Examen final - soluciones y comentarios

11 dic, 2013

En general, los 4 alumnos que presentaron el examen final lo hicieron de manera muy buena, con mucha dedicación y se notó que aprendieron bastante en el curso. Dos de los problemas, tipo "qué puedes decir...", ninguno los resolvió (aunque se podian argumentar que la formulación era vaga, pero primero lean mi solución abajo). En otros problemas, como 1a, varios dieron respuestas demasiado complicadas. El último problema (con el tetraedro) se prestaba a inventos creativos, a ver qué dicen del mio...

---

1. **Cierto o Falso.**

   a) **Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un subgrupo finito. Entonces cada $T \in G$ es diagonalizable.**

   [Se puede hacer esto sin teoría de representación, usando la forma de Jordan de T o polinomio característico (como unos hicieron), pero con teoría de representación es muy simple y natural.]

   $\triangleright$ Cierto. Diagonalizar T significa descomponer V en la suma directa de subesapcios 1-dimensionales T-invariantes. Como G es finito, el grupo (cíclico) generado por T, digamos H, es (1) finito y (2) abeliano. Como H es finito, existe en V un producto hermitiano H-invariante, así que V se descompone como la suma directa de subespacios H-invariantes irreducibles. Como H es abeliano, cada uno de estos subespacios irreducibles es de dimensión 1 (Lemma de Schur). $\triangleleft$

   b) **Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un subgrupo finito abeliano. Entonces existe en V una base que diagonaliza simultaneamente a todos los operadores $T \in G$.**

   $\triangleright$ Cierto. La demostración del caso anterior cubre este caso tambien.$\triangleleft$

   c) **Toda representación V del grupo simétrico S_{10} es autodual, $V \cong V^*$.**

   [Aquí varios usaron el isomrfismo $V^* \cong \bar{V}$ y usaron un resultado visto en clase, cierto e interesante pero sobrado, que los caracteres del grupo simétrico tienen valores enteros.]

   $\triangleright$ Cierto. Usamos la teoría de caracteres de grupos finito para demostrar que todas las representaciones del grupo simétrico son autoduales. La fórmula que necesitamos es que para toda representación V (de cualquier grupo, incluso no finito), $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1})$ (esto es porqué $\rho_{V^*}(g) := [\rho(g^{-1})]^*$ y la traza de una transformación es igual a la de su adjunta). Ahora el caracter es una función de clase (invariante bajo conjugación) y para grupo finito caracteriza la representación. Así que basta ver que para el grupo simétrico cada elemento es conjugado a su iversa. Esto es algo muy particular del grupo simétrico y se puede hacer usando la presentación de un elemento como producto de ciclos disjuntos. No sé cuáles son los grupos con la propiedad que cada elemento es conjugado a su inversa. Otra pregunta natural es si esta propiedad es equivalente a la autodualidad de las representaciones.$\triangleleft$

d) **Para todo grupo finito, la representación regular izquierda es isomorfa a la representación regular derecha.**

$\triangleright$ Cierto. Consideras el mapa $G \to G$ dado por $g \to g^{-1}$. Es una biyección G-equivariante con respecto a la acción de translación por la izquierda en el dominio y translación por la derecha en el codiminio, así que extiende (linealmente) a un ismorfismo entre las representaciones de permutación asociadas. $\triangleleft$

e) **Para toda representación V de un grupo finito G, existe en V una forma bilineal compleja no degenerada G-invariante.**

[La típica confusión aquí es entre "forma bilineal" y "producto hermitiano". El último no es bilineal, sino lineal en una entrada y anti-lineal en la otra, o en otras palabras, una forma bilineal $V \times \overline{V} \to \mathbb{C}$.]

