $V = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2$. El campo de variación de x es el intervalo $0 < x < 6$.

A medida que aumenta x, dentro de su campo de variación, también lo hace V hasta un determinado valor para luego disminuir. Así pues, de todas las cajas que se pueden construir hay una, M, de volumen máximo. Para determinar M es preciso conocer el valor de x para el cual V comienza a disminuir. Este problema se resolverá en un capítulo posterior.

13. Si $f(x) = x^2 + 2x$, hallar $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ e interpretar el resultado.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[(a+h)^2 + 2(a+h)] - (a^2 + 2a)}{h}$$
$$= 2a + 2 + h$$

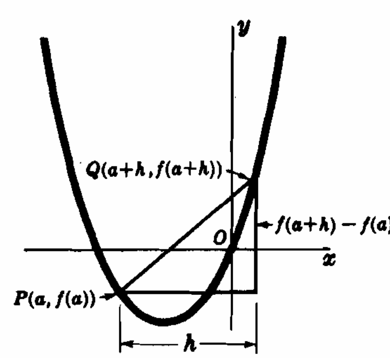


Fig. 1-5

Sobre el gráfico de la función (Fig. 1-5) situamos los puntos P y Q cuyas abscisas respectivas son a y $(a + h)$. La ordenada de P es $f(a)$ y la de Q es $f(a + h)$. Por tanto,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}}$$
$$= \text{pendiente de } PQ$$

14. Escribir los cinco primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:

(*a*) $\left\{1 - \frac{1}{2n}\right\}$. Tendremos $s_n = 1 - \frac{1}{2n}$; por tanto $s_1 = 1 - \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$,

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4},\quad s_3 = 1 - \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{5}{6},\quad s_4 = 1 - \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{7}{8},$$

y $s_5 = 9/10$. Los términos pedidos son 1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10.

(*b*) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}\right\}$ Tendremos $s_n = (-1)^2\frac{1}{3\cdot 1 - 1} = 1/2$,

$$s_2 = (-1)^3\frac{1}{3\cdot 2 - 1} = -1/5,\quad s_3 = (-1)^4\frac{1}{3\cdot 3 - 1} = 1/8,$$

$s_4 = -1/11$, $s_5 = 1/14$. Los términos pedidos son 1/2, —1/5, 1/8, —1/11, 1/14.

(*c*) $\left\{\frac{2n}{1+n^2}\right\}$. Los términos son 1, 4/5, 3/5, 8/17, 5/13.

(*d*) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)(n+2)}\right\}$. Los términos son $\frac{1}{2\cdot 3}, \frac{-2}{3\cdot 4}, \frac{3}{4\cdot 5}, \frac{-4}{5\cdot 6}, \frac{5}{6\cdot 7}$.

(*e*) $\{\frac{1}{2}[(-1)^n + 1]\}$. Los términos son 0, 1, 0, 1, 0.

15. Escribir el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

(*a*) 1, —1/3, 1/5, 1/7, 1/9, . . .

Los términos son los recíprocos de los números impares positivos. El término general es $\frac{1}{2n-1}$.

(*b*) 1, —1/2, 1/3, —1/4, 1/5, . . .

Prescindiendo del signo, se trata de los recíprocos de los enteros positivos. El término general es

$(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ o $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

(*c*) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, ...

Los términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos. El término general es $1/n^2$.

(*d*) $\frac{1}{2}, \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \ldots.$ El término general es $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$.

(*e*) 1/2, —4/9, 9/28, —16/65, ...

Sin tener en cuenta el signo, los numeradores son los cuadrados de los enteros positivos, y los denominadores son los cubos de dichos enteros incrementados en una unidad. El término general es $(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$.

16. Demostrar que si a y b son dos números cualesquiera, $|a+b| \le |a| + |b|$.

Consideremos los siguientes casos: (*a*) a y b ambos positivos, (*b*) a y b ambos negativos, (*c*) a y b uno positivo y otro negativo.

(*a*) Como $|a| = a$, $|b| = b$, y $a + b$ es cero o un número positivo, tendremos

$$|a+b| = a + b = |a| + |b|$$

(*b*) Como $|a| = -a$, $|b| = -b$, y $a + b$ es negativo, tendremos

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = |a| + |b|$$

(*c*) Supongamos $a > 0$ y $b < 0$; entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$.

Si $|a| > |b|$, entonces $|a+b| = a + b < a - b = |a| + |b|$.
Si $|a| < |b|$, entonces $|a+b| = -a - b < a - b = |a| + |b|$.
Si $|a| = |b|$, entonces $|a+b| = 0 < |a| + |b|$.

Por tanto, si $a > 0$ y $b < 0$ o si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a+b| < |a| + |b|$.

Problemas propuestos

17. Representar cada uno de los intervalos siguientes:

(*a*) $-5 < x < 0$ (*c*) $-2 \leqslant x < 3$ (*e*) $|x| < 3$ (*g*) $|x-2| < \frac{1}{2}$ (*i*) $0 < |x-2| < 1$ (*k*) $|x-2| \geqslant 1$
(*b*) $x \leqslant 0$ (*d*) $x \geqslant 1$ (*f*) $|x| \geqslant 5$ (*h*) $|x+3| > 1$ (*j*) $0 < |x+3| < \frac{1}{4}$

18. Si $f(x) = x^2 - 4x + 6$, hallar (*a*) $f(0)$, (*b*) $f(3)$, (*c*) $f(-2)$. *Sol.* (*a*) 6, (*b*) 3, (*c*) 18
Probar que $f(\frac{1}{2}) = f(7/2)$ y $f(2-h) = f(2+h)$.

19. Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, hallar (*a*) $f(0)$, (*b*) $f(1)$, (*c*) $f(-2)$. *Sol.* (*a*) -1, (*b*) 0, (*c*) 3

Probar que $f(1/x) = -f(x)$ y $f(-1/x) = -1/f(x)$.

20. Si $f(x) = x^2 - x$, demostrar que $f(x+1) = f(-x)$.

21. Si $f(x) = 1/x$, demostrar que $f(a) - f(b) = f\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)$.

22. Si $y = f(x) = (5x+3)/(4x-5)$, demostrar que $x = f(y)$.

23. Determinar el dominio de definición de cada una de las funciones siguientes:

(*a*) $y = x^2 + 4$ (*c*) $y = \sqrt{x^2-4}$ (*e*) $y = \dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$ (*g*) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(*b*) $y = \sqrt{x^2+4}$ (*d*) $y = \dfrac{x}{x+3}$ (*f*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ (*h*) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

Sol. (*a*), (*b*), (*g*) todos los valores de x; (*c*) $|x| \geqslant 2$; (*d*) $x \neq -3$; (*e*) $x \neq -1, 2$; (*f*) $-3 < x < 3$; (*h*) $0 \leqslant x < 2$

24. Hallar $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, siendo: (*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ para $a \neq 2$, $a+h \neq 2$; (*b*) $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $a \geqslant 4$, $a+h \geqslant 4$; (*c*) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ para $a \neq -1$, $a+h \neq -1$.

Sol. (*a*) $\dfrac{-1}{(a-2)(a+h-2)}$, (*b*) $\dfrac{1}{\sqrt{a+h-4} + \sqrt{a-4}}$, (*c*) $\dfrac{1}{(a+1)(a+h+1)}$

25. Escribir los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones.

(*a*) $\left\{1 + \dfrac{1}{n}\right\}$ (*c*) $\{a + (n-1)d\}$ (*e*) $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right\}$ (*g*) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^n}\right\}$

(*b*) $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ (*d*) $\{(-1)^{n+1}ar^{n-1}\}$ (*f*) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$ (*h*) $\left\{\dfrac{(2n)!}{3^n 5^{n-1}}\right\}$

Sol. (*a*) 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5
(*b*) 1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30
(*c*) a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$
(*d*) a, $-ar$, ar^2, $-ar^3$, ar^4
(*e*) $1/\sqrt{2}$, $2/\sqrt{5}$, $3/\sqrt{10}$, $4/\sqrt{17}$, $5/\sqrt{26}$
(*f*) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $2/3$, $\frac{1}{4}\sqrt{5}$, $\sqrt{6}/5$
(*g*) 1, $-1/2$, 2/9, $-3/32$, 24/625
(*h*) $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2^3}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{2^4}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{7 \cdot 2^7}{3^2 \cdot 5^2}$, $\dfrac{7 \cdot 2^8}{3 \cdot 5^2}$

26. Escribir el término general de cada una de las sucesiones.

(*a*) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, . . .
(*b*) 1/2, $-1/6$, 1/12, $-1/20$, 1/30, . . .
(*c*) 1/2, 1/12, 1/30, 1/56, 1/90, . . .
(*d*) $1/5^3, 3/5^5, 5/5^7, 7/5^9, 9/5^{11}, \ldots$
(*e*) $1/2!, -1/4!, 1/6!, -1/8!, 1/10!, \ldots$

Sol. (*a*) $\dfrac{n}{n+1}$, (*b*) $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2+n}$, (*c*) $\dfrac{1}{(2n-1)2n}$, (*d*) $\dfrac{2n-1}{5^{2n+1}}$, (*e*) $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n)!}$

27. «Siempre que $|x-4| < 1$, $|f(x)| > 1$» significa: «siempre que x esté comprendido entre 3 y 5, $f(x)$ es menor que -1, o bien mayor que $+1$». Interpretar las siguientes expresiones:

(*a*) Siempre que $|x-1| < 2$, $f(x) < 10$.
(*b*) Siempre que $|x-5| < 2$, $f(x) > 0$.
(*c*) Siempre que $0 < |x-6| < 1$, $f(x) > 0$.
(*d*) Siempre que $|x-3| < 2$, $|f(x) - 9| < 4$.

28. Dibujar la función $y = f(x) = 6x - x^2$ y determinar cuál de las expresiones (*a*) — (*d*) del Problema 27 son verdaderas o falsas. *Sol.* (*b*) es falsa.

29. Demostrar que, siendo a y b dos números cualesquiera: $|a \pm b| = |b \pm a|$; $|ab| = |a| \cdot |b|$; $|a/b| = |a| / |b|$, $b \neq 0$; $|a+b| \geq |a| - |b|$; $|a-b| \leq |a| + |b|$; $|a-b| \geq |a| - |b|$.

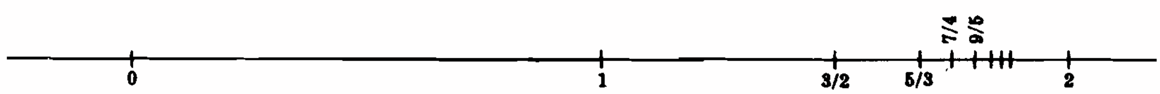
Capítulo 2

Límites

LIMITE DE UNA SUCESION. Si se sitúan sobre una escala numérica los puntos correspondientes a los términos de la sucesión

$$1,\ 3/2,\ 5/3,\ 7/4,\ 9/5,\ \ldots,\ 2 - 1/n,\ \ldots \tag{1}$$

se observa que se van aproximando al punto 2 de manera que existen puntos de la sucesión cuya distancia a 2 es menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. Por ejemplo, el pun-



to 2 001/1 001 y todos los siguientes distan de 2 una cantidad menor que 1/1 000; el punto 20 000 001/10 000 001 y todos los siguientes distan de 2 una cantidad menor que 1/10 000 000, y así sucesivamente. Estas condiciones se expresan diciendo que *el límite de la sucesión es* 2.

Si x es una variable cuyo campo de variación es la sucesión (*1*) se dice que x *se aproxima al límite* 2, o bien que x *tiende a* 2, y se representa por $x \to 2$.

