CAPITULO 22

Logaritmos

DEFINICION DEL LOGARITMO. El logaritmo de un número positivo N en base b, positivo y distinto de la unidad, es el exponente x a que hay que elevar la base para obtener dicho número. Es decir $b^x = N$, o bien $x = \log_b N$.

Ejemplo 1. Como $3^2 = 9$, el logaritmo de 9 en base 3 es 2, es decir, $2 = \log_3 9$.

2. $\log_2 8$ es un número x al que se debe elevar la base 2 para obtener 8, es decir, $2^x = 8$, $x = 3$. Por tanto, $\log_2 8 = 3$.

Las relaciones $b^x = N$ y $x = \log_b N$ son equivalentes; $b^x = N$ es la *forma exponencial*, y $x = \log_b N$ la *forma logarítmica*. Como consecuencia, a cada propiedad de la *potenciación*, le corresponde una *propiedad de la logaritmación*.

PROPIEDADES DE LA LOGARITMACION

I. El logaritmo del producto de dos números positivos M y N es igual a la suma de los logaritmos de ambos, es decir,

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

II. El logaritmo del cociente de dos números positivos M y N es igual a la diferencia de los logaritmos de ambos, es decir,

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

III. El logaritmo de la potencia p de un número positivo M es igual al producto del exponente p por el logaritmo de la base, es decir,

$$\log_b M^p = p \log_b M$$

Ejemplo 1. $\log_2 3(5) = \log_2 3 + \log_2 5$

2. $\log_{10} \dfrac{17}{24} = \log_{10} 17 - \log_{10} 24$

3. $\log_7 5^3 = 3 \log_7 5$

$\log_{10} \sqrt[3]{2} = \log_{10} 2^{1/3} = \dfrac{1}{3} \log_{10} 2$

LOGARITMOS DECIMALES O VULGARES

LOGARITMOS DECIMALES O VULGARES. El sistema de logaritmos cuya base es 10 recibe el nombre de sistema decimal, vulgar o de Briggs. Cuando no se escriba la base, se sobrentiende que ésta es igual a 10. Por ejemplo, $\log 25 = \log_{10} 25$.

Consideremos la tabla siguiente.

Número N	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000	10 000
Forma exponencial de N	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}
$\log N$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Es evidente que $10^{1,5377}$ será un número mayor que 10 (que es 10^1), pero menor que 100 (que es 10^2). Realmente, $10^{1,5377} = 34{,}49$; por tanto, $\log 34{,}49 = 1{,}5377$.

La parte entera de un logaritmo se denomina *característica* del mismo y la parte decimal *mantisa*. En el ejemplo anterior la característica del logaritmo es 1 y la mantisa 0,5377.

La mantisa del logaritmo de un número se encuentra en tablas en donde aparece sin la coma decimal. Ha de entenderse, sin embargo, que dicha mantisa es la parte decimal, siempre positiva, de un número cuya parte entera (característica) no figura en las tablas, por deducirse de forma inmediata como vamos a ver.

LA CARACTERISTICA de un logaritmo se determina en función del número de que se trate, de acuerdo con las reglas siguientes:

1) Si el número es mayor que 1, la característica es positiva y es igual al número de cifras enteras *disminuido* en una unidad. Por ejemplo:

Número	5 297	348	900	34,8	60	5,764	3
Característica	3	2	2	1	1	0	0

2) Si el número es menor que 1, la característica es negativa y es igual al número de ceros que haya inmediatamente después de la coma aumentado en una unidad. El signo negativo de la característica se puede escribir de dos maneras: *a*) encima de la característica, como, por ejemplo, $\bar{1}$, $\bar{2}$, etc., *b*) en la forma $9 - 10$, $8 - 10$, etc. Más concretamente, la característica del logaritmo del número 0,3485 es $\bar{1}$, o bien $9 - 10$; la correspondiente a 0,0513 es $\bar{2}$, o bien $8 - 10$; la de 0,0024 es $\bar{3}$, o bien $7 - 10$.

HALLAR EL LOGARITMO DECIMAL DE UN NUMERO POSITIVO. Emplearemos la tabla de logaritmos que figura en uno de los Apéndices.

Supongamos que se necesita conocer el logaritmo del número 728. Se busca en la tabla de logaritmos el número 72 en la columna N y siguiendo la horizontal, debajo de la columna 8, aparece el número 8621, que es la mantisa del logaritmo en cuestión. Como la característica es 2, podremos escribir, $\log 728 = 2.8621$. (Quiere decir que $10^{2.8621} = 28$.)

La mantisa de log 72.8, log 7.28, log 0.728, log 0.0728, etc., es la misma e igual a 0.8621, pero sus características son diferentes. Por ejemplo:

log 728 = 2,8621	log 0,728	$= \bar{1},8621$	o	9,8621-10
log 72,8 = 1,8621	log 0,0728	$= \bar{2},8621$	u	8,8621-10
log 7,28 = 0,8621	log 0,00728	$= \bar{3},8621$	o	7,8621-10

Si el número tiene cuatro cifras, la mantisa se obtiene interpolando por el método de las partes proporcionales.