$\triangleright$ Falso. Una forma bilineal $B : V \times V \to \mathbb{C}$ define una transformación lineal $I_B : V \to V^*$, dada por $I_B(v) = B(v, \cdot)$. Si B es G-invariante I_B es G-equivariante y si B es no degenerado I_B es inyectivo, i.e. isomorfismo. Así que basta dar un ejemplo de una representación que no es autodual. Por ejemplo, la representación usual de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{C}$, $[k] \mapsto exp(2i\pi k/n)$, $n > 2$. $\triangleleft$

f) **Un grupo finito es abeliano si y solo si todas sus representaciones irreducibles son de dimensión 1.**

$\triangleright$ Cierto. En una dirección es una consecuencia inmediata del Lemma de Schur (vista en clase). En la otra dirección, suponemos que todas las representaciones irreducibles de G son de dimensión 1. Por el teorema de Peter-Weyl (descomposición de la representación regular izquierda), $\#G = \sum_{\lambda \in \hat{G}} d_\lambda^2$, donde d_λ es la dimensión de una representación irreducible de clase λ. Así que, si todos $d_\lambda = 1$ entonces $\#\hat{G} = \#G$. Por otro lado, por la teor;ia de caracter, $\#\hat{G} = \#(G/conj)$ (núm. de clases de conjugación), así que todas las clases de conjugación de G son triviales, por lo que G es abeliano. $\triangleleft$

g) **Todo grupo finito G de orden n es isomorfo a un subgrupo de O_n (las matrices ortogonales $n \times n$).**

$\triangleright$ Cierto. Toma la representación regular izquierda. $\triangleleft$

[Varios lo dijeron de manera complicada sin darse cuenta que lo que están definiendo es básicamente la represetación regular izquierda...]

h) **S_n es isomorfo a un subgrupo de SO_n (matrices ortogonales $n \times n$ con det=1).**

[Nadie logró demostrar este inciso, aunque todos lo hicieron con O_n. Básicamente, para encajar en O_n, tomaron la representación de permutación en $\mathbb{R}^n$, pero no se dieron cuenta que la imagen cae de hecho en $O_{n-1} \ldots$. Alguien incluso intentó demostrar que S_4 no es isomorfo a un subgrupo de SO_4, apesar que en la guía del examen hemos identificado a S_4 como el grupo de rotaciones de un cubo, ie S_4 es un subgrupo de SO_3. Un problema interesante que no sé como hacer, es encontrar para cada n el mínimo $m = m(n)$ tal que S_n se encaja en SO_m. Tenemos que $m(n) \leq n$ y $m(3) = m(4) = 3$.]

$\triangleright$ Cierto. Toma la representación en $\mathbb{R}^n$ dada por permutación de las coordenadas. Toma el subespacio $V \subset \mathbb{R}^n$ de vectores cuya suma de coordenadas es 0. Entonces V es S_n-invariante, de dimensión $n-1$, y la representación $\rho : S_n \to \mathrm{GL}(V)$ es inyectiva y ortogonal (con respecto al producto escalar estandar en $\mathbb{R}^n$). Esto da un homomorfismo inyectivo $\rho : S_n \to O_{n-1}$. Ahora tomamos la representación $\rho \oplus \det(\rho)$. $\triangleleft$

2. **Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $G \subset \mathrm{GL}(V)$ un subgrupo finito. Sea $A \subset \mathrm{End}(V)$ el subespacio vectorial generado por G.**

a) **Demuestra que A es un subalgebra de $\mathrm{End}(V)$.**

$\triangleright$ Simple verficiación. $\triangleleft$

b) **Demuestra que $A = \mathrm{End}(V)$ si y solo si V es irreducible bajo G.**

$\triangleright$ Si V es irreducible entonces V^* también lo es, por lo que $V \otimes V^* = \mathrm{End}(V)$ es una representación irreducible de $G \times G$, así que $A = \mathrm{End}(V)$. Si V no es irreducible, con $W \subset V$ un subespacio G-invariante no trivial, entonces W es también A-invariante, por lo que $A \neq \mathrm{End}(V)$. $\triangleleft$

c) **En caso que V no es irreducible bajo G, ¿qué puedes decir acerca de A?**

[Nadie logró hacer este problema, aunque unos estaban cerca.]