La sucesión (*1*) no contiene a su límite 2. Sin embargo, la sucesión 1, 1/2, 1, 3/4, 1, 5/6, 1, . . ., en la que todos los términos impares son iguales a 1, tiene por límite 1. Por tanto, una sucesión puede o no contener a su propio límite. Sin embargo, como se verá más adelante, decir que $x \to a$ implica $x \neq a$, esto es, *se sobrentenderá que cualquier sucesión dada no contiene a su límite como término.*

LIMITE DE UNA FUNCION. Si $x \to 2$ según la sucesión (*1*), $f(x) = x^2 \to 4$ según la sucesión 1, 9/4, 25/9, 49/16, . . ., $(2 - 1/n)^2$, . . . Ahora bien, si $x \to 2$ según la sucesión

$$2{,}1;\ 2{,}01;\ 2{,}001;\ 2{,}0001;\ \ldots;\ 2 + 1/10^n;\ \ldots \tag{2}$$

$x^2 \to 4$ según la sucesión 4,41; 4,0401; 4,004001; . . ., $(2 + 1/10^n)^2$; . . . Parece razonable esperar que x^2 tiende a 4 siempre que x tienda a 2. En estas condiciones se establece que «el límite de x^2 cuando x tiende a 2 es igual a 4», y se representa por el simbolismo $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

(Ver Problemas 1-2.)

LIMITES POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA. Cuando $x \to 2$ según la sucesión (*1*), cada término es siempre menor que 2. Se expresa diciendo que x *tiende a* 2 *por la izquierda*, y se representa por $x \to 2^-$. Análogamente, cuando $x \to 2$ según la sucesión (*2*), cada término es siempre mayor que 2. Se expresa diciendo que x *tiende a* 2 *por la derecha* y se representa por $x \to 2^+$. Es evidente que la existencia del $\lim_{x \to a} f(x)$ implica la del *límite por la izquierda* $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y la del *límite por la derecha* $\lim_{x \to a^+} f(x)$, y que ambos son iguales. Sin embargo, la existencia del límite por la derecha (izquierda) no implica necesariamente la existencia del límite por la izquierda (derecha).

Ejemplo 1:

Sea la función $f(x) = \sqrt{9-x^2}$. El dominio de definición es el intervalo $-3 \leq x \leq 3$. Si a es un número cualquiera del intervalo abierto $-3 < x < 3$, $\lim_{x\to a} \sqrt{9-x^2}$ existe y es igual a $\sqrt{9-a^2}$. Considérese ahora que $a = 3$. Si x tiende a 3 por la izquierda, $\lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$, y si x tiende a 3 por la derecha, $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{9-x^2}$ no existe, puesto que para $x > 3$, $\sqrt{9-x^2}$ es un número imaginario. Por tanto, no existe $\lim_{x\to 3} \sqrt{9-x^2}$.

Análogamente, $\lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2}$ existe y es igual a 0; sin embargo, no existen ni $\lim_{x\to -3^-} \sqrt{9-x^2}$ ni $\lim_{x\to -3} \sqrt{9-x^2}$.

TEOREMAS SOBRE LIMITES.

I. Si $f(x) = c$, constante, tendremos $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

Si $\lim_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim_{x\to a} g(x) = B$, resulta:

II. $\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = kA$, siendo k una constante.

III. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B.$

IV. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B.$

V. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, siempre que $B \neq 0$.

VI. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, siempre que $\sqrt[n]{A}$ sea un número real.

INFINITO. Sea el campo de variación de la variable x la sucesión $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_n, \ldots$ En estas condiciones se establece:

(i) *x tiende a más infinito* $[x \to +\infty]$ si a partir de un determinado término, éste y todos los que le siguen, son mayores que cualquier número positivo dado, por grande que éste sea. Por ejemplo, $x \to +\infty$ en la sucesión 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) *x tiende a menos infinito* $[x \to -\infty]$ si a partir de un determinado término, éste y todos los que le siguen son menores que cualquier número negativo dado, por pequeño que éste sea. Por ejemplo, $x \to -\infty$ en la sucesión $-2, -4, -6, -8, \ldots$

(iii) *x tiende a infinito* $[x \to \infty]$ si $|x| \to +\infty$, esto es, $x \to +\infty$, o bien, $x \to -\infty$.

Se dice que una función $f(x)$ *tiende a más infinito* cuando $x \to a$, $\left[\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\right]$, si cuando x se aproxima a a (sin tomar el valor a), $f(x)$ se mantiene, a partir de un determinado término en adelante, superior a un número positivo dado, por grande que éste sea.

Se dice que una función $f(x)$ *tiende a menos infinito* cuando $x \to a$, $\left[\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\right]$, si cuando x se aproxima a a (sin tomar el valor a), $f(x)$ se mantiene, a partir de un determinado término en adelante, inferior a un número negativo dado, por pequeño que éste sea.

Se dice que una función $f(x)$ *tiende a infinito* cuando $x \to a$, $\left[\lim_{x\to a} f(x) = \infty\right]$, si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$

Ejemplo 2:

(*a*) Cuando $x \to 2$ según la sucesión (*1*), $f(x) = \dfrac{1}{2-x} \to +\infty$ según la sucesión 1, 2, 3, 4, $\cdots$ En general, si $x \to 2^-$, $\dfrac{1}{2-x} \to +\infty$ y se escribe, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$.

(*b*) Cuando $x \to 2$ según la sucesión (*2*), $f(x) = \dfrac{1}{2-x} \to -\infty$ según la sucesión -10, -100, $-1\,000$, $-10\,000$, $\cdots$ En general, si $x \to 2^+$, $\dfrac{1}{2-x} \to -\infty$ y se escribe $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$.

(*c*) Cuando $x \to 2$ según (*1*) y (*2*), $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{2-x}\right| \to +\infty$ y se escribe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

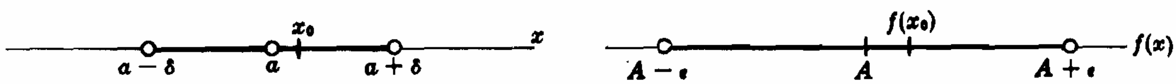
Nota. Los símbolos $+\infty$, $-\infty$, ∞ *no* deben considerarse como nuevos números a añadir al conjunto de los números reales, sino que se utilizan para indicar un cierto comportamiento de una variable o de una función. Cuando una variable o el valor de una función aumenta constantemente sin llegar a alcanzar nunca un determinado valor M el límite de dicha variable o función será M o un número inferior a él. Cuando no existe tal número M, se dice que la variable o función tiende a infinito. En este último caso *no existe límite*; la designación de límite se sigue empleando solo por conveniencia.

(Ver Problemas 3-12.)

LA DEFINICION $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ se ha establecido estudiando el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to a$ según varias sucesiones. En todos los casos se dedujo que $f(x) \to A$, por lo que se puede pensar que a este mismo resultado se habría llegado (sin comprobar) para todas las sucesiones que tengan por límite a. Ahora bien, cuando $x \to a$ según cada una de las sucesiones quiere decir que el valor de x se aproxima a a. La noción fundamental del concepto de límite es la de que siempre que x se aproxime a a, sin llegar nunca a alcanzar este valor, $f(x)$ se aproxima a A. Este hecho se puede establecer en términos más precisos, en la forma siguiente:

A. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ si dado un número positivo ϵ tan pequeño como se quiera, existe otro número positivo δ tal que cuando $0 < |x - a| < \delta$ se verifica $|f(x) - A| < \epsilon$.

Estas dos desigualdades establecen los intervalos:



(i) (ii)

Fig. 2-1

De aquí resulta otra forma de establecer la esencia del concepto de límite: fijado el número ϵ [con lo cual queda definido el intervalo (ii)], se puede encontrar un número δ [y determinar el intervalo (i),] de forma que, siempre que $x \neq a$ en el intervalo (i), por ejemplo x_0, $f(x)$ esté contenido en el intervalo (ii).

Ejemplo 3:

Utilizando la definición de límite, demostrar que $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 3x) = 10$.

Elegido un valor de ϵ, se debe encontrar un $\delta > 0$ de forma que, siempre que $0 < |x - 2| < \delta$, se verifique, $|(x^2 + 3x) - 10| < \epsilon$. Observemos que si $0 < |x - 2| < \lambda < 1$, también se verificará $|x-2|^n < \lambda$ para cualquier valor positivo de n. Por tanto,

$$|(x^2 + 3x) - 10| \;=\; |(x-2)^2 + 7(x-2)| \;\leq\; |x-2|^2 + 7\,|x-2| \;<\; \lambda + 7\lambda \;=\; 8\lambda$$

Ahora bien, para que $8\lambda < \epsilon$ basta con que $\lambda < \epsilon/8$. Por consiguiente, dado el número ϵ, se puede encontrar un δ, menor que $\epsilon/8$, que satisface la condición de límite.

(Ver Problemas 13-14.)

OTROS TIPOS DE LIMITES.

B. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si dado un número positivo M, *tan grande como se quiera*, existe otro δ tal que, para $0 < |x - a| < \delta$ se verifica $|f(x)| > M$.

Cuando $f(x) > M$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; si $f(x) < -M$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

C. $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ si dado un número positivo ϵ, *tan pequeño como se quiera*, existe un número positivo M tal que, para $|x| > M$, se verifica $|f(x) - A| < \epsilon$.

D. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si dado un número positivo M, *tan grande como se quiera*, existe un número positivo P tal que, para $|x| > P$, se verifica $|f(x)| > M$.

(Ver Problema 15.)

Cuando existen los límites, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$, son válidos todos los teoremas de este capítulo. Sin embargo, estos teoremas no se pueden aplicar cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ o cuando $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Por ejemplo, $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{1-x} = \infty$ y $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x^2} = \infty$, pero $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{1-x}\Big/\dfrac{1}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to 1} x(1+x) = 2$. Igualmente, $\lim_{x\to+\infty} (x^2+5) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} (2-x^2) = -\infty$ pero $\lim_{x\to+\infty} \{(x^2+5)+(2-x^2)\} = \lim_{x\to+\infty} 7 = 7$.

Problemas resueltos

1. Calcular el límite de las sucesiones siguientes:

(*a*) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...
(*b*) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, ...
(*c*) 2, 5/2, 8/3, 11/4, 14/5, ...
(*d*) 5, 4, 11/3, 7/2, 17/5, ...
(*e*) 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32,...
(*f*) 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999;...

(*a*) El término general es $1/n$. A medida que n toma los valores 1, 2, 3, 4 ..., va disminuyendo $1/n$ pero conservándose siempre positivo. El límite es 0.
(*b*) El término general es $(1/n)^2$; el límite es 0.
(*c*) El término general es $3 - 1/n$; el límite es 3.
(*d*) El término general es $3 + 2/n$; el límite es 3.
(*e*) El término general es $1/2^n$; como en (*a*), el límite es 0.
(*f*) El término general es $1 - 1/10^n$; el límite es 1.

2. Calcular el límite de $y = x + 2$, siendo x los términos de cada una de las sucesiones del Problema 1.

(*a*) $y \to 2$ según la sucesión 3, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, ..., $2 + 1/n$, ...
(*b*) $y \to 2$ según la sucesión 3, 9/4, 19/9, 33/16, 51/25, ..., $2 + 1/n^2$, ...
(*c*) $y \to 5$ según la sucesión 4, 9/2, 14/3, 19/4, 24/5, ..., $5 - 1/n$, ...
(*d*) $y \to 5$ según la sucesión 7, 6, 17/3, 11/2, 27/5, ..., $5 + 2/n$, ...
(*e*) $y \to 2$ según la sucesión 5/2, 9/4, 17/8, 33/16, 65/32, ..., $2 + 1/2^n$, ...
(*f*) $y \to 3$ según la sucesión 2,9; 2,99; 2,999; 2,9999; ...; $3 - \dfrac{1}{10^n}$; ...