Ejemplo. Hallar log 4,638.

La característica es 0. La mantisa se halla como sigue.

$$\begin{aligned} \text{Mantisa de log } 4640 &= 0{,}6665 \\ \text{Mantisa de log } 4630 &= \underline{0{,}6656} \\ \text{Diferencia tabular} &= 0{,}0009 \end{aligned}$$

0,8 × diferencia tabular = 0,00072, o bien 0,0007 con cuatro cifras decimales. Mantisa de log 4638 = 0,6656 + 0,0007 = 0,6663.

Luego log 4,638 = 0,6663.

La mantisa de log 4638, log 463,8, log 46,38, etc., es 6663, pero las características son diferentes. Por ejemplo,

log 4638 = 3,6663	log 0,4638	$= \bar{1},6663$	o bien	9,6663-10
log 463,8 = 2,6663	log 0,04638	$= \bar{2},6663$	o bien	8,6663-10
log 46,38 = 1,6663	log 0,004638	$= \bar{3},6663$	o bien	7,6663-10
log 4,638 = 0,6663	log 0,0004638	$= \bar{4},6663$	o bien	6,6663-10

ANTILOGARITMO. Es el número correspondiente a un logaritmo dado. «El antilogaritmo de 3» quiere decir «el número cuyo logaritmo es 3»; en este caso, es fácil deducir que se trata del número 1 000.

Ejemplo 1. Dado log N = 1,9058, hallar N.

En la tabla, la mantisa 9058 corresponde al número 805. Como la característica de log N es 1, el número tendrá dos cifras enteras; por tanto, N = 80,5. (Escribiremos este resultado así: antilog 1,9058 = 80,5.)

2. Dado log N = 7,8657-10, hallar N.

En la tabla, la mantisa 8657 corresponde al número 734. Como la característica es 7-10, el número tendrá dos ceros inmediatamente después de la coma; por tanto, N = 0,00734 (es decir, antilog 7,8657-10 = 0,00734).

3. Dado log N = 9,3842-10, hallar N.

Como la mantisa 3842 no aparece en las tablas, tendremos que hacer la interpolación correspondiente.

$$\begin{aligned} \text{Mantisa de log } 2430 &= 0{,}3856 \\ \text{Mantisa de log } 2420 &= \underline{0{,}3838} \\ \text{Diferencia tabular} &= 0{,}0018 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Mantisa dada} &= 0{,}3842 \\ \text{Mantisa más próxima menor} &= \underline{0{,}3838} \\ \text{Diferencia} &= 0{,}0004 \end{aligned}$$

Luego $2420 + \frac{4}{18}(2430 - 2420) = 2422$ con cuatro cifras, y N = 0,2422.

EL COLOGARITMO de un número positivo es el logaritmo de su recíproco.

Así, pues, $\operatorname{colog} N = \log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N = -\log N$, ya que $\log 1 = 0$.

Los cologaritmos se utilizan con mucha frecuencia en todos los cálculos en los que intervienen divisiones, o cocientes, ya que en lugar de restar el logaritmo del divisor, se puede sumar su cologaritmo.

Por ejemplo, $\log \frac{56}{73} = \log 56 - \log 73 = \log 56 + \operatorname{colog} 73$.

PROBLEMAS RESUELTOS

FORMAS EXPONENCIAL Y LOGARITMICA

1. Expresar las siguientes formas exponenciales en forma logarítmica:

a) $p^q = r$, *b)* $2^3 = 8$, *c)* $4^2 = 16$, *d)* $3^{-2} = \frac{1}{9}$, *e)* $8^{-2/3} = \frac{1}{4}$

a) $q = \log_p r$, *b)* $3 = \log_2 8$, *c)* $2 = \log_4 16$, *d)* $-2 = \log_3 \frac{1}{9}$, *e)* $-\frac{2}{3} = \log_8 \frac{1}{4}$

2. Expresar las siguientes formas logarítmicas en forma exponencial:

a) $\log_5 25 = 2$, *b)* $\log_2 64 = 6$, *c)* $\log_{1/4} \frac{1}{16} = 2$, *d)* $\log_a a^3 = 3$, *e)* $\log_r 1 = 0$

a) $5^2 = 25$, *b)* $2^6 = 64$, *c)* $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$, *d)* $a^3 = a^3$, *e)* $r^0 = 1$

3. Hallar el valor de los logaritmos siguientes:

a) $\log_4 64$. Sea $\log_4 64 = x$; tendremos $4^x = 64 = 4^3$ y $x = 3$.

b) $\log_3 81$. Sea $\log_3 81 = x$; tendremos $3^x = 81 = 3^4$ y $x = 4$.

c) $\log_{1/2} 8$. Sea $\log_{1/2} 8 = x$; tendremos $(\frac{1}{2})^x = 8$, $(2^{-1})^x = 2^3$, $2^{-x} = 2^3$ y $x = -3$.