$\triangleright$ La representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ se extiende a un homorfismo $G \times G$ equivariante $\mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ cuya imagen es justo A. Ahora, según Peter-Weyl, $\mathbb{C}[G]$ se descompone bajo $G \times G$ como $\bigoplus_\lambda V_\lambda \otimes V_\lambda^* = \bigoplus_\lambda \mathrm{End}(V_\lambda)$, i.e. sin multiplicidad. Así que A, la imagen de $\mathbb{C}[G]$, es también sin multiplicadad, y es simplemente la suma directa de los $\mathrm{End}(V_\lambda)$ para los λ que aparecen en la descomposición de V. Es decir, si $V = \bigoplus_\lambda m_\lambda V_\lambda$, entonces $A \cong \bigoplus_{m_\lambda > 0} \mathrm{End}(V_\lambda)$.

Se puede decir también cómo está encajado cada $\mathrm{End}(V_\lambda)$ en $\mathrm{End}(V)$. Digamos que V es la suma directa de m copias de un V_λ. Esto es, $V = V_\lambda \otimes \mathbb{C}^m$ (como G-representación). Entonces $\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}(V_\lambda) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$ (como $G \times G$-representación). Los subespacios irreducibles del último son de la forma $\mathrm{End}(V_\lambda) \otimes T$, para algun $T \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$, $T \neq 0$ (ejercicio 1.21 de las notas num. 1). En general, tenemos entonces que si $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda \otimes \mathbb{C}^{m_\lambda}$ entonces $A = \bigoplus_\lambda \mathrm{End}(V_\lambda) \otimes T_\lambda$, donde $T_\lambda \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{m_\lambda})$, y $T_\lambda \neq 0$ si $m_\lambda > 0$. $\triangleleft$

3. **Sea V una representación compleja de un grupo finito G.**

   a) **Demuestra que existe en V un producto hermitiano G-invariante.**

   [Todos entendieron bien este problema (promediar un prudcto hermitiano arbitrario) así que no lo hago.]

   b) **Demuestra que en caso que V es irreducible, el producto hermitiano del inciso anterior es único, salvo multiplicación por un escalar positivo.**

   $\triangleright$ Como se explicó antes, un producto hermitiano G-invariante no-degenerado, $h : V \times \bar{V} \to \mathbb{C}$, da un isomorfismo G-equivariante $I_h : \bar{V} \to V^*$. Si V es irreducible tambien lo son $\bar{V}, V^*$, así que por el lemma de Schur son todos múltiplos (complejos) uno del otro. Pero si h es hermitiano y $\lambda \in \mathbb{C}$, λh es hermitiano ssi $\lambda > 0$. $\triangleleft$

   c) **En caso que V no es irreducible, ¿qué puedes decir acerca del espacio de los productos hermitianos G-invariantes en V?**

   [Nadie lo logró, ni estaban cerca. . . Sospecho que igual como en el problema 2c, la razon es que nunca logré convencerles hacer el ejercicio 1.21 de las notas número 1, o aprender como usarlo. A ver si con esta explicación logro.]

   $\triangleright$ Suponemos que $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda \otimes \mathbb{C}^{m_\lambda}$ (descomposición en isotípicos, $m_\lambda \geq 0$ es la muiltiuplicidad de V_λ en V). Sea h un producto hermitiano G-invariante en V. Entonces (afirmación)

$$h = \bigoplus_\lambda h_\lambda \otimes H_\lambda, \qquad (*)$$

   donde h_λ es un producto hermitiano G-invariante en V_λ y H_λ es un producto hermitiano *arbitrario* en $\mathbb{C}^{m_\lambda}$.

   De hecho, para obtener a todos los productos hermitianos G-invariante en V, basta fijar los h_λ en fórmula (*) y solo variar los H_λ (los h_λ son únicos salvo multiplicación por escalar positivo, lo cual se puede "absorber" por los H_λ).

   Para demostrar la fórmula (*) hay que notar primero que esta fórmula define un producto G-invariante. Luego para demostrar que cualquer otro producto hermitiano G-invariante, digamos h', es de esta forma, hay usar el ejercicio 1.21 de las notas núm. 1, aplicado al endomorfimo G-equivariante $\overline{I_{h'}^{-1} I_h} \in \mathrm{End}(V)$.

