

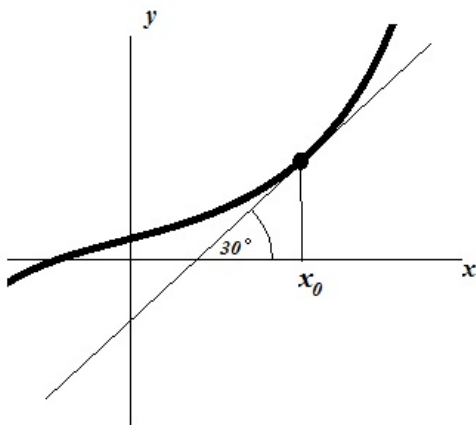
Guia para el examen final

(En construccion)

(Fecha del examen: 12 junio, 2012)

1. Encuentra las siguientes derivadas:

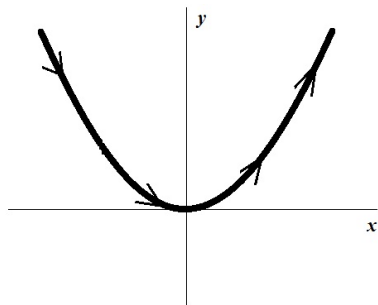
- $f'(x)$, donde $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.
- $\frac{dz}{d\theta}$, donde $z = e^{\sin(\theta)}$.
- $\frac{dx}{dy}$, donde $y = \tan(x)$.
- $\frac{dy}{dx}$, donde $y = \tan(x)$.
- $\frac{dy}{dx}$, donde $y = 2^x$.
- $\frac{d}{dh} 2gy^2$, donde $y = \cos(\sqrt{h/2})$ y g es una constante.
- $y'(1)$ y $y''(1)$ donde $y(x) = (1 - \frac{1}{x^2})^4$.
- $y^{(1000)}(x)$ (la milésima derivada) donde $y(x) = (1 - x^2 + x^4)^{100}$.
- $y^{(2012)}(x)$, donde $y(x) = \sin(x)$.
- $y''(1)$, donde $y(x)$ es una función que satisface $1 + y(x) + [y(x)]^3 = 0$ para todo x .
- $F'(3)$, donde $F(x) = \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.
- $F'(3)$, donde $F(x) = \int_x^7 \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.
- $F'(3)$, donde $\int_0^x F(t)dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$.
- $f'(x_0)$, para la f y la x_0 del dibujo.



- $f'(2)$, donde $f(x)$ es una función cuya gráfica interseca la parábola $y = x^2$ perpendicularmente en el punto $(2, 4)$.
 - $f'(0)$, donde $f(x) = \sin(\arccos(x))$. (Hay que dar respuesta explícita, sin usar calculadora).
 - $f'(0)$, donde $f(x) = \sin(\arctan(x))$. (Hay que dar respuesta explícita, sin usar calculadora).
2. Una partícula se mueve a lo largo del eje de x según la fórmula $x(t) = t^3 - t^2 - 2t$.
- Encuentra los intervalos de tiempo tal que la partícula se mueve hacia la derecha/izquierda.

2

- b) Encuentras los momentos y lugares tal que la partícula se mueve con una velocidad 3.
- c) Encuentra los lugares que la partícula ha visitado n veces, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.
3. Imaginamos a una hormiga caminando a lo largo de la parábola $y = x^2$, de la izquierda hacia la derecha. Sus coordenadas x, y son funciones del tiempo, $x(t), y(t)$. Su velocidad (o “vector de velocidad”) es $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ y su rapidez (o “magnitud de la velocidad”) es $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$. Su vector de aceleración es $\mathbf{a}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t))$ con magnitud $a(t) = \|\mathbf{a}(t)\| = \sqrt{(\ddot{x}(t))^2 + (\ddot{y}(t))^2}$.

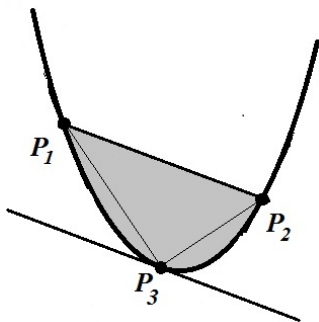


Suponemos que $x(t) = t$.

- a) Encuentra: $y(t), \mathbf{v}(t), v(t), \mathbf{a}(t), a(t)$.
- b) Encuentra $\mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t)$ en $t = -1, 0, 1$ y dibújalos como flechas basadas en la posición de la hormiga $(x(t), y(t))$,
- c) Encuentra los lugares de la parábola (sus coordenadas (x, y)) en donde la hormiga camina hacia el este/noreste/sureste.
4. Se requiere construir una cisterna (deposito de agua) de 10 mil litros (=10 metros cubicos) en forma de caja rectangular. El costo de construccion por 1 metro cuadrado de piso/pared/techo es de 200/100/500 pesos (resp.) Encuentra las medidas de la cisterna más económica.

Respuesta: $1,42 \times 1,42 \times 4,97m$.

5. Encuentra el área del disco con centro en $(1, -2)$ y radio 3 que se encuentra arriba del eje de x .
6. Demuestra el siguiente teorema de Arquímedes (“la cuadratura de la parábola”): en una parábola se escogen dos puntos P_1, P_2 . Luego se escoge un tercer punto, P_3 , tal que la tangente a la parábola en P_3 es paralela al segmento P_1P_2 . Entonces el área del segmento de la parábola delimitado por P_1, P_2 (el área sombreada en el dibujo) es el $4/3$ del área del triángulo con vértices P_1, P_2, P_3 .