d) $\log \sqrt[3]{10} = x$, $10^x = \sqrt[3]{10} = 10^{1/3}$, $x = 1/3$

e) $\log_5 125\sqrt{5} = x$, $5^x = 125\sqrt{5} = 5^3 \cdot 5^{1/2} = 5^{7/2}$, $x = 7/2$

4. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\log_3 x = 2$, $3^2 = x$, $x = 9$

b) $\log_4 y = -\frac{3}{2}$, $4^{-3/2} = y$, $y = \frac{1}{8}$

c) $\log_x 25 = 2$, $x^2 = 25$, $x = \pm 5$. Como la base es positiva, la solución es $x = 5$

d) $\log_y \frac{9}{4} = -\frac{2}{3}$, $y^{-2/3} = \frac{9}{4}$, $y^{2/3} = \frac{4}{9}$, $y = (\frac{4}{9})^{3/2} = \frac{8}{27}$ es la solución

e) $\log(3x^2 + 2x - 4) = 0$, $10^0 = 3x^2 + 2x - 4$, $3x^2 + 2x - 5 = 0$, $x = 1, -5/3$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

5. Demostrar las propiedades de los logaritmos.

Sea $M = b^x$ y $N = b^y$; tendremos $x = \log_b M$ e $y = \log_b N$.

I. Como $MN = b^x \cdot b^y = b^{x+y}$, será $\log_b MN = x + y = \log_b M + \log_b N$.

II. Como $\dfrac{M}{N} = \dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$, será $\log_b \dfrac{M}{N} = x - y = \log_b M - \log_b N$.

III. Como $M^p = (b^x)^p = b^{px}$, será $\log_b M^p = px = p \log_b M$.

6. Expresar los logaritmos siguientes como una suma algebraica de logaritmos, aplicando las propiedades I, II, III:

a) $\log_b UVW = \log_b (UV)W = \log_b UV + \log_b W = \log_b U + \log_b V + \log_b W$

b) $\log_b \dfrac{UV}{W} = \log_b UV - \log_b W = \log_b U + \log_b V - \log_b W$

c) $\log \dfrac{XYZ}{PQ} = \log XYZ - \log PQ = \log X + \log Y + \log Z - (\log P + \log Q)$
$= \log X + \log Y + \log Z - \log P - \log Q$

d) $\log \dfrac{U^2}{V^3} = \log U^2 - \log V^3 = 2 \log U - 3 \log V$

e) $\log \dfrac{U^2V^3}{W^4} = \log U^2V^3 - \log W^4 = \log U^2 + \log V^3 - \log W^4$
$= 2 \log U + 3 \log V - 4 \log W$

f) $\log \dfrac{U^{1/2}}{V^{2/3}} = \log U^{1/2} - \log V^{2/3} = \dfrac{1}{2} \log U - \dfrac{2}{3} \log V$

g) $\log_e \dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{y^3}} = \log_e \dfrac{x^{3/2}}{y^{3/4}} = \log_e x^{3/2} - \log_e y^{3/4} = \dfrac{3}{2} \log_e x - \dfrac{3}{4} \log_e y$

h) $\log \sqrt[4]{a^2b^{-3/4}c^{1/3}} = \dfrac{1}{4}\{2 \log a - \dfrac{3}{4} \log b + \dfrac{1}{3} \log c\}$

$= \dfrac{1}{2} \log a - \dfrac{3}{16} \log b + \dfrac{1}{12} \log c$

7. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 3 = 0{,}4771$, $\log 5 = 0{,}6990$, $\log 7 = 0{,}8451$ (todos en base 10), hallar con cuatro cifras decimales los logaritmos siguientes:

a) $\log 105 = \log (3 \cdot 5 \cdot 7) = \log 3 + \log 5 + \log 7 = 0{,}4771 + 0{,}6990 + 0{,}8451 = 2{,}0212$

b) $\log 108 = \log (2^2 \cdot 3^3) = 2 \log 2 + 3 \log 3 = 2(0{,}3010) + 3(0{,}4771) = 2{,}0333$

c) $\log \sqrt[3]{72} = \log \sqrt[3]{3^2 \cdot 2^3} = \log (3^{2/3} \cdot 2) = \dfrac{2}{3} \log 3 + \log 2 = 0{,}6191$

d) $\log 2{,}4 = \log \dfrac{24}{10} = \log \dfrac{3 \cdot 2^3}{10} = \log 3 + 3 \log 2 - \log 10$

$$= 0{,}4771 + 3(0{,}3010) - 1 = 0{,}3801$$

e) $\log 0{,}0081 = \log \dfrac{81}{10^4} = \log 81 - \log 10^4 = \log 3^4 - \log 10^4$

$$= 4 \log 3 - 4 \log 10 = 4(0{,}4771) - 4 = -2{,}0916, \text{ o bien } 7{,}9084\text{-}10$$

Nota. En forma exponencial será $10^{-2{,}0916} = 0{,}0081$.

