
Guia para el 1er examen parcial

(Fecha del examen: 28 marzo, 2012)

1. Encuentra el coeficiente de x^5 en el polinomio $(x+1)^{10}$.

2. Para cada una de las siguientes funciones $y(x)$:

   (a) Describe su dominio (los valores de x para los cuales y está bien definida) (b) Encuentra su derivada $y'(x)$ (c) los valores de x para los cuales $y(x)$ es creciente (d) los valores de x para los cuales es descreciente (e) mínimos y máximos locales y globales.

   (i) $y = x^3 - 3x + 1$ (ii) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ (iii) $y = x - \log(1 + x^2)$ (iv) $y = e^{-x^2}$ (v) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ (vi) $y = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ (vii) $y = 3^x$ (viii) $y = x^x$

   (Sugerencia para (viii): $x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x \log x}$.)

3. (Ver los dibujos al final de la guia). Encuentra la pendiente de la tangente (a) a la curva $x^2 + x^3 + y^4 + y^5 = 4$ en el punto $x = y = 1$; (b) a la elipse $(x-1)^2 + y^2/4 = 5$ en su punto(s) de intersección con el eje de y; (c) al círculo con centro $(0, 1)$ que es tangente a la parábola $y = x^2$ en sus puntos de tangencia con la parábola; (d) a la parábola $y = x^2 - 1$ que pasa por $(2, 0)$.

4. En este problema usamos el llamado "método de Newton"para encontrar una serie de aproximaciones para la raíz cuadrada de 2; es decir, el número $x > 0$ tal que $x^2 = 2$.

   Primero definimos $y(x) = x^2 - 2$. Así que la meta es encontrar el punto de intersección de la gráfica de $y(x)$ con el eje de x (positivo). Consideramos un número $x_0 > 0$ (pensado como una primera aproximación, o adivinanza., para $\sqrt{2}$). Sea $y_0 = y(x_0)$. Si $y_0 = 0$ ya acabamos (x_0 es la raíz de 2); si no, hacemos lo sigiuiente:

   (a) Encuentra la ecuación de la tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto (x_0, y_0).

   Consideramos ahora el punto de intersección de esta tangente con el eje de x, digamos $(x_1, 0)$.

   (b) Encuentra una fórmula para x_1 en términos de x_0.

   (Respuesta: $x_1 = x_0 - \frac{y_0}{y_0'} = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0}$.)

   De la misma manera, si $y_1 = y(x_1) \neq 0$, usamos el x_1 para encontrar la siguiente aproximación x_2, y así sucesivamente.

   (c) Empezando con $x_0 = 1.5$, encuentra las aproximaciones x_1, x_2, x_3. Compara estos valores con el valor real de $\sqrt{2}$. (Sugerencia: usa la fórmula recursiva del inciso anterior, $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$.)

   (d) Usa este método para encontrar el valor de la cúbica raíz de 2 hasta el 5to punto decimal.

   (Sugerencia: empezando con $x_0 = 1$, x_4 ya da la aproximación deseada.)

5. Se requiere producir una lata cilindrica de chiles con un volumen de $V = 4$ litros (1 litro = $1000cm^3$). La lata está hecha de lámina, cuyo costo es $L = 50$ pesos por m^2. La tapa y la base se hacen de dos discos que se cortan de dos cuadrados (se desperdicia lo que sobra de los cuadrados) y la pared de un rectángulo. Luego se solda la pared en forma de tubo y se le soldan las tapas. El costo de soldar es $S = 2$ pesos por metro. Encuentra un diseño (diámetro y altura) que minimaza el costo de producción de la lata (lámina+soldar) y encuentra este costo de producción.

   Sugerencia: para resolver este problema vas a tener que resolver una ecuación de grado 4 del tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Puedes usar el método de Newton (problema anterior). Tambien hay una fórmula general (como para la ecuación cuadrática) pero es complicada (ver `http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuacion_de_cuarto_grado`).Ot opción es buscar un programa en internet que lo haga; por ejemplo `http://www.easycalculation.com/algebra/quartic-equation.php` .

6. Se deja caer un objeto de una altura de h_0 metros. Su altura h (en metros) t segundos depsues está dada por la fórmula $h = h_0 - gt^2/2$, donde $g = 9.8$. Si $h_0 = 100m$, (a) ¿en cuánto tiempo llega al piso ($h = 0$)? (b) ¿Cuál es su velocidad al llegar al piso? (c) ¿En qué momento tiene la mitad de la velocidad del inciso anterior? (d) ¿De qué altura se tiene que dejar caer para que llegue a piso con una velocidad de 100kmh?

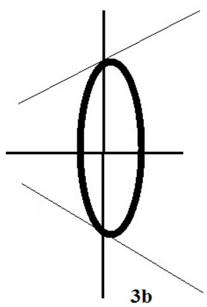
7. Se lanza un objeto horizontalmente de una altura de h_0 metros con una velocidad inicial de v_0 m/seg. Las coordenadas (x, y) del objeto t segundos despues son $x = v_0 t$, $y = h_0 - gt^2/2$. Si lanzamos el objeto de una altura de $h_0 = 10m$ con una velocidad inicial de $v_0 = 10m/seg$, (a) ¿en qué punto pegará al piso? (b) ¿en qué ángulo? (c) ¿Con qué velocidad?

   Sugerencia para (b). El ángulo buscado α satisface $tan(\alpha) = y'(x_0)$, donde x_0 es el punto del eje de x donde el objeto pega. Sugerencia para (c) la velocidad $v(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$. Otra manera de hacer (c): según la ley de conservación de energía, $gh(t) + [v(t)]^2/2$ es constante (no depende de t).

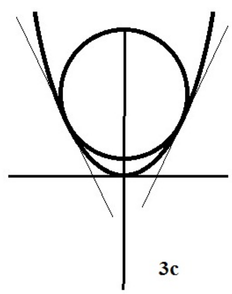
8. Encuentra el valor de $a > 0$ para que la parábola $y = x^2 - a$ intersecte el eje de x con un ángulo de 45 grados.

9. (a) Usando la derivada de $y = \sqrt{x}$ en $x = 9$, encuentra una aproximación para $\sqrt{9.2}$. Compara tu respuesta con el valor real.

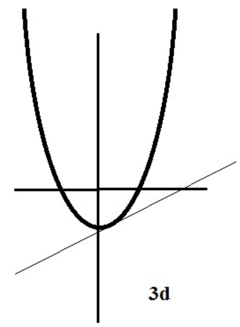
   (Sugerencia: aproxima la gráfica de esta función por su tangente en $(9, 3)$.)



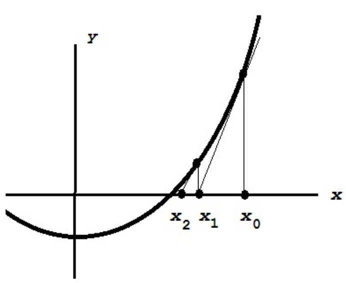
3b



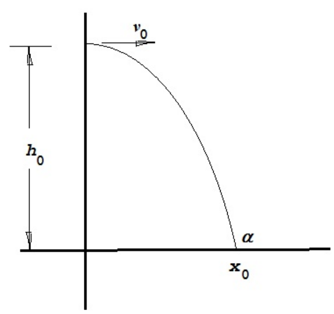
3c



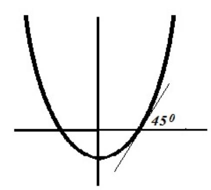
3d



4c



7



8