3. Calcular:

(*a*) $\lim_{x\to 2} 5x = 5\lim_{x\to 2} x = 5\cdot 2 = 10$

(*b*) $\lim_{x\to 2} (2x+3) = 2\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 = 2\cdot 2 + 3 = 7$

(*c*) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x + 1) = 4 - 8 + 1 = -3$

(*d*) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{\lim_{x\to 3}(x-2)}{\lim_{x\to 3}(x+2)} = \dfrac{1}{5}$

(*e*) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+4} = \dfrac{4-4}{4+4} = 0$

(*f*) $\lim_{x\to 4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(25-x^2)} = \sqrt{9} = 3$

Nota. Del resultado de estos problemas no se debe sacar la conclusión de que $\lim_{x\to a} f(x)$ es invariablemente $f(a)$. El término $f(a)$ significa el valor de $f(x)$ *cuando* $x = a$, y, se ha visto en el primer párrafo del Capítulo, que cuando $x \to a$, la variable x *nunca llega a ser* igual a a.

4. Hallar el límite de $f(x) = (-1)^x$ siendo x los términos de las sucesiones

$$(a)\quad 1/3,\ 1/5,\ 1/7,\ 1/9,\ \ldots \quad \text{y} \quad (b)\quad 2/3,\ 2/5,\ 2/7,\ 2/9,\ \ldots$$

¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{x\to 0} (-1)^x$ y $f(0)$?

(a) $(-1)^x \to -1$ en la sucesión $-1, -1, -1, -1, \ldots$
(b) $(-1)^x \to +1$ en la sucesión $+1, +1, +1, +1, \ldots$

Como $(-1)^x$ tiende hacia límites distintos cuando x toma los valores de las dos sucesiones, $\lim_{x\to 0} (-1)^x$ no existe; $f(0) = (-1)^0 = +1$.

5. Hallar:

$$(a)\quad \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$$

La división por $(x - 4)$, antes del paso al límite, es válida, porque como se ha dicho, cuando $x \to 4$ es $x \neq 4$; por tanto, $x - 4$ nunca es igual a cero.

$$(b)\quad \lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{9}{2}$$

$$(c)\quad \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

Aquí, y también en los Problemas 7 y 8, h es una variable y, por ello, se podría pensar en una función de dos variables. Sin embargo, el que x sea una variable no juega papel alguno en estos problemas, de forma que se puede considerar a x como una constante, es decir, un valor particular de su campo de variación. El fundamento de este problema, como se verá en el Capítulo 4, es que si x es un valor cualquiera, como por ejemplo $x = x_0$, en el dominio de $y = x^2$, se verifica

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \quad \text{es siempre igual al doble del valor de } x.$$

$$(d)\quad \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5}) = 6$$

$$(e)\quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1} = \infty; \text{ no existe límite.}$$

6. Hallar los siguientes límites, dividiendo el numerador y denominador por la potencia mayor de x en la fracción, teniendo en cuenta luego que $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

$$(a)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{3-0}{9+0} = \frac{1}{3}$$

$$(b)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+2/x+1/x^2}{6-3/x+4/x^2} = \frac{6+0+0}{6-0+0} = 1$$

$$(c)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x+1/x^2-2/x^3}{4-1/x^3} = \frac{0}{4} = 0$$

$$(d)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1/x+1/x^3} = \infty; \text{ no existe límite.}$$

7. Dada $f(x) = x^2 - 3x$, hallar $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Como $f(x) = x^2 - 3x$, $f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h)$ y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2hx+h^2-3x-3h)-(x^2-3x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2-3h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h-3) = 2x - 3$$

8. Dada $f(x) = \sqrt{5x+1}$, hallar $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $x > -1/5$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(5x+5h+1) - (5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

9. En las funciones siguientes, determinar los puntos $x = a$ para los cuales se anula el denominador, y calcular el límite de y cuándo $x \to a^-$ y $x \to a^+$.

(*a*) $y = f(x) = 2/x$. El denominador es cero para $x = 0$. Cuando $x \to 0^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to 0^+$, $y \to +\infty$.

(*b*) $y = f(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$. El denominador es cero para $x = -3$ y $x = 2$. Cuando $x \to -3^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to -3^+$, $y \to +\infty$. Cuando $x \to 2^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to 2^+$, $y \to +\infty$.

(*c*) $y = f(x) = \dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$. El denominador es cero para $x = -2$ y $x = 1$. Cuando $x \to -2^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to -2^+$, $y \to +\infty$. Cuando $x \to 1^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 1^+$, $y \to -\infty$.

(*d*) $y = f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$. El denominador es cero para $x = 3$. Cuando $x \to 3^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 3^+$, $y \to +\infty$.

(*e*) $y = f(x) = \dfrac{(x+2)(1-x)}{x-3}$. El denominador es cero para $x = 3$. Cuando $x \to 3^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 3^+$, $y \to +\infty$. mal

10. Estudiar (*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3+2^{1/x}}$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$.

(*a*) Sea $x \to 0^-$; entonces $1/x \to -\infty$, $2^{1/x} \to 0$, y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{3+2^{1/x}} = 1/3$.

Sea $x \to 0^+$; entonces $1/x \to +\infty$, $2^{1/x} \to +\infty$, y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3+2^{1/x}} = 0$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3+2^{1/x}}$ no existe.

(*b*) Sea $x \to 0^-$; entonces $2^{1/x} \to 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \dfrac{1}{3}$.

Sea $x \to 0^+$. Para $x \neq 0$, $\dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \dfrac{2^{-1/x}+1}{3\cdot 2^{-1/x}+1}$ y como $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{-1/x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2^{-1/x}+1}{3\cdot 2^{-1/x}+1} = 1$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ no existe.

11. Estudiar el límite de cada una de las funciones del Problema 9 cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$.

(*a*) Cuando $|x|$ es grande, $|y|$ es pequeño.
Para $x = -1\,000$, $y < 0$; cuando $x \to -\infty$, $y \to 0^-$. Para $x = +1\,000$, $y > 0$; cuando $x \to +\infty$, $y \to 0^+$.

(*b*), (*c*) Igual que en (*a*).

(*d*) Cuando $|x|$ es grande, $|y|$ es aproximadamente 1.
Para $x = -1\,000$, $y < 1$; cuando $x \to -\infty$, $y \to 1^-$. Para $x = +1\,000$, $y > 1$; cuando $x \to +\infty$, $y \to 1^+$.

(*e*) Cuando $|x|$ es grande, $|y|$ es grande.
Para $x = -1\,000$, $y > 0$; cuando $x \to -\infty$, $y \to +\infty$. Para $x = +1\,000$, $y < 0$; cuando $x \to +\infty$, $y \to -\infty$.

12. Estudiar el límite de la función del Problema 9 del Capítulo 1 cuando $x \to a^-$ y cuando $x \to a^+$ siendo a un número cualquiera entero y positivo:

Consideremos $a = 2$. Si $x \to 2^-$ según la sucesión *(1)*, $f(x) \to 10$ según la sucesión 5, 10, 10, 10, ...; si $x \to 2^+$ según la sucesión *(2)*, $f(x) \to 15$. Por tanto, no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ni tampoco $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

13. Aplicando la definición de límite, probar que:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 1} (4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) = 5$, (*b*) $\lim\limits_{x\to -1} (-2x^3 + 9x + 4) = -3$

(*a*) Dado un ϵ, para $0 < |x - 1| < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} |(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5,| &= |4(x-1)^3 + 15x^2 - 36x + 21| = |4(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 6(x-1)| \\ &\leqslant 4|x-1|^3 + 15|x-1|^2 + 6|x-1| \\ &< 4\lambda + 15\lambda + 6\lambda = 25\lambda \end{aligned}$$

Para que $|(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| < \epsilon$, basta con que $\lambda < \epsilon/25$; por consiguiente, dado un ϵ existe un δ menor que $\epsilon/25$, que satisface la condición de límite.

(*b*) Dado un ϵ, para $0 < |x + 1| < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} |(-2x^3 + 9x + 4) + 3| &= |-2(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 3(x+1)| \\ &\leqslant 2|x+1|^3 + 6|x+1|^2 + 3|x+1| < 11\lambda \end{aligned}$$

por lo que, dado un ϵ, existe un δ, menor que $\epsilon/11$, que satisface la condición de límite.

14. Siendo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, probar que

(*a*) $\lim\limits_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B$, (*b*) $\lim\limits_{x\to a} \{f(x)\cdot g(x)\} = AB$, (*c*) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, de la definición de límite se deduce que dados los números $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$, tan pequeños como se quiera, existen dos valores $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, o tales que:

(i) para $0 < |x - a| < \delta_1$ es $|f(x) - A| < \epsilon_1$, y

(ii) para $0 < |x - a| < \delta_2$ es $|g(x) - B| < \epsilon_2$.

Si se elige un número λ menor que δ_1 y δ_2, se verificará

(iii) para $0 < |x - a| < \lambda$ que $|f(x) - A| < \epsilon_1$ y $|g(x) - B| < \epsilon_2$.

(*a*) Elegido un valor de ϵ, se necesita un $\delta > 0$ tal que para $0 < |x - a| < \delta$, se verifique $|\{f(x) + g(x)\} - \{A+B\}| < \epsilon$.

Ahora bien, $|\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| = |\{f(x) - A\} + \{g(x) - B\}| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$. De (iii) $|f(x) - A| < \epsilon_1$ siempre que $0 < |x - a| < \lambda$ y $|g(x) - A| < \epsilon_2$ siempre que $0 < |x - a| < \lambda$, siendo λ menor que δ_1 y δ_2. Por tanto,

$$|\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \lambda$$

Tomando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon$ y $\delta = \lambda$ se tiene,

$$|\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

(*b*) Elegido un ϵ, se debe encontrar un δ tal que

siempre que $0 < |x - a| < \delta$ se verifique $|f(x)\cdot g(x) - AB| < \epsilon$

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien } |f(x)\cdot g(x) - AB| &= |\{f(x) - A\}\cdot\{g(x) - B\} + B\{f(x) - A\} + A\{g(x) - B\}| \\ &\leqslant |f(x) - A|\cdot|g(x) - B| + |B|\cdot|f(x) - A| + |A|\cdot|g(x) - B| \end{aligned}$$

Por tanto, de (iii), $|f(x)\cdot g(x) - AB| < \epsilon_1\epsilon_2 + |B|\,\epsilon_1 + |A|\,\epsilon_2$ siempre que $0 < |x - a| < \lambda$.

Tomando ϵ_1 y ϵ_2 de forma que $\epsilon_1\epsilon_2 < \frac{1}{3}\epsilon$, $\epsilon_1 < \dfrac{1}{3}\dfrac{\epsilon}{|B|}$ y $\epsilon_2 < \dfrac{1}{3}\dfrac{\epsilon}{|A|}$ se satisfagan simultáneamente y $\delta = \lambda$ se tiene,

$$|f(x)\cdot g(x) - AB| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

(*c*) Como $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$, como se ha visto en (*b*), hay que demostrar que $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}, B \neq 0$.