8. Expresar las siguientes relaciones por un solo logaritmo (mientras no se diga lo contrario, la base es 10):

a) $\log 2 - \log 3 + \log 5 = \log \dfrac{2}{3} + \log 5 = \log \dfrac{2}{3}(5) = \log \dfrac{10}{3}$

b) $3 \log 2 - 4 \log 3 = \log 2^3 - \log 3^4 = \log \dfrac{2^3}{3^4} = \log \dfrac{8}{81}$

c) $\dfrac{1}{2} \log 25 - \dfrac{1}{3} \log 64 + \dfrac{2}{3} \log 27 = \log 25^{1/2} - \log 64^{1/3} + \log 27^{2/3}$

$$= \log 5 - \log 4 + \log 9 = \log \frac{5}{4} + \log 9 = \log \frac{5}{4}(9) = \log \frac{45}{4}$$

d) $\log 5 - 1 = \log 5 - \log 10 = \log \dfrac{5}{10} = \log \dfrac{1}{2}$

e) $2 \log 3 + 4 \log 2 - 3 = \log 3^2 + \log 2^4 - 3 \log 10 = \log 9 + \log 16 - \log 10^3$

$$= \log (9 \cdot 16) - \log 10^3 = \log \frac{9 \cdot 16}{10^3} = \log 0{,}144$$

f) $3 \log_a b - \dfrac{1}{2} \log_a c = \log_a b^3 + \log_a c^{-1/2} = \log_a (b^3 c^{-1/2})$

9. En las ecuaciones siguientes, despejar la incógnita que se indica:

a) $\log_2 x = y + c \;:\; x.$ $\qquad x = 2^{y+c}$

b) $\log a = 2 \log b \;:\; a.$ $\qquad \log a = \log b^2,\ a = b^2$

c) $\log_e I = \log_e I_0 - t \;:\; I.$ $\qquad \log_e I = \log_e I_0 - t \log_e e = \log_e I_0 + \log_e e^{-t}$

$$= \log_e I_0 e^{-t}, \qquad I = I_0 e^{-t}$$

d) $2 \log x + 3 \log y = 4 \log z - 2 \;:\; y.$

Despejando $\log y$, $3 \log y = 4 \log z - 2 - 2 \log x$ y

$$\log y = \frac{4}{3} \log z - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \log x = \log z^{4/3} + \log 10^{-2/3} + \log x^{-2/3} = \log z^{4/3} 10^{-2/3} x^{-2/3}.$$

Luego $y = 10^{-2/3} x^{-2/3} z^{4/3}$.

e) $\log (x + 3) = \log x + \log 3 \;:\; x.$ $\qquad \log (x + 3) = \log 3x,\ x + 3 = 3x,\ x = 3/2$

LOGARITMOS VULGARES

10. Hallar la característica de los logaritmos vulgares de los números siguientes:

a) 57	*c*) 5,63	*e*) 982,5	*g*) 186 000	*i*) 0,7314	*k*) 0,0071
b) 57,4	*d*) 35,63	*f*) 7824	*h*) 0,71	*j*) 0,0325	*l*) 0,0003

a) 1	*c*) 0	*e*) 2	*g*) 5	*i*) 9 − 10	*k*) 7 − 10
b) 1	*d*) 1	*f*) 3	*h*) 9 − 10	*j*) 8 − 10	*l*) 6 − 10

11. Hallar los logaritmos siguientes:

a) log 87,2 = 1,9405	*h*) log 6,753 = 0,8295	(8293 + 2)
b) log 37300 = 4,5717	*i*) log 183,2 = 2,2630	(2625 + 5)
c) log 753 = 2,8768	*j*) log 43,15 = 1,6350	(6345 + 5)
d) log 9,21 = 0,9643	*k*) log 876 400 = 5,9427	(9425 + 2)
e) log 0,382 = 9,5821 − 10	*l*) log 0,2548 = 9,4062 − 10	(4048 + 14)
f) log 0,00159 = 7,2014 − 10	*m*) log 0,04372 = 8,6407 − 10	(6405 + 2)
g) log 0,0256 = 8,4082 − 10	*n*) log 0,009848 = 7,9933 − 10	(9930 + 3)

12. Hallar los antilogaritmos siguientes:

a) Antilog 3,8531 = 7130	*h*) Antilog 2,6715 = 469,3	(3/9 × 10 = 3 aprox.)
b) Antilog 1,4997 = 31,6	*i*) Antilog 4,1853 = 15320	(6/28 × 10 = 2 aprox.)
c) Antilog 9,8267 − 10 = 0,671	*j*) Antilog 0,9245 = 8,404	(2/5 × 10 = 4)
d) Antilog 7,7443 − 10 = 0,00555	*k*) Antilog $\bar{1}$,6089 = 0,4064	(4/11 × 10 = 4 aprox.)
e) Antilog 0,1875 = 1,54	*l*) Antilog 8,8907 − 10 = 0,07775	(3/6 × 10 = 5)
f) Antilog $\bar{2}$,3927 = 0,0247	*m*) Antilog 1,2000 = 15,85	(13/27 × 10 = 5 aprox.)
g) Antilog 4,9360 = 86300	*n*) Antilog 7,2409 − 10 = 0,001742	(4/25 × 10 = 2 aprox.)

