Teoria de Morse, ago-dic 2012.

Tarea num. 5
(Para el viernes, 5 oct, 9:30am)

En esta tarea revisamos el concepto más básico de la geometría riemanniana: derivada covariante (la conexión de Levi-Civita).

Parte A: la derivada direccional y el corchete de Lie en $\mathbb{R}^n$.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $F : U \to \mathbb{R}^m$ una función suave y $X : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial en U. Se define a $D_X F$, la derivada direccional de F en la dirección de X, por $(D_X F)(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} F(x + tX(x))$. Para dos campos vectoriales $X, Y : U \to \mathbb{R}^n$ se define su corchete de Lie por $[X, Y] := D_X Y - D_Y X$.

1. Sea $X = (a_1, \ldots, a_n)$, $F = (f_1, \ldots, f_m)$, donde a_i, f_j son funciones reales suaves en U. Encuentra una fórmula para $D_X F$ en términos de las a_i, f_j.
2. Si $\gamma : (a, b) \to U$ es una curva suave tal que $0 \in (a, b)$, $\gamma(0) = x$ y $\dot\gamma(0) = X(x)$, entonces $(D_X F)(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} F(\gamma(t))$.
3. Sea $\gamma : (a, b) \to U$ una curva suave y $T = \dot\gamma$ la tangente a lo largo de γ. Checa que la definición de $D_T F$ tiene sentido cuando F está definida solamente a lo largo γ.
4. Para toda función suave $g : U \to \mathbb{R}$, $D_{gX} F = g D_X F$, $D_X(gF) = (D_X g)F + g D_X F$.
5. $(D_X F)(x)$ solo depende de $X(x)$ (y no de otros valores de X) pero sí depende de los valores de F en una vecindad de x.
6. Si X, Y, Z son campos vectoriales en U, $D_X\langle Y, Z\rangle = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, D_X Z\rangle$, donde $\langle Y, Z\rangle$ es el producto escalar estandar en $\mathbb{R}^n$.
7. Demuestra que si X, Y son lineales tambien lo es $[X, Y]$ y encuentra una fórmula para la matriz que lo representa en términos de las matrices que representa a X, Y. (Respuesta: si A, B representan a X, Y resp., entonces $BA - AB$ representa a $[X, Y]$.)
8. Sea $\Phi : U \to V$ un difeomorfismo entre dos abiertos en $\mathbb{R}^n$. Sea $\Phi_* X$ el campo vectorial en V dado por $(\Phi_* X)(y) = (D_X \Phi)(\Phi^{-1} y)$. Demuestra que $\Phi_*[X, Y] = [\Phi_* X, \Phi_* Y]$.
9. Concluye del inciso anterior que el corchete de Lie $[X, Y]$ es una operación bien definida entre campos vectoriales en variedades. (Sugerencia: usa una parametrización para definir el corchete y luego demuestra que la definición no depende de la parametrización que escogiste).
10. Demuestra que, en general, $\Phi_*(D_X Y) \neq D_{\Phi_* X} \Phi_* Y$, por lo que la derivada covariante no está bien definida en variedades (sin estuctura adicional).
11. *(Opcional) Sea C_d el conjunto de los campos vectoriales en $\mathbb{R}$ de grado $\leq d$ (campos de la forma $X = p(x)\frac{d}{dx}$, con $p(x)$ polinomio de grado $\leq d$). Demuestra que C_2 es una álgebra (con respecto al corchete de Lie, i.e. $[C_2, C_2] \subset C_2$) de dimensión 3. Escribe el corchete en C_2 en coordenadas y demuestra lo siguiente: la álgebra C_2 es isomorfa a la álgebra de campos vectoriales lineales de traza 0 en $\mathbb{R}^2$. Reto: generalizar este resultado a los campos cuadráticos en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Parte B: Derivada covariante en subvariedades de $\mathbb{R}^N$.