Elegido un ϵ, se debe encontrar un δ tal que

$$\text{siempre que } 0 < |x-a| < \delta \text{ se verifique } \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \epsilon.$$

$$\text{Ahora bien } \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-g(x)}{B\cdot g(x)}\right| = \frac{|g(x)-B|}{|B|\cdot|g(x)|} = \frac{|g(x)-B|}{|B|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}. \text{ De (ii),}$$

$$|g(x)-B| < \epsilon_2 \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta_2$$

Como la función objeto de estudio es $\frac{1}{g(x)}$ hay que asegurarse de que δ_2 es suficientemente pequeño para que en el intervalo $a-\delta_2 < x < a+\delta_2$ no exista una raíz de $g(x)=0$. Sea $\delta_3 \leq \delta_2$ un valor que satisfaga a esta condición, de forma que $|g(x)-B| < \epsilon_2$ y $|g(x)| > 0$ en $0 < |x-a| < \delta_3$. Ahora bien, si $|g(x)| > 0$ en este intervalo, se verificará $|g(x)| > b > 0$ y $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{b}$ en el mismo intervalo. Por tanto,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\epsilon_2}{|B|}\cdot\frac{1}{b} \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta_3$$

Tomando $\epsilon_2 < \epsilon b\,|B|$ y $\delta = \delta_3$, se verificará $\frac{\epsilon_2}{|B|\cdot b} < \epsilon$ y en consecuencia,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta$$

15. Demostrar que: (*a*) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3} = \infty$, (*b*) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1} = 1$, (*c*) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1} = \infty$.

(*a*) Elegido un M, para todos los valores de x del intervalo $0 < |x-2| < \delta$,

$$\left|\frac{1}{(x-2)^3}\right| > \frac{1}{\delta^3}. \quad \text{Por tanto } \left|\frac{1}{(x-2)^3}\right| > M \text{ cuando } \frac{1}{\delta^3} > M \text{ o bien } \delta < \frac{1}{\sqrt[3]{M}}.$$

(*b*) Elegido un ϵ, para todos los valores de x tales que $|x| > M$, $\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \frac{1}{|x+1|} \leq \frac{1}{|x|-1} < \frac{1}{M-1}$.

Por tanto $\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \epsilon$ cuando $\frac{1}{M-1} < \epsilon$ o $M > 1 + \frac{1}{\epsilon}$.

(*c*) Elegido un M suficientemente grande, para todos los valores de x tales que $|x| > P > 1$,

$$\left|\frac{x^2}{x-1}\right| \geq \frac{x^2}{|x|+1} > \frac{x^2}{2|x|} = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}P. \quad \text{Por tanto } \left|\frac{x^2}{x-1}\right| > M \text{ cuando } P > 2M.$$

Problemas propuestos

16. Estudiar el límite de $y = 2x + 1$ cuando x toma los valores de los términos de las sucesiones del Problema 1.

Sol. (*a*) $y\to 1$, (*b*) $y\to 1$, (*c*) $y\to 7$, (*d*) $y\to 7$, (*e*) $y\to 1$, (*f*) $y\to 3$

17. Calcular:

(*a*) $\lim_{x\to 2}(x^2-4x)$

(*b*) $\lim_{x\to -1}(x^3+2x^2-3x-4)$

(*c*) $\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$

(*d*) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

(*e*) $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^2-1}$

(*f*) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

(*g*) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

(*h*) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

(*i*) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

(*j*) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

(*k*) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(*l*) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

Sol. (*a*) -4; (*b*) 0; (*c*) $\frac{1}{2}$; (*d*) 0; (*e*) $\frac{1}{3}$; (*f*) -4; (*g*) $\frac{1}{2}$; (*h*) $\frac{1}{4}$; (*i*) 0; (*j*) ∞, no existe límite; (*k*) $3x^2$; (*l*) 2

18. Calcular:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{4x-5}$ (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+5}$ (e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x^2+5x+6}$ (g) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$ (d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x+6}{x+1}$ (f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

Sol. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $-2/3$; (c) 0; (d) ∞, no existe límite; (e) 0; (f) 1; (g) -1

19. Hallar $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para cada una de las funciones del Problema 24, Capítulo 1.

Sol. (a) $\dfrac{-1}{(a-2)^2}$, (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{a-4}}$, (c) $\dfrac{1}{(a+1)^2}$

20. Estudiar el $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$, siendo $a_0b_0 \neq 0$ y m, n dos números positivos enteros, cuando (a) $m > n$, (b) $m = n$, (c) $m < n$. *Sol.* (a) no existe límite; (b) a_0/b_0; (c) 0

21. Hallar el límite de $f(x) = |x|$ cuando $x \to 0$.
Ind. Estudiar $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. *Sol.* $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

22. Hallar el límite de $\begin{cases} f(x) = x, & x > 0 \\ f(x) = x+1, & x \leq 0 \end{cases}$ cuando $x \to 0$.
Sol. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

23. (a) Aplicando el Teorema IV y el método matemático de inducción completa, demostrar que

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n, \text{ siendo } n \text{ un número entero y positivo}$$

(b) Aplicando el Teorema III y el método de inducción completa, demostrar que

$$\lim_{x\to a} \{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\} = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x\to a} f_n(x)$$

24. Aplicando el Teorema II y los resultados del Problema 23, demostrar que

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a), \text{ siendo } P(x) \text{ un polinomio en } x.$$

25. Siendo $f(x) = 5x - 6$, encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x-4| < \delta$ se verifique $|f(x) - 14| < \epsilon$, cuando (a) $\epsilon = \frac{1}{2}$, (b) $\epsilon = 0{,}001$. *Sol.* (a) 1/10, (b) 0,0002

26. Aplicando la definición de límite, demostrar que:

(a) $\lim_{x\to 3} 5x = 15$, (b) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, (c) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x + 5) = 3$.

27. Aplicando la definición de límite, demostrar que:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$, (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} = \infty$, (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$, (d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$.

Sol. (a) $\delta < 1/M$, (b) $\delta < \dfrac{1}{M+1}$, (c) $M > 1 + \dfrac{1}{\epsilon}$, (d) $P > 2M$

28. Demostrar que si $f(x)$ está definido para todos los valores de x próximos a $x = a$ y tiene límite cuando $x \to a$, este límite es único.

Ind.: Suponer que $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} f(x) = B$, siendo $B \neq A$. Elegir $\epsilon_1, \epsilon_2 < \frac{1}{2}|A-B|$ y determinar δ_1 y δ_2 para los dos límites. Tomando δ más pequeño que δ_1 y δ_2, se obtendrá $|A-B| = |\{A-f(x)\} + \{f(x)-B\}| < |A-B|$, lo cual es una contradicción.

29. Siendo $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ tales que (i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todos los valores de x próximos a $x = a$, y (ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$, demostrar que $\lim_{x\to a} g(x) = A$.

Ind.: Elegido un $\epsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, existirá un $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x-a| < \delta$, se verifique $|f(x) - A| < \epsilon$ y $|h(x) - A| < \epsilon$, o bien, $A - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \epsilon$.

30. Demostrar que si $f(x) \leq M$ para todos los valores de x, y $\lim_{x\to a} f(x) = A$, se verifica $A \leq M$.

Ind.: Supongamos $A > M$. Eligiendo $\epsilon = \frac{1}{2}(A - M)$, se llega a una contradicción.

Capítulo 3

Continuidad

UNA FUNCION $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$ si (i) está definida $f(x_0)$, (ii) existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, (iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Por ejemplo, $f(x) = x^2 + 1$ es continua en el punto $x = 2$ ya que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5 = f(2)$. La condición (i) expresa que una función puede ser continua únicamente en puntos de su dominio de definición. Así, pues, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ no es continua en $x = 3$ puesto que $f(3)$ es imaginario y la función no está definida en este punto.

Se dice que una función es continua en un intervalo (abierto o cerrado), cuando es continua en todos sus puntos. Se dice que una función es continua, cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición. Así, pues, $f(x) = x^2 + 1$ y todos los polinomios en x son funciones continuas; otros ejemplos son e^x, sen x, cos x.

Si el dominio de definición de una función es un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, la condición (ii) no se cumple en los extremos a y b. En estos casos se dice que la función es continua, cuando lo es en el intervalo abierto $a < x < b$ y además, $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, es una función continua (ver Ejemplo 1, Capítulo 2). Las funciones que se manejan normalmente en el cálculo elemental son continuas en sus dominios de definición excepto en algún punto aislado.

UNA FUNCION $f(x)$ se dice que es discontinua en el punto $x = x_0$ cuando no se cumple una o varias de las condiciones dichas de continuidad. A continuación, se presentan algunos ejemplos de discontinuidad:

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ es discontinua en el punto $x = 2$ porque

(i) $f(2)$ no está definido (se hace nulo el denominador)

(ii) no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ (es infinito).

La citada función es continua en todos los puntos salvo en el $x = 2$, en el que presenta una *discontinuidad infinita*. Ver Figura 3-1.

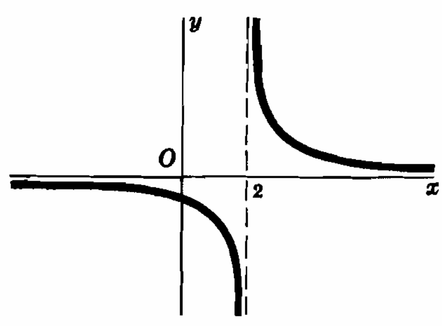


Fig. 3-1

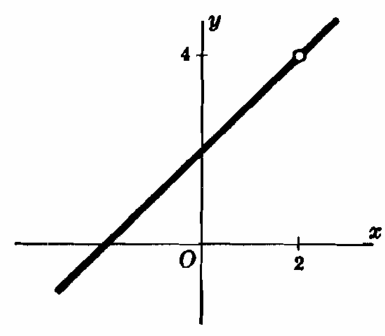


Fig. 3-2

(*b*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ es discontinua en el punto $x = 2$ porque

(i) $f(2)$ no está definido (se anulan el numerador y el denominador)

(ii) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.

En este caso, la discontinuidad recibe el nombre de *evitable* ya que asignando a la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ el valor $f(2) = 4$ para $x = 2$, ya es continua. (Obsérvese que la discontinuidad que se presenta en (a) no se puede evitar puesto que allí no existe el límite.) Las curvas representativas de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y de $g(x) = x + 2$ son idénticas excepto en el punto $x = 2$, en el que la primera presenta un «hueco». Evitar la discontinuidad consiste simplemente en llenar de forma adecuada dicho «hueco».

(c) . $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$, $x \neq 3$; $f(3) = 9$ es discontinua en el punto $x = 3$ porque

$$\text{(i)}\ f(3) = 9, \quad \text{(ii)}\ \lim_{x \to 3} f(x) = 27, \quad \text{(iii)}\ \lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$$

La discontinuidad se puede evitar asignando a la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ el valor $f(3) = 27$ para $x \neq 3$.

(d) La función del Problema 9, Capítulo 1, está definida para todo $x > 0$, pero presenta discontinuidades en los puntos $x = 1, 2, 3, \ldots$ (ver Problema 12, Capítulo 2) ya que $\lim\limits_{x \to s^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to s^+} f(x)$ (siendo s un número cualquiera entero y positivo).

La diferencia entre los valores de estos dos límites recibe el nombre de *salto de discontinuidad.*

(Ver Problemas 1-2.)

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS. Los teoremas sobre la continuidad de funciones se deducen rápidamente de los teoremas sobre límites del Capítulo 2. En particular, si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas para $x = a$, también lo son $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ y $f(x)/g(x)$ siempre que, en esta última, $g(a) \neq 0$. Es decir, mientras todos los polinomios de x son funciones continuas para todos los valores de la variable, las funciones racionales son continuas para todos los valores de x excepto en aquellos que anulan al denominador.