13. Expresar los números siguientes como potencias de 10: *a*) 893, *b*) 0,358.

a) Hallamos x de forma que $10^x = 893$. Luego $x = \log 893 = 2{,}9509$ y $893 = 10^{2{,}9509}$.

b) Hallamos x de forma que $10^x = 0{,}358$.

Luego $x = \log 0{,}358 = 9{,}5539 - 10 = -0{,}4461$ y $0{,}358 = 10^{-0{,}4461}$.

Efectuar con logaritmos las operaciones siguientes:

14. $P = 3{,}81 \times 43{,}4$

$\log P = \log 3{,}81 + \log 43{,}4$

$$\begin{array}{rl} & \log 3{,}81 = 0{,}5809 \\ (+) & \log 43{,}4 = 1{,}6375 \\ \hline & \log P = 2{,}2184 \end{array} \qquad \text{Luego } P = \text{antilog } 2{,}2184 = 165{,}3$$

Obsérvese el significado exponencial del cálculo. Es decir,

$$3{,}81 \times 43{,}4 = 10^{0{,}5809} \times 10^{1{,}6375}$$
$$= 10^{0{,}5809 + 1{,}6375} = 10^{2{,}2184} = 165{,}3$$

15. $P = 73{,}42 \times 0{,}00462 \times 0{,}5143$ $\qquad \log P = \log 73{,}42 + \log 0{,}00462 + \log 0{,}5143$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \log 73{,}42 & = & 1{,}8658 \\
(+) & \log 0{,}00462 & = & 7{,}6646 - 10 \\
(+) & \log 0{,}5143 & = & \underline{9{,}7112 - 10} \\
 & \log P & = & 19{,}2416 - 20 = 9{,}2416 - 10. \qquad \text{Luego } P = 0{,}1744
\end{array}$$

16. $P = \dfrac{784{,}6 \times 0{,}0431}{28{,}23}$ $\qquad \log P = \log 784{,}6 + \log 0{,}0431 - \log 28{,}23$

$$\begin{array}{rrcl}
 & \log 784{,}6 & = & 2{,}8947 \\
(+) & \log 0{,}0431 & = & \underline{8{,}6345 - 10} \\
 & & & 11{,}5292 - 10 \\
(-) & \log 28{,}23 & = & \underline{1{,}4507} \\
 & \log P & = & 10{,}0785 - 10 = 0{,}0785 \\
 & P & = & 1{,}198
\end{array}$$

17. $P = \dfrac{0{,}4932 \times 653{,}7}{0{,}07213 \times 8456}$

Numerador N

$$\begin{array}{rrcl}
 & \log 0{,}4932 & = & 9{,}6930 - 10 \\
(+) & \log 653{,}7 & = & \underline{2{,}8154} \\
 & \log N & = & 12{,}5084 - 10 \\
(-) & \log D & = & \underline{2{,}7853} \\
 & \log P & = & 9{,}7231 - 10 \\
 & P & = & 0{,}5286
\end{array}$$

Denominador D

$$\begin{array}{rrcl}
 & \log 0{,}07213 & = & 8{,}8581 - 10 \\
(+) & \log 8456 & = & \underline{3{,}9272} \\
 & \log D & = & 12{,}7853 - 10 \\
 & & = & 2{,}7853
\end{array}$$

18. $P = (7{,}284)^5$

$$\log P = 5 \log 7{,}284 = 5(0{,}8623) = 4{,}3115 \quad \text{y} \quad P = 20490$$

19. $P = \dfrac{(63{,}28)^3(0{,}00843)^2(0{,}4623)}{(412{,}3)(2{,}184)^5}$

$$\log P = 3 \log 63{,}28 + 2 \log 0{,}00843 + \log 0{,}4623 - (\log 412{,}3 + 5 \log 2{,}184)$$

Numerador N

$$\begin{array}{rrcl}
 & 3 \log 63{,}28 = 3(1{,}8013) & = & 5{,}4039 \\
(+) & 2 \log 0{,}00843 = 2(7{,}9258 - 10) & = & 15{,}8516 - 20 \\
(+) & \log 0{,}4623 & = & \underline{9{,}6649 - 10} \\
 & \log N & = & 30{,}9204 - 30 \\
(-) & \log D & = & \underline{4{,}3117} \\
 & \log P & = & 26{,}6087 - 30 = 6{,}6087 - 10 \\
 & P & = & 0{,}0004062 \text{ (o bien, } 4{,}062 \times 10^{-4}\text{)}
\end{array}$$

Denominador D

$$\begin{array}{rrcl}
 & \log 412{,}3 & = & 2{,}6152 \\
(+) & 5 \log 2{,}184 & = & \underline{1{,}6965} \\
 & \log D & = & 4{,}3117
\end{array}$$

