Guia para el 1er examen parcial

(Fecha del examen: 13 sept, 2012)

*El examen consiste en una selección de problemas de esta guia. Por favor hacer todos los dibujos sobre una hoja cuadriculada. La preguntas marcadas con estrella * son opcionales (no vienen en el examen pero es una buena idea por lo menos intentar hacerlos).*

1. *a*) La gráfica de una función $y = f(x)$ es una línea recta que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(5, 1)$. Dibuja la recta y encuentra su pendiente. Encuentra una fórmula explicita para $f(x)$. Estima $f(2)$ de la gráfica de $f(x)$ y verificalo con la fórmula que encontraste.

   b) La gráfica de una función $y = f(x)$ es una recta con pendiente 0.3 que pasa por el punto $(1, 2)$. Dibuja la gráfica de $f(x)$ y encuentra una fórmula explicita para $f(x)$. Encuentra los puntos de intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas usando la fórmula que encontraste para $f(x)$ y verifica que las respuestas coinciden con la gráfica. Estima $f(-2)$ de la gráfica y compara tu estimado con el valor dado por la fórmula explicita que encontraste para $f(x)$.

   c) La gráfica de una función $g(x)$ es una recta que pasa por el origen y es paralela a la recta del inciso anterior. Encuentra la pendiente de esta recta, dibujala y encuentra una fórmula explicita para $g(x)$. Estima a $g(2)$ de la gráfica y verifica tu estimado algebráicamente usando la fórmula explicita de $g(x)$.

   d) Si dos rectas en el plano son paralelas, ¿existe una relación entre sus pendientes?

   e) * Si dos rectas en el plano son*perpendiculares*, ¿existe una relación entre sus pendientes?

   f) La gráfica de una función $y = f(x)$ es una recta, dada por la ecuación $2x+3y = 4$. Encuentra las intersecciones de esta recta con los ejes de coordenadas y gráficala. Encuentra una fórmula explicita para $f(x)$. Estima la pendiente de la gráfica usando el dibujo y confirma tu estimado algebráicamente usando la ecuación de la recta.

   g) La ecuación de una recta (no vertical) en el plano está dada por $ax + by = c$. Determina la pendiente de la recta y sus puntos de intersección en términos de a, b, c.

2. $y = f(x)$ es una función cuya gráfica pasa por el punto $(1, 2)$ y la línea tangente a la gráfica en $(1, 2)$ está dada por la ecuación $y = 3x - 1$. Encuentra a $f(1)$, $f'(1)$.

3. Consideramos la función $y(x) = x^2 + 2$.

   a) Dibuja la gráfica de $y(x)$.

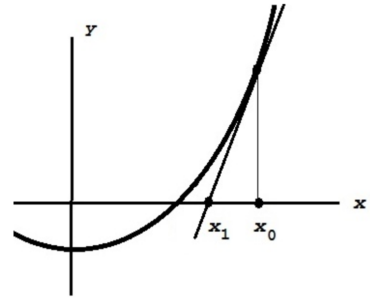
   b) Encuentra una fórmula para $y'(x)$.

   c) Encuentra un punto sobre la gráfica de $y(x)$ en donde la tangente tiene una pendiente de 0.5. Hay que hacer esto (1) gráficamente (2) algebráicamente. Encuentra una ecuación para esta tangente y dibújala junto con la gráfica de $y(x)$.

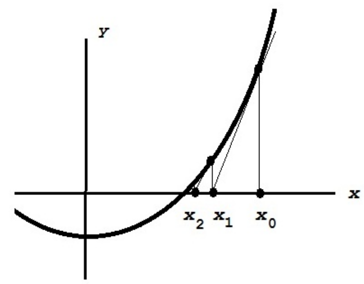
d) Encuentra la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto $(2, 6)$. Encuentra una ecuación para esta recta, encuentra su punto de intersección con el eje de x y dibújala junto con la gráfica de $y(x)$.

e) Consideramos la línea tangente a la gráfica de $y(x)$ en un punto cuya coordenada de x es x_0. (El inciso anterior era el caso especial $x_0 = 2$). Encuentra la ecuación de esta línea. Consideramos el punto de intersección de esta tangente con el eje de x. Llamemos a este punto de intersección $(x_1, 0)$. Encuentra una fórmula para x_1 en términos de x_0.