En álgebra se aplican algunas de las propiedades de las funciones continuas, como por ejemplo:

(a) En la curva representativa de una función polinómica $y = f(x)$, dos puntos cualesquiera de ella $[a, f(a)]$ y b, $[f(b)]$ están unidos por un arco continuo.

(b) Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, la curva de la función $y = f(x)$ corta al eje x por lo menos una vez, y la ecuación $f(x) = 0$ tiene, por lo menos, una raíz entre $x = a$ y $x = b$.

La propiedad de las funciones continuas que aplicamos aquí es:

I. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, y si $f(a) \neq f(b)$, todo valor, c, comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ lo toma la función al menos para un valor de x del intervalo, como por ejemplo x_0, de forma que $f(x_0) = c$.

Las Figuras 3-3a y 3-3b ilustran las dos aplicaciones de esta propiedad, mientras que las 3-4a y 3-4b nos muestran cómo es esencial la continuidad en el intervalo.

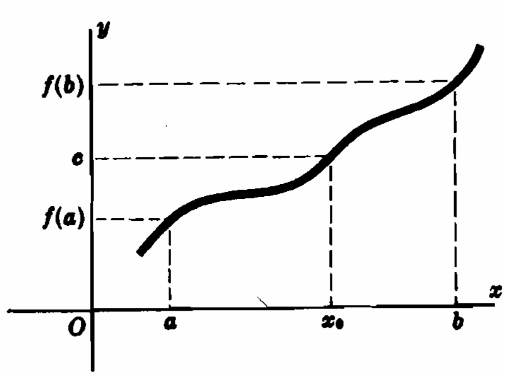
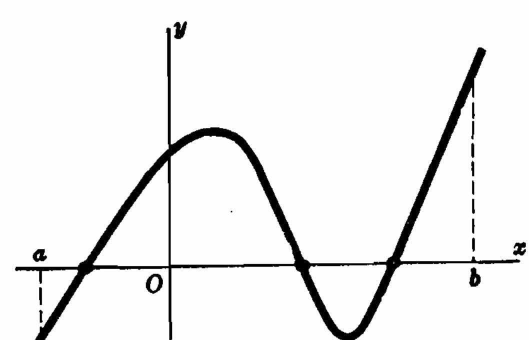


Fig. 3-3a



$f(x) = 0$ tiene tres raíces entre $x = a$ y $x = b$.

Fig. 3-3b

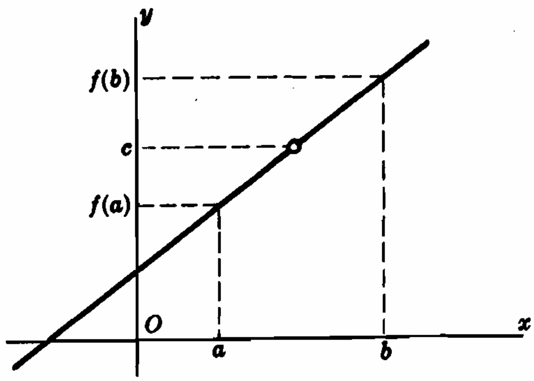
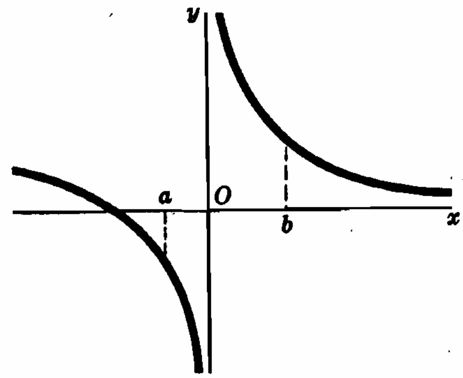


Fig. 3-4a



$f(x) = 0$ no tiene raíces entre $x = a$ y $x = b$.

Fig. 3-4b

Otras propiedades de las funciones continuas son:

II. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, $f(x)$ toma un valor mínimo m y otro máximo M para dos puntos del intervalo.

Aun cuando la demostración de la Propiedad II se sale de los márgenes de este libro, sin embargo, se utilizará con plena libertad en capítulos posteriores. En las figuras siguientes se explica esta propiedad de un modo intuitivo. En la Fig. 3-5*a* la función es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$; la función toma el menor valor m y el mayor M en los puntos $x = c$ y $x = d$ respectivamente, que pertenecen al intervalo. En la Fig. 3-5*b* la función es continua en $a \leq x \leq b$; la función toma el menor valor en el extremo $x = a$ mientras que el mayor lo alcanza en el punto $x = c$ de dicho intervalo. En la Fig. 3-5*c* se representa una discontinuidad en el punto $x = c$, siendo $a < c < b$; el menor valor de la función corresponde a $x = a$ pero, en este caso, no existe valor máximo.

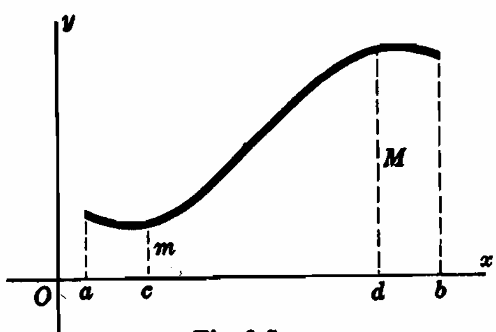


Fig. 3-5a

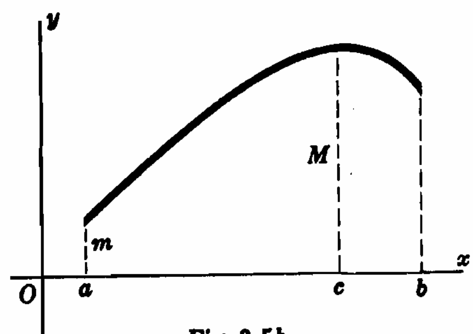


Fig. 3-5b

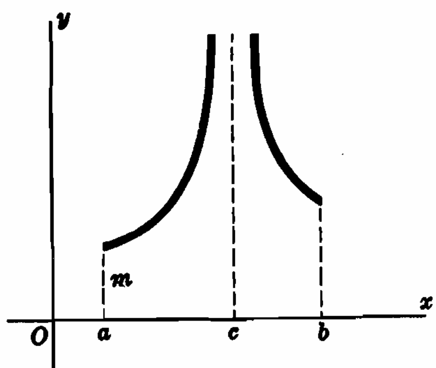


Fig. 3-5c

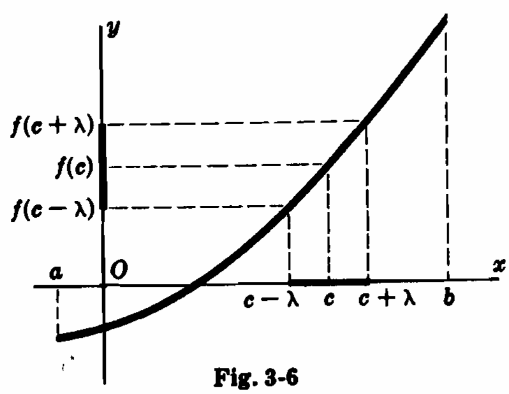


Fig. 3-6

III. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y c un número cualquiera comprendido entre a y b, si $f(c) > 0$ existe un número $\lambda > 0$ tal que, para $c - \lambda < x < c + \lambda$, se verifica $f(x) > 0$.

Esta propiedad, cuya demostración puede verse en el Problema 4, está representada en la Figura 3-6.

Problemas resueltos

1. Del Problema 9, Capítulo 2, se deduce:

(*a*) $f(x) = 2/x$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$.

(*b*) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = -3$ y $x = 2$.

(*c*) $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 3$.

2. Del Problema 5, Capítulo 2, se deduce:

(*a*) $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$.

Presenta también una discontinuidad en $x = -3$.

(*b*) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

Tiene también una discontinuidad evitable en $x = -2$.

(*c*) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 1$.

3. Demostrar que la existencia de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ implica que $f(x)$ sea continua en $x = a$.

De la existencia del límite se deduce, $f(a+h)-f(a) \to 0$. Por tanto, $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ y $f(x)$ es continua en el punto $x = a$.

4. Demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y c es un número cualquiera comprendido entre a y b, y si $f(c) > 0$, existe un número $\lambda > 0$ tal que, para $c-\lambda < x < c+\lambda$, se verifica $f(x) > 0$.

Como $f(x)$ es continua en el punto $x = c$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ y dado un $\epsilon > 0$, existirá un $\delta > 0$ tal que

(i) siempre que $0 < |x-c| < \delta$ se verifica $|f(x)-f(c)| < \epsilon$.

Ahora bien, $f(x) > 0$ en todos los puntos del intervalo $c-\delta < x < c+\delta$ con lo cual, $f(x) \geq f(c)$. Para los demás puntos de dicho intervalo se verifica $f(x) < f(c)$, de forma que $|f(x)-f(c)| = f(c)-f(x) < \epsilon$ y $f(x) > f(c)-\epsilon$. Por consiguiente, en estos puntos, $f(x) > 0$ a menos que $\epsilon \geq f(c)$. Así pues, para determinar un intervalo que satisfaga las condiciones del teorema, se elige $\epsilon < f(c)$, con lo cual δ verificará (i) y se toma $\lambda < \delta$. Ver Problema 10 para la expresión del teorema correspondiente.

Problemas propuestos

5. Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones del Problema 17 (*a*)-(*h*) del Capítulo 2.

Sol. (*a*), (*b*), (*d*) ninguno; (*c*) $x = -1$; (*e*) $x = \pm 1$; (*f*) $x = 2, 3$; (*g*) $x = -1, -3$; (*h*) $x = \pm 2$

6. Demostrar que $f(x) = |x|$ es continua.

7. Demostrar que $f(x) = \dfrac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$ presenta un salto de discontinuidad en $x = 0$.

8. Demostrar que para $x = 0$ (*a*) $f(x) = \dfrac{1}{3^{1/x}+1}$ tiene un salto de discontinuidad y (*b*) $f(x) = \dfrac{x}{3^{1/x}+1}$ tiene una discontinuidad evitable.

9. En la Fig. 3-4 *a* se representa la función $f(x) = \dfrac{x^2-4x-21}{x-7}$; demostrar que si $a = 3$ y $b = 11$, es $c = 10$.

10. Demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y c es un número cualquiera comprendido entre a y b, si $f(c) < 0$ existe un número $\lambda > 0$ tal que, para $c-\lambda < x < c+\lambda$, se verifica $f(x) < 0$.

Capítulo 4

Derivada

INCREMENTOS. El incremento Δx de una variable x es el aumento o disminución que experimenta, desde un valor $x = x_0$ a otro $x = x_1$ de su campo de variación. Así, pues, $\Delta x = x_1 - x_0$, o bien $x_1 = x_0 + \Delta x$.

Si se da un incremento Δx a la variable x, (es decir si x pasa de $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$), la función $y = f(x)$ se verá incrementada en $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ a partir del valor $y = f(x_0)$. El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{incremento de } y}{\text{incremento de } x}$$

recibe el nombre de cociente medio de incrementos de la función en el intervalo comprendido entre $x = x_0$ hasta $x = x_0 + \Delta x$.

Ejemplo 1:

Cuando x aumenta en $\Delta x = 0{,}5$ a partir de $x_0 = 1$, la función $y = f(x) = x^2 + 2x$ se incrementa en $\Delta y = f(1 + 0{,}5) - f(1) = 5{,}25 - 3 = 2{,}25$. Por tanto, el cociente de incremento de y, en el intervalo entre $x = 1$ y $x = 1{,}5$, es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2{,}25}{0{,}5} = 4{,}5$.