20. $P = \sqrt[5]{0{,}8532}$

$$\log P = \frac{1}{5}\log 0{,}8532 = \frac{1}{5}(9{,}9310 - 10) = \frac{1}{5}(49{,}9310 - 50) = 9{,}9862 - 10 \quad \text{y} \quad P = 0{,}9688$$

21. $P = \dfrac{(78{,}41)^3\sqrt{142{,}3}}{\sqrt[4]{0{,}1562}}$

$$\log P = 3\log 78{,}41 + \frac{1}{2}\log 142{,}3 - \frac{1}{4}\log 0{,}1562$$

Numerador N

$$3\log 78{,}41 = 3(1{,}8944) = 5{,}6832$$
$$(+)\ \tfrac{1}{2}\log 142{,}3 = \tfrac{1}{2}(2{,}1532) = \underline{1{,}0766}$$
$$\log N = 6{,}7598 = 16{,}7598 - 10$$

Denominador D

$$\tfrac{1}{4}\log 0{,}1562 = \tfrac{1}{4}(9{,}1937 - 10)$$
$$= \tfrac{1}{4}(39{,}1937 - 40)$$
$$\log D = 9{,}7984 - 10$$

$$(-)\ \log D = \underline{9{,}7984 - 10}$$
$$\log P = 6{,}9614$$
$$P = 9\,150\,000 \quad \text{o bien} \quad 9{,}15 \times 10^6$$

22. El periodo T de la oscilación de un péndulo simple de longitud l viene dado por la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ siendo g la aceleración de la gravedad. Hallar T (en segundos) si $l = 281{,}3$ cm y $g = 981{,}0$ cm por segundo en cada segundo. El valor $2\pi = 6{,}283$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 6{,}283\sqrt{\frac{281{,}3}{981{,}0}}$$

$$\log T = \log 6{,}283 + \tfrac{1}{2}(\log 281{,}3 - \log 981{,}0)$$

$$\log 6{,}283 = \quad = 0{,}7982$$
$$(+)\ \tfrac{1}{2}\log 281{,}3 = \tfrac{1}{2}(2{,}4492) = \underline{1{,}2246}$$
$$2{,}0228$$
$$(-)\ \tfrac{1}{2}\log 981{,}0 = \tfrac{1}{2}(2{,}9917) = \underline{1{,}4959}$$
$$\log T = 0{,}5269$$
$$T = 3{,}365 \text{ segundos}$$

COLOGARITMOS

23. Hallar *a*) colog 42,36, *b*) colog 0,8536.

a) $\operatorname{colog} 42{,}36 = \log \dfrac{1}{42{,}36} = \log 1 - \log 42{,}36$

$$\log 1 = 10{,}0000 - 10$$
$$(-)\ \log 42{,}36 = \underline{1{,}6270}$$
$$\operatorname{colog} 42{,}36 = 8{,}3730 - 10$$

b) $\operatorname{colog} 0{,}8536 = \log \dfrac{1}{0{,}8536} = \log 1 - \log 0{,}8536$

$$\log 1 = 10{,}0000 - 10$$
$$(-)\ \log 0{,}8536 = \underline{9{,}9313 - 10}$$
$$\operatorname{colog} 0{,}8536 = 0{,}0687$$

24. Demostrar que *a*) $\text{colog } MN = \text{colog } M + \text{colog } N$ y *b*) $\text{colog } M^p = p \text{ colog } M$, siendo $M,N > 0$.

a) $\text{colog } MN = \log \dfrac{1}{MN} = \log \dfrac{1}{M} + \log \dfrac{1}{N} = \text{colog } M + \text{colog } N$

b) $\text{colog } M^p = \log \dfrac{1}{M^p} = p \log \dfrac{1}{M} = p \text{ colog } M$

25. Calcular, empleando cologaritmos, $P = \dfrac{(372{,}1)(0{,}0862)}{(4{,}315)(0{,}7460)}$.

$\log P = \log 372{,}1 + \log 0{,}0862 - \log 4{,}315 - \log 0{,}7460$

$$\begin{array}{lrl}
 & \log 372{,}1 = & 2{,}5706 \\
(+) & \log 0{,}0862 = & 8{,}9355 - 10 \\
(+) & \text{colog } 4{,}315 = & 9{,}3650 - 10 \qquad (\log 4{,}315 = 0{,}6350) \\
(+) & \text{colog } 0{,}7460 = & 0{,}1273 \qquad (\log 0{,}7460 = 9{,}8727 - 10) \\
\hline
 & \log P = & 20{,}9984 - 20 = 0{,}9984 \\
 & P = & 9{,}963
\end{array}$$

26. Calcular, empleando cologaritmos, $P = \dfrac{\sqrt{0{,}8730}}{\sqrt[4]{37{,}31}\ (4{,}863)^3}$.

$$\begin{array}{lll}
 & \frac{1}{2} \log 0{,}8730 = \frac{1}{2}(9{,}9410 - 10) = \frac{1}{2}(19{,}9410 - 20) = & 9{,}9705 - 10 \\
(+) & \frac{1}{4} \text{ colog } 37{,}31 = \frac{1}{4}(8{,}4282 - 10) = \frac{1}{4}(38{,}4282 - 40) = & 9{,}6071 - 10 \\
(+) & 3 \text{ colog } 4{,}863 = 3(9{,}3131 - 10) = 27{,}9393 - 30 = & 7{,}9393 - 10 \\
\hline
 & \log P = & 27{,}5169 - 30 = 7{,}5169 - 10 \\
 & P = & 0{,}003288 \quad \text{o} \quad 3{,}288 \times 10^{-3}
\end{array}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