   En resumen, si denotamos por $m_1, \ldots, m_k$ las multiplicidades de las representaciones irreducibles $\lambda_1 \ldots, \lambda_k$ (resp.) que aparacen en la descomposicion de V, y por $\mathcal{H}(m)$ al espacio de los productos hermitianos en $\mathbb{C}^m$ (ver más abajo), entonces el espacio de los productos hermitianos invariantes en V está parametrizado por $\mathcal{H}(m_1) \times \ldots \times \mathcal{H}(m_k)$.

Acerca de $\mathcal{H}(m)$: en $\mathbb{C}^m$, un producto hermitiano (positivo definido) está dado por una matriz compleja $m \times m$ que es hermitiana, ie $(\bar{H})^t = H$, y positiva definida (todos sus valores propios son positivos, o $v^t H \bar{v} > 0$ para todo $v \neq 0$). El conjunto de las matrices hermitianas es un subespacio vectorial real de dimension m^2 de $Mat_n(\mathbb{C})$ y las matrices positivas es un subconjunto del espacio de las matrices hermotianas que es convexo, abierto y cónico (invariante bajo multiplicación por escalares positivos). Otra descripción: El grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ actua en $Mat_n(\mathbb{C})$ por $g : H \mapsto gH\bar{g}^t$, y $\mathcal{H}(m)$ es justo la órbita de la matriz identidad. $\triangleleft$

4. **Descompón $\mathbb{C}^6$ en subespacios invariantes irreducibles bajo permutaciones cíclicas de las coordenadas,** $(x_1, \ldots, x_6) \mapsto (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

   [Todos lo hicieron bien así que omito la respuesta.]

5. **Construye la tabla de caracteres de los grupos A_4, S_4. Verifica que tus tablas satisfacen las relaciones de ortogonalidad de Schur.**

   Nota: $A_4 \subset S_4$ es el subgrupo de las permutaciones pares.

   Usa las tablas para

   a) **Determinar los duales de las representaciones irreducibles de estos grupos.**

   b) **Determinar la "tabla de multimplicación"de su anillo de representación (la descomposición de los productos tensoriales de representaciones irreducibles en irreducibles).**

   c) **Los mapas de restricción e inducción entre sus anillos de representación (la descomposición en representaciones irreducibles de A_4 de representaciones irreducibles de S_4 restringidas a A_4, y la descomposición en irreducibles de S_4 de representaciones irreducibles de A_4 inducidas a S_4). Verfica que estos mapas satisfacen Receprocidad de Frobenius.**

   [Este problema también todos lo hicieron muy bien por lo que no escribo la solución.]

6. *a*) **Descompón el espacio de las funciones complejas en las aristas de un tetraedro regular en subespacios irreducibles bajo (a) el grupo de isometrias del tetraedron (b) el grupo de rotaciones del tetraedro.**

   Nota: el primer grupo tiene 24 elementos y es isomorfo a S_4. El segundo son las isometrias con det=1, y es un subgrupo del primero con indice 2, isomorfo a A_4.

   [Aquí unos no dieron respuesta explicita, ie no dieron una decomposición de $\mathbb{C}^6$ sino la descomposición de la clase de equivalencia de la representación. Otros sí lo hicieron, pero con cuentas tediosas o adivinanzas. Aquí les muestro como hacerlo con un truco, aplicando cosas que aprendimos en el curso a una simple observación. A ver qué les parece.]

$\triangleright$ La observación es la siguiente. Cada arista α del tetraedro tiene su arista opuesta α' (la única arista que no es adyacente a α). Consideramos el mapa σ que manda una arista a su arista opuesta, $\sigma(\alpha) = \alpha'$. Claramente $\sigma^2 = id$ y σ es S_4-equivariante (pensando en S_4 como el grupo de isometrias del tetraedro, actuando en su conjunto de aristas). Así que lo mismo es cierto (S_4-equivariancia y $\sigma^2 = id$) con la acción de permutación asociada de σ en $V = \mathbb{C}^6$ (el conjunto de las funciones en las aristas del tetraedro).