(Ver Problemas 1-2.)

DERIVADA de una función $y = f(x)$ con respecto a x en un punto $x = x_0$ se define por el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

siempre que exista. Este límite se denomina también cociente instantáneo de incrementos (o simplemente cociente de incrementos) de y con respecto de x en el punto $x = x_0$.

Ejemplo 2:

Hallar la derivada de $y = f(x) = x^2 + 3x$ con respecto a x en un punto $x = x_0$. Como aplicación, calcular la derivada en los puntos: (*a*) $x_0 = 2$ y (*b*) $x_0 = -4$.

$$\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0) = x_0^2 + 3x_0 \\
y_0 + \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) \\
&= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x \\
\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 + 3 + \Delta x
\end{aligned}$$

La derivada en el punto $x = x_0$ es

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + 3 + \Delta x) = 2x_0 + 3$$

(*a*) Para $x_0 = 2$, el valor de la derivada es $2 \cdot 2 + 3 = 7$.
(*b*) Para $x_0 = -4$, el valor de la derivada es $2(-4) + 3 = -5$.

EN EL CALCULO DE DERIVADAS se suele prescindir del subíndice 0 con lo que la derivada de $y = f(x)$ *con respecto a x* se escribe en la forma

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Véase la nota del Problema 5(*c*), Capítulo 2.

La derivada de $y = f(x)$ con respecto a x se puede representar por uno cualquiera de los símbolos

$$\frac{d}{dx}y,\ \frac{dy}{dx},\ D_x y,\ y',\ f'(x),\ \text{o}\ \frac{d}{dx}f(x)$$

(Ver Problemas 3-8.)

Problemas resueltos

1. Dada $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$, hallar Δy e $\Delta y/\Delta x$ cuando x varía

(*a*) de $x_0 = 1$ a $x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}2$ y (*b*) de $x_0 = 1$ a $x_1 = 0{,}8$.

(*a*) $\Delta x = x_1 - x_0 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1{,}2) - f(1) = -0{,}56 - (-2) = 1{,}44$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1{,}44}{0{,}2} = 7{,}2$

(*b*) $\Delta x = 0{,}8 - 1 = -0{,}2$

$\Delta y = f(0{,}8) - f(1) = -3{,}36 - (-2) = -1{,}36$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1{,}36}{-0{,}2} = 6{,}8$

Geométricamente, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ en (*a*) es la pendiente de la recta que une los puntos $(1, -2)$ y $(1{,}2, -0{,}56)$ de la parábola $y = x^2 + 5x - 8$, y en (*b*) es la pendiente de la recta que une los puntos $(0{,}8, -3{,}36)$ y $(1, -2)$ de la misma parábola.

2. La ecuación $s = 5t^2$ representa el espacio, s(m), recorrido por un cuerpo que cae libremente a partir del reposo. Calcular $\Delta s/\Delta t$ cuando t varía de t_0 a $t_0 + \Delta t$: Como aplicación, calcular $\Delta s/\Delta t$ cuando t varía: (*a*) de 3 a 3,5, (*b*) de 3 a 3,2 y (*c*) de 3 a 3,1.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5(t_0 + \Delta t)^2 - 5t_0^2}{\Delta t} = \frac{10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t_0 + 5\Delta t$$

(*a*) Aquí $t_0 = 3$, $\Delta t = 0{,}5$, y $\Delta s/\Delta t = 10(3) + 5(0{,}5) = 32{,}5$ m/s.

(*b*) Aquí $t_0 = 3$, $\Delta t = 0{,}2$, y $\Delta s/\Delta t = 10(3) + 5(0{,}2) = 31$ m/s.

(*c*) Aquí $t_0 = 3$, $\Delta t = 0{,}1$, y $\Delta s/\Delta t = 30{,}5$ m/s.

Como Δs es el desplazamiento del cuerpo desde el instante $t = t_0$ hasta $t = t_0 + \Delta t$,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \text{velocidad media del cuerpo en el intervalo de tiempo dado}$$

3. Hallar dy/dx, siendo $y = x^3 - x^2 - 4$. Hallar también dy/dx en el punto: (*a*) $x = 4$, (*b*) $x = 0$, (*c*) $x = -1$.

$$(1)\quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 - 4$$
$$= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2 - 4$$

$$(2)\quad \Delta y = (3x^2 - 2x)\cdot\Delta x + (3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$(3)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 2x + (3x - 1)\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$(4)\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\{3x^2 - 2x + (3x - 1)\cdot\Delta x + (\Delta x)^2\} = 3x^2 - 2x$$

(*a*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=4} = 3(4)^2 - 2(4) = 40$, (*b*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3(0)^2 - 2(0) = 0$, (*c*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5$

4. Hallar la derivada de $y = x^2 + 3x + 5$.

$$(1)\quad y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 5 = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 5$$

$$(2)\quad \Delta y = (2x + 3)\Delta x + \Delta x^2$$

$$(3)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x + 3)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x$$

$$(4)\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x + 3 + \Delta x) = 2x + 3$$

5. Hallar la derivada de $y = \dfrac{1}{x - 2}$ en los puntos $x = 1$ y $x = 3$. Demostrar que la función no es derivable en el punto $x = 2$, en el que presenta una discontinuidad.

$$(1)\quad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2}$$

$$(2)\quad \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} - \frac{1}{x - 2} = \frac{(x - 2) - (x + \Delta x - 2)}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-\Delta x}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)}$$

$$(3)\quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)}$$

$$(4)\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-1}{(x - 2)^2}$$

Para $x = 1$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1 - 2)^2} = -1$, y para $x = 3$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(3 - 2)^2} = -1$.

Para $x = 2$, $\dfrac{dy}{dx}$ no existe porque el denominador es cero.

6. Hallar la derivada de $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x + 4}$ y demostrar que la función no es derivable en el punto $x = -\frac{4}{3}$, en el que presenta una discontinuidad.

$$(1)\quad f(x + \Delta x) = \frac{2(x + \Delta x) - 3}{3(x + \Delta x) + 4}$$

$$(2)\quad f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{2x + 2\Delta x - 3}{3x + 3\Delta x + 4} - \frac{2x - 3}{3x + 4}$$

$$= \frac{(3x + 4)[(2x - 3) + 2\Delta x] - (2x - 3)[(3x + 4) + 3\Delta x]}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$$

$$= \frac{(6x + 8 - 6x + 9)\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)} = \frac{17\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$$

(3) $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)}$$

(4) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} = \frac{17}{(3x+4)^2}$$

Para $x = -4/3$, la función no es derivable porque se anula el denominador. En general, ***una función no es derivable en los puntos en que presenta una discontinuidad.***

7. Hallar la derivada de $y = \sqrt{2x+1}$.

(1) $$y + \Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2}$$

(2) $$\Delta y = (2x+2\Delta x+1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}$$

$$= [(2x+2\Delta x+1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}]\,\frac{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

$$= \frac{(2x+2\Delta x+1) - (2x+1)}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} = \frac{2\Delta x}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} = \frac{1}{(2x+1)^{1/2}}$$

En la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $\lim\limits_{x\to -1/2^+} f(x) = 0 = f(-\frac{1}{2})$ mientras que no existe $\lim\limits_{x\to -1/2^-} f(x)$; la función es *continua a la derecha* de $x = -\frac{1}{2}$. En el punto $x = -\frac{1}{2}$ la derivada es infinita.

8. Calcular la derivada de $f(x) = x^{1/3}$ y, como aplicación, estudiar $f'(0)$.

(1) $$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{1/3}$$

(2) $$f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}$$

$$= \frac{[(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}]}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$= \frac{x+\Delta x - x}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

(3) $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

(4) $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

La función no es derivable en el punto $x = 0$ porque el denominador es cero. Obsérvese que la función es continua en el punto $x = 0$. Teniendo esto en cuenta así como la nota final del Problema 7 se puede afirmar que: *Si una función es derivable en el punto $x = a$, es continua en dicho punto aunque el recíproco no es cierto.*

9. Interpretación geométrica de dy/dx.

La Fig. 4-1 muestra que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente de la secante que une un punto fijo $P(x, y)$ cualquiera de la curva con otro $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Cuando $\Delta x \to 0$, P permanece fijo y Q se mueve sobre la curva acercándose a P; la recta PQ va girando alrededor de P hasta que llega a su posición límite que es la tangente PT a la curva en el punto P. Así pues, dy/dx es la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P.

Por ejemplo, en el Problema 3, la pendiente de la cúbica $y = x^3 - x^2 - 4$ en el punto $x = 4$ es $m = 40$, en $x = 0$ es $m = 0$ y en $x = -1$ es $m = 5$.

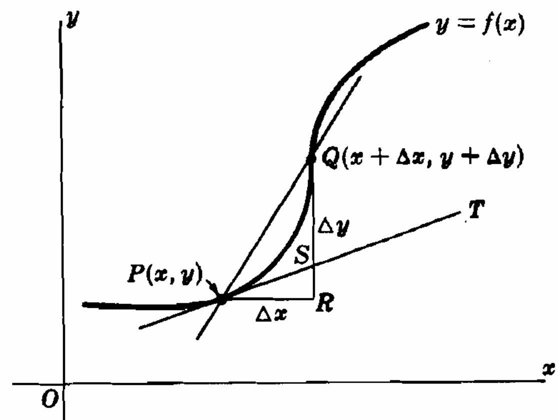


Fig. 4-1

10. Hallar ds/dt en la función del Problema 2. Interpretar el resultado.

En este caso $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 10t_0 + 5\Delta t$ y $\dfrac{ds}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (10t_0 + 5\Delta t) = 10t_0$.

Cuando $\Delta t \to 0$, $\Delta s/\Delta t$ representa la velocidad media del cuerpo en intervalos de tiempo Δt cada vez más pequeños. El valor de ds/dt es la velocidad instantánea v en el instante $t = t_0$. Por ejemplo, para $x = 3$, $v = 10(3) = 30$ m/s.

11. Calcular $f'(x)$ en la función $f(x) = |x|$.

La función es continua para todos los valores de x. Para $x < 0, f(x) = -x$ y $f'(x) = -1$; para $x > 0, f(x) = x$ y $f'(x) = 1$.

Para $x = 0, f(x) = 0$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Cuando $\Delta x \to 0^-$, $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} \to -1$ mientras que si $\Delta x \to 0^+$, $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} \to 1$.

Por consiguiente, la función no es derivable en el punto $x = 0$.

12. Calcular $\epsilon = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \dfrac{dy}{dx}$ para la función de los Problemas (*a*) 3 y (*b*) 5. Demostrar que $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

(*a*) $\epsilon = \{3x^2 - 2x + (3x - 1)\Delta x + (\Delta x)^2\} - \{3x^2 - 2x\} = (3x - 1 + \Delta x)\Delta x$.

(*b*) $$\epsilon = \frac{-1}{(x-2)(x + \Delta x - 2)} - \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2) + (x + \Delta x - 2)}{(x-2)^2(x + \Delta x - 2)} = \frac{1}{(x-2)^2(x + \Delta x - 2)}\Delta x$$

13. Interpretar geométricamente la expresión $\Delta y = \dfrac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x$ del Problema 12.