Ahora consideramos a $M \subset \mathbb{R}^N$, una subvariedad de dimesnión n. Sean X, Y campos vectoriales (suaves) en M. Esto es, $X, Y : M \to \mathbb{R}^N$ tal que $X(x), Y(x) \in T_x M$ para todo $x \in M$. Consideramos a la derivada direccional $D_X Y : M \to \mathbb{R}^N$ y la descomponemos en cada $x \in M$ a la componente tangente y ortogonal a $T_x M$. Denotamos a la componente tangente por $\nabla_X Y$ y la llamamos la derivada covariante de Y con respecto a X a o largo de M. (La componente perpendicular tambien es importante, pero no la usamos aquí). Un campo vectorial Y, definido a lo largo de una curva γ en M y tangente a M es parelelo si $\nabla_{\dot\gamma} Y = 0$. Una geodésica en M es una curva con tangente paralela.

1. Checa con cuidado la definición de derivada covariante. Te vas a dar cuenta que necesitas usar el segundo inciso del problema anterior.
2. Verifica que los incisos 2,3,4,5,6 de la parte A son ciertos para ∇ así como la fórmula $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.
3. (Opcional) Demuestra que las propiedades del inciso anterior caracterisan al operador ∇ (cualquer otro operador $\tilde\nabla$ con las mismas propiedades coincide con ∇).
4. Cierto o falso: sean X, Y dos campos vectoriales en M y $\tilde X, \tilde Y$ campos vectoriales en $\mathbb{R}^N$ cuya restricción a M coincide con X, Y (resp.). Entonces: (1) $\nabla_X Y = D_{\tilde X}\tilde Y\big|_M$; (2) $[X, Y] = [\tilde X, \tilde Y]\big|_M$.
5. Suponemos que M es de codimensión 1 ($N = n + 1$) y que $N : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ es un campo vectorial normal a M no nulo (por ejemplo, si $M = f^{-1}(c)$ para una función f sin puntos críticos definida en una vecindad de M, se puede tomar a $N = \nabla f\big|_M$). Encuentra una fórmula para la derivada covariante en M en términos de N.
6. Sean M_1, M_2 dos subvariedades de $\mathbb{R}^n$ de la misma dimensión, tangentes a lo largo de una curva común γ. Sea ∇^i la derivada covariante en M_i, $i = 1, 2$. Demuestra que $\nabla^1_T = \nabla^2_T$ a lo largo de γ, donde $T = \dot\gamma$.
7. Sea γ un círculo de latitud de S^2, parametrizado por longitud de arco.
   a) Calcula a $\nabla_T T$, donde $T = \dot\gamma$.
   b) Suponemos que γ tiene longitud l y Y es un campo paralelo a lo largo de γ. Encuentra el ángulo entre $Y(0)$ y $Y(l)$.
   c) Sea X un campo vectorial lineal en $\mathbb{R}^n$, dado por una matriz A. Demuestra que si A es anti-simétrica ($A^t = -A$) entonces X es tangente a $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| = 1\}$. Sea Y otro campo vectorial lineal, dado por una matriz antisimétrica B. Encuentra a $\nabla_X Y$ (la derivada covariante a lo largo de S^{n-1}) en términos de A, B.
8. *(Opcional) El flujo generado por un campo vectorial X en M es una familia de 1 parámetro de difeomorfismos locales $\{\Phi_t\}$, definida en una vecindad de $M \times \{0\}$ en $M \times \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in M$ (1) $\Phi_0(x) = x$, y (2) $\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = X(\Phi_t(x))$. Un campo X en M es Killing si los Φ_t son isometrías (una isometría de M es un difeomorfismo Φ tal que $\langle \Phi_* Y, \Phi_* Z\rangle = \langle Y, Z\rangle$ para todos campos vectoriales Y, Z en M). Demuestra:
   a) X es Killing si y solo si $\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle = 0$ para todos campos Y, Z en M.
   b) Todo campo Killing en un abierto en $\mathbb{R}^n$ es de la forma $X(x) = Ax + X_0$, donde A es una matriz anti-simetrica ($A^t = -A$).
   c) Todo campo Killing en un abierto en S^n es la restricción de un campo Killing en $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forma $X(x) = Ax$, con A antisimétrica.