(Respuesta: $x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0}$.)

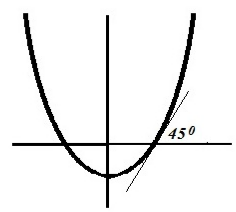


f) * Ahora repetimos el proceso del inciso anterior, como se ve en el dibujo. De este modo producimos sobre el eje de x una sucesión de puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots$ etc (una sucesión infinita!) que se acerca cada vez más al punto de intersección de la gráfica de $y(x)$ con el eje de x. Empezando con $x_0 = 2$, usa la fórmula del inciso anterior (y una calculadora) para calcular los términos x_1, x_2, x_3. ¿Que tan cerca está x_3 al punto de intersección de la gráfica de $y(x)$ con el eje de x?



g) * Usa el método del inciso anterior para dar una aproximación de $\sqrt{11}$ correcta hasta 2 puntos decimales. (Sugerencia: considera la función $y(x) = x^2 - 11$.)

4. Encuentra el valor de $a > 0$ para que la parábola $y = x^2 - a$ intersecte el eje de x con un ángulo de 45 grados.



5. Se deja caer un objeto de una altura inicial de h_0 metros. Su altura h (en metros) t segundos más tarde está dada por la fórmula $h(t) = h_0 - gt^2/2$. Su velocidad está dada $v(t) = h'(t)$ (la derivada de $h(t)$). Suponiendo que $h_0 = g = 10$, responde a las siguientes preguntas

(Notas: 1. No es necesario usar aquí ninguna fórmula de física. 2. Hay que hacer cada uno de los incisos (c)-(f) gráficamente, usando las gráficas del inciso (b), y algebráicamente, usando la fórmula dada para $h(t)$ y la fórmula para $v(t)$ del inciso (a)).

a) Encuentra una fórmula para $v(t)$.

b) Dibuja las gráficas de las funciones $h(t)$ y $v(t)$ sobre el mismo diagrama.

c) ¿En cuánto tiempo llega el objeto al piso?

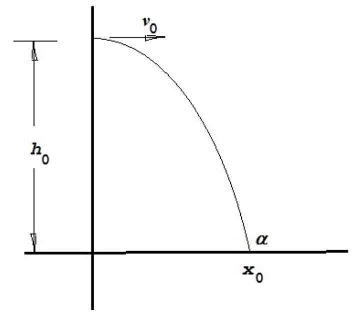
d) ¿En qué momento el objeto llega a la mitad de su altura inicial?

e) ¿Cuál es la velocidad final del objeto (en metros por segundo)? es decir, la veocidad al llegar al piso.

f) * ¿De qué altura se tiene que dejar caer el objeto para que llegue al piso en 1 minuto?

g) * ¿De qué altura se tiene que dejar caer el objeto para que llegue al piso con una velocidad de 100 km por hora?

6. * Se lanza un objeto de una altura de h_0 metros *horizontalmente* con una velocidad inicial de v_0 m/seg. Las coordenadas (x, y) del objeto t segundos despues son $x(t) = v_0 t$, $y(t) = y_0 - gt^2/2$. Su velocidad como función de t es $v(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$. Suponemos que $y_0 = v_0 = g = 10$.



a) Encuentra fórmulas para $x'(t)$, $y'(t)$ y $v(t)$.

b) Dibuja las gráficas de las funciones $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$, $v(t)$.

Sugerencia: hacer dos diagramas, una para $x(t), y(t)$, otra para las velocidades $x'(t)$, $y'(t)$, $v(t)$. Para $v(t)$, nota que $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \Rightarrow v^2 - g^2 t^2 = v_0^2$, lo que es una hipérbola con asíntotas $v = \pm gt$.

c) Encuentra una fórmula para y como función de x. Dibuja su gráfica.

d) ¿En cuánto tiempo llega el objeto al piso?

e) ¿En qué punto pegará al piso?

f) ¿Con qué velocidad pegará al piso?

g) ¿En qué ángulo pegará al piso?

Sugerencia: El ángulo buscado α es el ángulo entre la tangente a la gráfica de $y(x)$ en su punto de intersección con el eje de x. Si el punto de intersección es $(x_0, 0)$, entonces $\tan \alpha = y'(x_0)$.