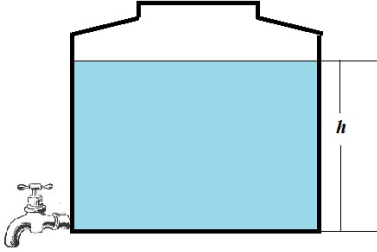


Sugerencia: reubicando los ejes de coordenadas x, y , podemos suponer que la parábola está dada por $y = ax^2, a > 0$.

7. Encuentra el área dentro de una elipse con semi-ejes $a > b$.

Sugerencia: Sugerencia: reubicando los ejes de coordenadas x, y , podemos suponer que la elipse está dada por $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

8. Encuentra una recta que pasa por el origen y que divide en 2 partes del mismo cm^3 área la parte de la parábola $y = (x - 3)^2 - 1$ que se encuentra abajo del eje de x .
9. Un tinaco cilíndrico tiene una llave en el fondo y agua a un nivel de 1 metro arriba del fondo. Abrimos la llave y el nivel de agua empieza a bajar. Después de 1 minuto el nivel del agua ha bajado 10cm. Dejando la llave abierta, ¿en cuánto tiempo se vacía el tinaco?



Sugerencias:

- a) Denotamos por $h(t)$ el nivel del agua en el tinaco (en cm) como función del tiempo t (en minutos), $t = 0$ siendo el momento de abrir la llave.

Vamos a demostrar abajo que la función $h(t)$ tiene la forma $h(t) = h_0(1 - t/t_0)^2$, donde $h_0 = h(0)$ es el nivel inicial del agua y t_0 es el momento que se vacía el tinaco, $h(t_0) = 0$, lo que buscamos.

De aquí, usando los valores dados en el problema de $h(0) = h_0 = 100$ y $h_1 = h(1) = 90$, determina el valor de t_0 (el momento t_0 que el tinaco se vacía, $h(t_0) = 0$).

Respuesta: $t_0 = 1/(1 - \sqrt{h_1/h_0}) \approx 19.5$ minutos.

- b) Para llegar a la fórmula del inciso anterior para $h(t)$, vamos a demostrar abajo que $h(t)$ satisface una ecuación diferencial de la forma $\frac{dh}{dt} = -c\sqrt{h}$, para una constante $c > 0$.

Demuestra que la solución general de la ecuación $h' = -c\sqrt{h}$, con $h(0) = h_0$ y $h(t_0) = 0$, es la fórmula del inciso anterior.

- c) Para llegar a la ecuación $h' = -c\sqrt{h}$ (la parte más importante y bonita de este problema) vamos a usar dos leyes de conservación: (1) conservación de masa y (2) conservación de energía.

Más preciso: (1) el agua que pierde el tinaco sale por la llave; (2) la energía cinética del chorro de agua que sale por la llave viene de la energía potencial que pierde el tinaco.

- d) Empezamos por la conservación de masa. Denotamos por A el área de superficie del agua en el tinaco, por a el área de la apertura de la llave (ambos en cm^2) y por $v(t)$ la velocidad del chorro del agua (en cm/min) que sale por la llave en el momento t (obviamente, la $v(t)$ se disminuye con t , igual que la $h(t)$).

Demuestra que la ley conservación de masa para el agua en este problema implica la relación $\frac{dh}{dt} = -\frac{a}{A}v$.

Para ver esto, considera un pequeño intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$. Denota por $\Delta h = h(t + \Delta t) - h(t)$, el cambio del nivel de agua en este intervalo del tiempo (nota que $\Delta h < 0$). Demuestra que en este intervalo de tiempo el tinaco perdió un volumen de agua de $\approx A|\Delta h| \text{ cm}^3$, y que por la llave salieron $av(t)\Delta t \text{ cm}^3$

de agua. Así que $A\Delta h \approx -av(t)\Delta t$. Dividiendo entre Δt y tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$, obtienes la relación $h' = -\frac{a}{A}v$.

- e) Conservación de energía. Usamos la misma notación del inciso anterior y además denotamos por ρ (la letra griega “rho”) la densidad de agua (en g/cm^3 , un poco menos que 1 en Guanajuato), y por g la aceleración de objetos debido a gravedad en la superficie de la tierra (en cm/min^2).

Demuestra que en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ la energía potencial V que perdió el tinaco, debido a la pérdida de $A\Delta h$ de agua, es $\Delta V \approx \rho(A\Delta h)gh(t)$, y que la energía cinética del chorro del agua que estaba saliendo por la llave en este intervalo del tiempo es $\Delta K \approx \frac{1}{2}\rho(A\Delta h)[v(t)]^2$. Igualando $\Delta K = \Delta V$ (la ley de conservación de energía), obtienes $v = \sqrt{2gh}$.

- f) Combinando los dos incisos anteriores obtienes una ecuación del tipo $h' = -c\sqrt{h}$, para alguna $c > 0$ (expresa la c en términos de a, A, g , aunque no vamos usar esta expresión aquí). Has llegado a la “ecuación del tinaco” (o del “reloj de agua”).
- g) Haz unos experimentos con distintos contenedores de agua (vasos, garafones...) y compara los resultados con la fórmula $h(t) = h_0(1 - (t/t_0))^2$.