En la figura del Problema 9, $\Delta y = RQ$ y $\dfrac{dy}{dx} \cdot \Delta x = PR \cdot \operatorname{tag} \angle\, TPR = RS$; por tanto, $\epsilon \cdot \Delta x = SQ$. Cuando x se incrementa en Δx desde $P(x,y)$, Δy es el incremento correspondiente de y *contado hasta la curva* mientras que $\dfrac{dy}{dx}\Delta x$ es el incremento correspondiente de y *contado hasta la tangente PT.* Como la diferencia entre ambos incrementos $\epsilon \cdot \Delta x = (\ldots)(\Delta x)^2 \to 0$ más rápidamente que Δx, en el Capítulo 23 se empleará la expresión $\dfrac{dy}{dx} \cdot \Delta x$ como una aproximación de Δy cuando $|\Delta x|$ sea pequeño.

Problemas propuestos

14. Calcular Δy e $\Delta y/\Delta x$, en los casos siguientes:

(*a*) $y = 2x - 3$ y x pasa de 3,3 a 3,5.
(*b*) $y = x^2 + 4x$ y x pasa de 0,7 a 0,85.
(*c*) $y = 2/x$ y x pasa de 0,75 a 0,5.

Sol. (*a*) 0,4; 2, (*b*) 0,8325; 5,55, (*c*) 4/3; —16/3

15. Dada la función $y = x^2 - 3x + 5$, calcular Δy en el punto $x = 5$ para $\Delta x = -0{,}01$. Hallar el valor de y para $x = 4{,}99$.

Sol. $\Delta y = -0{,}0699$; $y = 14{,}9301$

16. Calcular la velocidad media de los siguientes movimientos:

(*a*) $s = (3t^2 + 5)$ m y t pasa de 2 a 3 seg.
(*b*) $s = (2t^2 + 5t - 3)$ m y t pasa de 2 a 5 seg.

Sol. (*a*) 15 m/seg, (*b*) 19 m/seg.

17. Calcular el aumento de volumen de un balón esférico cuando su radio se incrementa desde r hasta $r + \Delta r$ cm, (*b*) desde 2 hasta 3 cm.

Sol. (*a*) $\frac{4\pi}{3}(3r^2 + 3r \cdot \Delta r + \Delta r^2) \cdot \Delta r$ cm³., (*b*) $^{76}/_{3}\pi$ cm³.

18. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

(*a*) $y = 4x - 3$
(*b*) $y = 4 - 3x$
(*c*) $y = x^2 + 2x - 3$
(*d*) $y = 1/x^2$
(*e*) $y = (2x - 1)/(2x + 1)$
(*f*) $y = (1 + 2x)/(1 - 2x)$
(*g*) $y = \sqrt{x}$
(*h*) $y = 1/\sqrt{x}$
(*i*) $y = \sqrt{1 + 2x}$
(*j*) $y = 1/\sqrt{2 + x}$

Sol. (*a*) 4
(*b*) -3
(*c*) $2(x + 1)$
(*d*) $-2/x^3$
(*e*) $\dfrac{1}{(2x + 1)^2}$
(*f*) $\dfrac{4}{(1 - 2x)^2}$
(*g*) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
(*h*) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$
(*i*) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$
(*j*) $-\dfrac{1}{2(2 + x)^{3/2}}$

19. Hallar la pendiente de las siguientes curvas en el punto $x = 1$:

(*a*) $y = 8 - 5x^2$, (*b*) $y = \dfrac{4}{x + 1}$, (*c*) $y = \dfrac{2}{x + 3}$.

Sol. (*a*) —10, (*b*) —1, (*c*) —1/8.

20. Calcular las coordenadas del vértice de la parábola $y = x^2 - 4x + 1$ teniendo en cuenta que la pendiente de la tangente en dicho punto es igual a cero. *Sol.* $V(2, -3)$.

21. Calcular la pendiente de las tangentes a la parábola $y = -x^2 + 5x - 6$ en los puntos de intersección con el eje x.

Sol. Para $x = 2$, $m = 1$; para $x = 3$, $m = -1$.

22. Calcular la velocidad de los siguientes movimientos en el instante $t = 2$; s viene expresado en metros y t en segundos:

(*a*) $s = t^2 + 3t$, (*b*) $s = t^3 - 3t^2$, (*c*) $s = \sqrt{t + 2}$.

Sol. (*a*) 7 m/s, (*b*) 0 m/s, (*c*) $\frac{1}{4}$ m/s

23. Demostrar que la variación instantánea del volumen de un cubo con respecto a su arista x(cm) es de 12 cm³/cm cuando $x = 2$ cm.

Capítulo 5

Derivación de funciones algebraicas

UNA FUNCION que tiene derivada en un punto $x = x_0$ se dice que es *derivable* en él. Una función es derivable en un intervalo cuando lo es en todos los puntos del mismo.

Las funciones que aparecen en el cálculo elemental son, en general, derivables en sus intervalos de definición, pudiendo no serlo en algún punto aislado.

FORMULAS DE DERIVACION. En las fórmulas siguientes u, v y w son funciones derivables de x.

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$, siendo c una constante
2. $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\dfrac{d}{dx}(u + v + \cdots) = \dfrac{d}{dx}(u) + \dfrac{d}{dx}(v) + \cdots$
4. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{d}{dx}(u)$
5. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{d}{dx}(v) + v\dfrac{d}{dx}(u)$
6. $\dfrac{d}{dx}(uvw) = uv\dfrac{d}{dx}(w) + uw\dfrac{d}{dx}(v) + vw\dfrac{d}{dx}(u)$
7. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{d}{dx}(u),\quad c \neq 0$
8. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{u}\right) = c\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{c}{u^2}\cdot\dfrac{d}{dx}(u),\quad u \neq 0$
9. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{d}{dx}(u) - u\dfrac{d}{dx}(v)}{v^2},\quad v \neq 0$
10. $\dfrac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$
11. $\dfrac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\dfrac{d}{dx}(u)$

(Ver Problemas 1-13.)

FUNCION INVERSA. Sea la función $y = f(x)$ derivable en el intervalo $a \leq x \leq b$ y supongamos que dy/dx no cambia de signo en dicho intervalo. Las funciones representadas en las Figs. 5-1*a* y 5-1*b* toman una sola vez cada uno de los valores comprendidos entre $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Por tanto, a cada valor de y perteneciente a dicho intervalo le corresponde un único valor de x, con lo cual x es también función de y, es decir $x = g(y)$. Las funciones $y = f(x)$ y $x = g(y)$ reciben el nombre de *funciones inversas*.

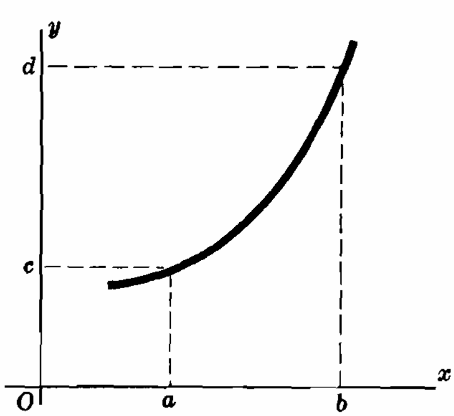


Fig. 5-1a

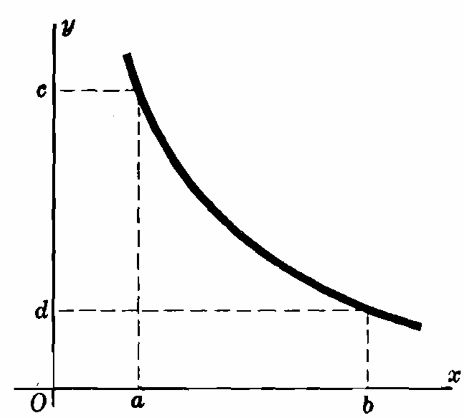


Fig. 5-1b

Ejemplo 1:

(*a*) $y = f(x) = 3x + 2$ y $x = g(y) = \frac{1}{3}(y - 2)$ son funciones inversas.

(*b*) Cuando $x \leq 2$ e $y \geq -1$, $y = x^2 - 4x + 3$ y $x = 2 - \sqrt{y+1}$ son funciones inversas. Cuando $x \geq 2$ e $y \geq -1$, $y = x^2 - 4x + 3$ y $x = 2 + \sqrt{y+1}$ son funciones inversas.

Para calcular dy/dx en la función $x = g(y)$:

(*a*) Despejar y si es posible y derivar con respecto a x

(*b*) Derivar $x = g(y)$ con respecto a y y aplicar

$$12. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

Ejemplo 2:

Calcular dy/dx en la función $x = \sqrt{y} + 5$.

Aplicando (*a*): $y = (x-5)^2$ y $dy/dx = 2(x-5)$.

Aplicando (*b*): $\dfrac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$; por tanto, $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} = 2(x-5)$.

(Ver Problemas 14-15.)

DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ resulta que $y = f\{g(x)\}$ es una función de x. En el caso en que y sea una función derivable de u y u lo sea respecto de x, la función $y = f\{g(x)\}$ también será derivable con respecto a x. La derivada dy/dx se puede obtener por uno de los procedimientos siguientes:

(*a*) Despejar y en función de x y derivar

Ejemplo 3:

Si $y = u^2 + 3$ y $u = 2x + 1$, tendremos $y = (2x+1)^2 + 3$ y $dy/dx = 8x + 4$.

(*b*) Derivar cada una de las funciones con respecto a la variable independiente y aplicar la fórmula

$$13. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 4:

Si $y = u^2 + 3$ y $u = 2x + 1$, tendremos $\dfrac{dy}{du} = 2u$, $\dfrac{du}{dx} = 2$ y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 4u = 8x + 4$.

(Ver Problemas 16-20.)

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. La derivada de una función de x, $y = f(x)$, recibe el nombre de *primera derivada* de la función. Si la primera derivada es a su vez una función derivable, su derivada se denomina *derivada segunda* de la función original y se representa por uno cualquiera de los símbolos $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, y'' o $f''(x)$. La derivada de esta segunda derivada, si existe es la *derivada tercera* de la función y se representa por $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, y''' o $f'''(x)$.

Nota. La derivada de un orden determinado en un punto solo puede existir cuando todas las funciones derivadas de orden inferior son derivables en dicho punto.

(Ver Problemas 21-23.)

Problemas resueltos

1. Demostrar: (*a*) $\frac{d}{dx}(c) = 0$, siendo c una constante; (*b*) $\frac{d}{dx}(x) = 1$; (*c*) $\frac{d}{dx}(cx) = c$, siendo c una constante;

(*d*) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, siendo n un número positivo entero.

Como $\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,

(*a*) $\frac{d}{dx}(c) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$

(*b*) $\frac{d}{dx}(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1$

(*c*) $\frac{d}{dx}(cx) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c(x+\Delta x)-cx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} c = c$

(*d*) $$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left\{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right\} - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right\} = nx^{n-1}$$

2. Sean u y v funciones derivables de x. Demostrar: (*a*) $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$

(*b*) $\frac{d}{dx}(u\cdot v) = u\cdot\frac{d}{dx}(v) + v\cdot\frac{d}{dx}(u)$ (*c*) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\frac{d}{dx}(u) - u\cdot\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$, $v \neq 0$

(*a*) Sea $f(x) = u + v = u(x) + v(x)$; tendremos:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x\to 0$, $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$.

(*b*) Sea $f(x) = u\cdot v = u(x)\cdot v(x)$; tendremos:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - v(x)\cdot u(x+\Delta x)] + [v(x)\cdot u(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x}$$

$$= u(x+\Delta x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

y $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u\cdot v) = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u).$$

(*c*) Sea $f(x) = \frac{u}{v} = \frac{u(x)}{v(x)}$; tendremos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x\{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\}}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)] - [u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x\{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\}}$$

$$= \frac{v(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}$$

y $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x) - u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{\{v(x)\}^2} = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

Derivar las siguientes funciones.