27. Calcular x en: $5^{2x+2} = 3^{5x-1}$.

Tomando logaritmos, $(2x + 2) \log 5 = (5x - 1) \log 3$

Luego $2x \log 5 - 5x \log 3 = -\log 3 - 2 \log 5,$

$x(2 \log 5 - 5 \log 3) = -\log 3 - 2 \log 5,$

y
$$x = \frac{\log 3 + 2 \log 5}{5 \log 3 - 2 \log 5} = \frac{0{,}4771 + 2(0{,}6990)}{5(0{,}4771) - 2(0{,}6990)} = \frac{1{,}8751}{0{,}9875}.$$

$$\begin{array}{lrl}
 & \log 1{,}875 = & 10{,}2730 - 10 \\
(-) & \log 0{,}9875 = & 9{,}9946 - 10 \\
\hline
 & \log x = & 0{,}2784 \\
 & x = & 1{,}898
\end{array}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

28. Hallar: *a*) $\log_2 32$, *b*) $\log \sqrt[4]{10}$, *c*) $\log_3 1/9$, *d*) $\log_{1/4} 16$, *e*) $\log_e e^x$, *f*) $\log_8 4$.

29. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\log_2 x = 3$ *c*) $\log_x 8 = -3$ *e*) $\log_4 x^3 = 3/2$

b) $\log y = -2$ *d*) $\log_3 (2x + 1) = 1$ *f*) $\log_{(x-1)} (4x - 4) = 2$

30. Expresar como suma algebraica de logaritmos:

a) $\log \dfrac{U^3 V^2}{W^5}$ *b*) $\log \sqrt{\dfrac{2x^3 y}{z^7}}$ *c*) $\log_e \sqrt[3]{x^{1/2} y^{-1/2}}$ *d*) $\log \dfrac{xy^{-3/2} z^3}{a^2 b^{-4}}$

31. Despejar la incógnita que se indica en las ecuaciones siguientes:

a) $2 \log x = \log 16$; x *c*) $\log_3 F = \log_3 4 - 2 \log_3 x$; F

b) $3 \log y + 2 \log 2 = \log 32$; y *d*) $\log_e (30 - U) = \log_e 30 - 2t$; U

32. Demostrar que si a y b son positivos y $\neq 1$, $(\log_a b)(\log_b a) = 1$.

33. Demostrar que $10^{\log N} = N$ siendo $N > 0$.

34. Hallar la característica de los logaritmos vulgares de los números siguientes:

a) 248 *c*) 0,024 *e*) 0,0006 *g*) 1,06 *i*) 4 *k*) 237,63 *m*) 7 000 000
b) 2,48 *d*) 0,162 *f*) 18,36 *h*) 6000 *j*) 40,60 *l*) 146,203 *n*) 0,000007

35. Hallar el logaritmo vulgar de los números siguientes:

a) 237 *c*) 1,26 *e*) 0,086 *g*) 10400 *i*) 0,000000728 *k*) 23,70 *m*) 1
b) 28,7 *d*) 0,263 *f*) 0,007 *h*) 0,00607 *j*) 6 000 000 *l*) 6,03 *n*) 1000

36. Hallar el antilogaritmo de los números siguientes:

a) 2,8802 *c*) 0,6946 *e*) 8,3160 − 10 *g*) 4,6618 *i*) $\bar{1}$,9484
b) 1,6590 *d*) $\bar{2}$,9042 *f*) 7,8549 − 10 *h*) 0,4216 *j*) 9,8344 − 10

37. Hallar, interpolando, el logaritmo de los números siguientes:

a) 1463 *c*) 86,27 *e*) 0,6041 *g*) 1,006 *i*) 460,3
b) 810,6 *d*) 8,106 *f*) 0,04622 *h*) 300,6 *j*) 0,003001

38. Hallar, interpolando, el antilogaritmo de los números siguientes:

a) 2,9060 *c*) 1,6600 *e*) 3,7045 *g*) 2,2500 *i*) $\bar{1}$,4700
b) $\bar{1}$,4860 *d*) $\bar{1}$,9840 *f*) 8,9266 − 10 *h*) 0,8003 *j*) 1,2925

39. Expresar los números siguientes como potencias de 10: *a*) 45,4, *b*) 0,005278.

40. Calcular:

a) $(42{,}8)(3{,}26)(8{,}10)$

b) $\dfrac{(0{,}148)(47{,}6)}{284}$

c) $\dfrac{(1{,}86)(86{,}7)}{(2{,}87)(1{,}88)}$

d) $\dfrac{2453}{(67{,}2)(8{,}55)}$

e) $\dfrac{5608}{(0{,}4536)(11000)}$

f) $\dfrac{(3{,}92)^3(72{,}16)}{\sqrt[4]{654}}$

g) $3{,}14\sqrt{11{,}65/32}$

h) $\sqrt{\dfrac{906}{(3{,}142)(14{,}6)}}$

i) $\sqrt{\dfrac{(1600)(310{,}6)^2}{7290}}$

j) $\sqrt[3]{\dfrac{(5{,}52)(2610)}{(7{,}36)(3{,}142)}}$

41. Resolver la ecuación: $\frac{20,0}{14,7} = (\frac{0,0613}{x})^{1,32}$.

42. La fórmula $D = \sqrt[3]{\frac{W}{0,5236(A - G)}}$ se utiliza para calcular el diámetro que debe tener un globo esférico para elevar un peso W. Hallar D si $A = 0,0807$, $G = 0,0056$ y $W = 1250$.

43. Dada la fórmula $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, hallar l si $T = 2,75$, $\pi = 3,142$ y $g = 9,81$.

44. Hallar x en las ecuaciones:

a) $3^x = 243$ *c*) $2^{x+2} = 64$ *e*) $x^{-3/4} = 8$ *g*) $7x^{-1/2} = 4$ *i*) $5^{x-2} = 1$

b) $5^x = 1/125$ *d*) $x^{-2} = 16$ *f*) $x^{-2/3} = 1/9$ *h*) $3^x = 1$ *j*) $2^{2x+3} = 1$

45. Resolver las ecuaciones: *a*) $4^{2x-1} = 5^{x+2}$, *b*) $3^{x-1} = 4 \cdot 5^{1-3x}$

46. Hallar *a*) colog 58,3, *b*) colog 0,07312

47. Calcular, empleando cologaritmos, *a*) $\frac{(28,3)(471,5)}{(55,21)(3,142)}$, *b*) $\sqrt{\frac{(4,36)(2,143)^3}{(0,0258)^2}}$

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

28. *a*) 5 *b*) 1/4 *c*) -2 *d*) -2 *e*) x *f*) 2/3

29. *a*) 8 *b*) 0,01 *c*) 1/2 *d*) 1 *e*) 2 *f*) 5

30. *a*) $3 \log U + 2 \log V - 5 \log W$ *c*) $\frac{1}{6} \log_e x - \frac{1}{6} \log_e y$

b) $\frac{1}{2} \log 2 + \frac{3}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y - \frac{7}{2} \log z$ *d*) $\log x - \frac{3}{2} \log y + 3 \log z - 2 \log a + 4 \log b$

31. *a*) 4 *b*) 2 *c*) $F = 4/x^2$ *d*) $U = 30(1 - e^{-2t})$

34. *a*) 2 *c*) $\bar{2}$ *e*) $\bar{4}$ *g*) 0 *i*) 0 *k*) 2 *m*) 6
b) 0 *d*) $\bar{1}$ *f*) 1 *h*) 3 *j*) 1 *l*) 2 *n*) $\bar{6}$

35. *a*) 2,3747 *c*) 0,1004 *e*) $\bar{2}$,9345 *g*) 4,0170 *i*) $\bar{7}$,8621 *k*) 1,3747 *m*) 0,0000
b) 1,4579 *d*) $\bar{1}$,4200 *f*) 7,8451-10 *h*) $\bar{3}$,7832 *j*) 6,7782 *l*) 0,7803 *n*) 3,0000

36. *a*) 759 *c*) 4,95 *e*) 0,0207 *g*) 45 900 *i*) 0,888
b) 45,6 *d*) 0,0802 *f*) 0,00716 *h*) 2,64 *j*) 0,683

37. *a*) 3,1653 *c*) 1,9359 *e*) $\bar{1}$,7811 *g*) 0,0026 *i*) 2,6631
b) 2,9088 *d*) 0,9088 *f*) 8,6648-10 *h*) 2,4780 *j*) 7,4773-10

38. *a*) 805,4 *c*) 45,71 *e*) 5064 *g*) 177,8 *i*) 0,2951
b) 0,3062 *d*) 0,9638 *f*) 0,08445 *h*) 6,314 *j*) 19,61

39. *a*) $10^{1,6571}$ *b*) $10^{-2,2776}$

40. *a*) 1130 *c*) 29,9 *e*) 1,124 *g*) 1,90 *i*) 145,5
b) 0,0248 *d*) 4,27 *f*) 860 *h*) 4,44 *j*) 8,54

41. 0,0486 **42.** 31,7 **43.** 1,88

44. *a*) 5 *c*) 4 *e*) 1/16 *g*) 49/16 *i*) 2
b) -3 *d*) $\pm 1/4$ *f*) ± 27 *h*) 0 *j*) $-3/2$

45. *a*) 3,958 *b*) 0,6907

46. *a*) 8,2343 − 10 *b*) 1,1360

47. *a*) 76,93 *b*) 254,0