3. $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2(1) - 3(2x) - 5(3x^2) - 8(4x^3) + 9(5x^4) = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$$

4. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4}) = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

5. $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) - 2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} - 3x^{1/2}$$

6. $y = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{6}{x^{1/3}} - \dfrac{2}{x^{3/2}} - \dfrac{4}{x^{3/4}} = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right) - 4\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right)$$

$$= -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$$

7. $y = \sqrt[3]{3x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{5x}} = (3x^2)^{1/3} - (5x)^{-1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2)^{-2/3}\cdot 6x - \left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2}\cdot 5 = \frac{2x}{(9x^4)^{1/3}} + \frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2x\sqrt{5x}}$$

8. $s = (t^2 - 3)^4$

$$\frac{ds}{dt} = 4(t^2 - 3)^3(2t) = 8t(t^2 - 3)^3$$

9. $z = \dfrac{3}{(a^2 - y^2)^2} = 3(a^2 - y^2)^{-2}$

$$\frac{dz}{dy} = 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3}\cdot\frac{d}{dy}(a^2 - y^2) = 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3}(-2y) = \frac{12y}{(a^2 - y^2)^3}$$

10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3} = (x^2 + 6x + 3)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 6x + 3) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}(2x + 6) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 3}}$$

11. $y = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$

$$y' = (x^2 + 4)^2\cdot\frac{d}{dx}(2x^3 - 1)^3 + (2x^3 - 1)^3\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 4)^2$$

$$= (x^2 + 4)^2\cdot 3(2x^3 - 1)^2\cdot\frac{d}{dx}(2x^3 - 1) + (2x^3 - 1)^3\cdot 2(x^2 + 4)\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 4)$$

$$= (x^2 + 4)^2\cdot 3(2x^3 - 1)^2\cdot 6x^2 + (2x^3 - 1)^3\cdot 2(x^2 + 4)\cdot 2x = 2x(x^2 + 4)(2x^3 - 1)^2(13x^3 + 36x - 2)$$

12. $y = \dfrac{3 - 2x}{3 + 2x}$

$$y' = \frac{(3 + 2x)\cdot\frac{d}{dx}(3 - 2x) - (3 - 2x)\cdot\frac{d}{dx}(3 + 2x)}{(3 + 2x)^2} = \frac{(3 + 2x)(-2) - (3 - 2x)(2)}{(3 + 2x)^2} = \frac{-12}{(3 + 2x)^2}$$

13. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{x^2}{(4-x^2)^{1/2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4-x^2)^{1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\cdot\frac{d}{dx}(4-x^2)^{1/2}}{4-x^2} = \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - x^2\cdot\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)}{4-x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-1/2}}{4-x^2}\cdot\frac{(4-x^2)^{1/2}}{(4-x^2)^{1/2}} = \frac{2x(4-x^2)+x^3}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{3/2}}$$

14. Hallar dy/dx, en la función $x = y\sqrt{1-y^2}$.

$$\frac{dx}{dy} = (1-y^2)^{1/2} + \tfrac{1}{2}y(1-y^2)^{-1/2}(-2y) = \frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}$$

15. Calcular la pendiente de la curva $x = y^2 - 4y$ en los puntos de intersección con el eje y.

Los puntos de corte son (0,0) y (0,4).

$\dfrac{dx}{dy} = 2y - 4$, y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy} = \dfrac{1}{2y-4}$. En (0,0) la pendiente es $-\frac{1}{4}$, y en (0,4) la pendiente es $\frac{1}{4}$.

FORMULA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION

16. Deducir la fórmula $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Sean Δu y Δy los incrementos experimentados por las funciones u y y cuando x aumenta o disminuye en Δx. Siempre que $\Delta u \neq 0$ podremos escribir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y siendo $\Delta u \neq 0$, cuando $\Delta x \to 0$ se verificará $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Se puede prescindir de la condición impuesta a Δu tomando $|\Delta x|$ suficientemente pequeño. Cuando esto no sea posible, la fórmula se puede deducir de la manera siguiente:

Sea $\Delta y = \dfrac{dy}{du}\cdot\Delta u + \epsilon\cdot\Delta u$ donde $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. (Ver Problema 13, Capítulo 4.) Por tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y, tomando límites cuando $\Delta x \to 0$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} + 0\,\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ como antes.

17. Hallar dy/dx, en las funciones $y = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ y $u = \sqrt[3]{x^2+2}$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{2/3}} = \frac{2x}{3u^2}$$

Por lo tanto
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{2x}{3u^2} = \frac{8x}{3u(u^2+1)^2}$$

18. Un punto se mueve sobre la curva $y = x^3 - 3x + 5$ de forma que $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$ siendo t el tiempo. Calcular la variación de y con respecto al tiempo en el instante $t = 4$.

Se trata de calcular el valor de dy/dt para $t = 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2-1), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{3(x^2-1)}{4\sqrt{t}}$$

Cuando $t = 4$ $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} + 3 = 4$, y $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3(16-1)}{4\cdot 2} = \dfrac{45}{8}$ unidades por unidad de tiempo.

19. Un punto se mueve en el plano según la ley $x = t^2 + 2t$, $y = 2t^3 - 6t$. Calcular dy/dx para $t = 0, 2, 5$.

De la primera ecuación se puede despejar t y sustituirlo en la segunda, resultando y en función de x.

$$\frac{dy}{dt} = 6t^2 - 6, \quad \frac{dx}{dt} = 2t + 2, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t+2}, \text{ y } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 6(t^2-1)\cdot\frac{1}{2(t+1)} = 3(t-1).$$

Los valores pedidos de dy/dx son -3 para $t = 0$, 3 para $t = 2$, y 12 para $t = 5$.

20. Si $y = x^2 - 4x$ y $x = \sqrt{2t^2 + 1}$, hallar dy/dt cuando $t = \sqrt{2}$.

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-2), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(2t^2+1)^{1/2}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{4t(x-2)}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

Cuando $t = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{5}$ y $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}(5 - 2\sqrt{5})$.

21. Demostrar que la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 2$ tiene derivadas de todos los órdenes para $x = a$

$$\begin{array}{llll} f'(x) = 3x^2 + 6x - 8 & \text{y} & f'(a) = 3a^2 + 6a - 8 \\ f''(x) = 6x + 6 & \text{y} & f''(a) = 6a + 6 \\ f'''(x) = 6 & \text{y} & f'''(a) = 6 \end{array}$$

Todas las derivadas de orden superior son idénticamente nulas

22. Hallar las sucesivas derivadas de $f(x) = x^{4/3}$ para $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} \text{ y } f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{4}{9x^{2/3}} \text{ y } f''(0) \text{ no existe.}$$

Por tanto, para $x = 0$ solamente existe la primera derivada.

23. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{1-x} = 2(1-x)^{-1}$, calcular $f^{(n)}(x)$.

Tendremos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(-1)(1-x)^{-2}(-1) = 2(1-x)^{-2} = 2\cdot 1\,!\,(1-x)^{-2} \\ f''(x) &= 2(1\,!)(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2\cdot 2\,!\,(1-x)^{-3} \\ f'''(x) &= 2(2\,!)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2\cdot 3\,!\,(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

con lo cual $f^{(n)}(x) = 2\cdot n\,!\,(1-x)^{-(n+1)}$.

Esto se puede demostrar por el método de inducción, suponiendo que $f^{(k)}(x) = 2\cdot k\,!\,(1-x)^{-(k+1)}$, se verifica

$$f^{(k+1)}(x) = -2\cdot k\,!\,(k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) = 2\cdot(k+1)\,!\,(1-x)^{-(k+2)}$$

Problemas propuestos

24. Deducir la fórmula 10 en el caso en que $m = -1/n$, siendo n un número positivo, aplicando la fórmula 9 para hallar $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$.

En el caso en que $m = p/q$, siendo p y q enteros, ver Problema 4, Capítulo 6.

Hallar la derivada de las funciones de los Problemas 25-43.

25. $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$ *Sol.* $dy/dx = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$

26. $y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^{3/2}}$

27. $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-2} + 4x^{-1/2}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^{3/2}}$

28. $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$ *Sol.* $y' = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$

29. $f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{t}}$ *Sol.* $f'(t) = -\dfrac{t^{1/2} + 2t^{2/3}}{t^2}$

30. $y = (1-5x)^6$ *Sol.* $y' = -30(1-5x)^5$

31. $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$ *Sol.* $f'(x) = 12(1-x^2)(3x - x^3 + 1)^3$

32. $y = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$ *Sol.* $y' = \dfrac{2-x}{y}$

33. $\theta = \dfrac{3r+2}{2r+3}$ *Sol.* $\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{5}{(2r+3)^2}$

34. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5$ *Sol.* $y' = \dfrac{5x^4}{(1+x)^6}$

35. $y = 2x^2\sqrt{2-x}$ *Sol.* $y' = \dfrac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$

36. $f(x) = x\sqrt{3-2x^2}$ *Sol.* $f'(x) = \dfrac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$

37. $y = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

38. $z = \dfrac{w}{\sqrt{1-4w^2}}$ *Sol.* $\dfrac{dz}{dw} = \dfrac{1}{(1-4w^2)^{3/2}}$

39. $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ *Sol.* $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$

40. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ *Sol.* $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

41. $y = (x^2+3)^4(2x^3-5)^3$ *Sol.* $y' = 2x(x^2+3)^3(2x^3-5)^2(17x^3+27x-20)$

42. $s = \dfrac{t^2+2}{3-t^2}$ *Sol.* $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{10t}{(3-t^2)^2}$

43. $y = \left(\dfrac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$ *Sol.* $y' = \dfrac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

44. Calcular dy/dx por dos métodos diferentes y comprobar que se llega al mismo resultado: (*a*) $x = (1+2y)^3$ (*b*) $x = 1/(2+y)$.

Calcular dy/dx en los Problemas 45-48.

45. $y = \dfrac{u-1}{u+1}$, $u = \sqrt{x}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}\,)^2}$

46. $y = u^3+4$, $u = x^2+2x$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2(x+2)^2(x+1)$

47. $y = \sqrt{1+u}$, $u = \sqrt{x}$ *Sol.* Ver Problema 39

48. $y = \sqrt{u}$, $u = v(3-2v)$, $v = x^2$ Ind: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$. (*Sol.* Ver Problema 36)

Calcular las derivadas indicadas en los Problemas 49-52.

49. $y = 3x^4-2x^2+x-5;\ y'''$ *Sol.* $y''' = 72x$

50. $y = 1/\sqrt{x};\ y^{(iv)}$ *Sol.* $y^{(iv)} = \dfrac{105}{16x^{9/2}}$

51. $f(x) = \sqrt{2-3x^2};\ f''(x)$ *Sol.* $f''(x) = \dfrac{-6}{(2-3x^2)^{3/2}}$

52. $y = x/\sqrt{x-1},\ y''$ *Sol.* $y'' = \dfrac{4-x}{4(x-1)^{5/2}}$

Calcular la derivada enésima en los Problemas 53-54.

53. $y = 1/x^2$ *Sol.* $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$

54. $f(x) = 1/(3x+2)$ *Sol.* $f^n(x) = (-1)^n\dfrac{3^n\cdot n!}{(3x+2)^{n+1}}$

55. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, demostrar:

(*a*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2y}{du^2}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2$ (*b*) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^3u}{dx^3} + 3\,\dfrac{d^2y}{du^2}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}\cdot\dfrac{du}{dx} + \dfrac{d^3y}{du^3}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^3$

56. A partir de $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$, deducir $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{y''}{(y')^3}$ y $\dfrac{d^3x}{dy^3} = \dfrac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.