Para aprovechar de esta observación, notamos que por el Lema de Schur, como las acciones de S_4 y σ en V conmutan, S_4 deja invariantes a los eigenespacios de σ. Estos últimos son fáciles de describir.

Denotamos a las aristas del tetraedro por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'$, y las coordenadas correspondientes en V por $(z_1, z_2, z_3, z_1', z_2', z_3')$, o aun más simple, por $(\mathbf{z}, \mathbf{z}')$, con $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3), \mathbf{z}' = (z_1', z_2', z_3') \in \mathbb{C}^3$. Con esta notación, $\sigma(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = (\mathbf{z}', \mathbf{z})$ y los eigen espacios de σ son $V_\pm = \{(\mathbf{z}, \pm\mathbf{z}) | \mathbf{z} \in \mathbb{C}^3\}$, con eigen valores ± 1 (resp.). Estos $V_\pm$ son entonces S_4-invariantes y nos queda descomponerlos en irreducibles.

Usando la descomposición "abstracta" de V (usando su caracter y las tablas de caracteres del problema anterior) es fácil ver que V es la suma directa de una representación trivial, una irreducible de dimension 2 y una irreducible de dimension 3. Ahora la trivial es claramente generada por $(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \in V_+$, con $\mathbf{z} = (1, 1, 1)$. Así que V_+ se descompone como subesapcio trivial 1-dimensional más uno irreducible de dimensión 2, dada por $\{(\mathbf{z}, \mathbf{z}) | \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3), z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ y V_- es irreducible.

Con esto terminamos la descomposición de V en subespacios irrreducibles bajo S_4. Bajo A_4, el problema anterior muestra que la representación irreducible de dimensión 2 de S_4 se descompone en dos representaciónes de dimensión 1. Para hacer esta descomposición haremos otra observación.

El grupo de isometrias del tetraedro actua naturalmene también en el conjunto de *pares de aristas opuestas*; esto es $X := \{\{\alpha_1, \alpha_1'\}, \{\alpha_2, \alpha_2'\}, \{\alpha_3, \alpha_3'\}\}$. Esto define un homomorfismo (suprayectivo) $S_4 \to S_3$ y la imagen de A_4 en S_3 bajo este homorfismo es $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$.

Luego, las funciones en V_+ asignan el mismo valor a una arista y su arista opuesta, así que se puede identificar a V_+ con $\mathbb{C}[X]$ (S_4-equivariamente).

En resumen, bajo A_4, la descomposición de $V_+ \cong \mathbb{C}^3$ coincide con la descomposición de $\mathbb{C}^3$ bajo permutaciones cíclicas de las coordenadas. Esto es similar a lo que hemos hecho en problema 4 (para $\mathbb{Z}_6$ en $\mathbb{C}^6$). El resultado es: sea $\omega = e^{2i\pi/3}$, $\mathbf{z}^0 = (1, 1, 1), \mathbf{z}^1 = (1, \omega, \bar{\omega}), \mathbf{z}^2 = \bar{\mathbf{z}}^1 \in \mathbb{C}^3$, $f^i = (\mathbf{z}^i, \mathbf{z}^i)$ y $V_+^i = \mathbb{C}f^i$, $i = 0, 1, 2$. Entonces bajo A_4, V_+ se descompone en 3 subespacios irreducibles 1 dimensionales, $V_+ = V_+^0 \oplus V_+^1 \oplus V_+^2$ y V_- queda irreducible. $\triangleleft$

b) **Usa el inciso anterior para resolver el siguiente problema: se marca cada una de las 6 aristas de un tetraedro regular con un número real. Luego, se sustituye cada uno de los números por el promedio de sus 4 vecinos. Al iterar este proceso 100 veces, ¿qué números esperarías encontrar en las artistas del tetraedro?**

$\triangleright$ La operación de promediar define una transformación lineal S_4-equivariante $P \in \mathrm{End}(V)$. Como V es una represntación sin multiplicidad, por el Lema de Schur, cada subespacio irreducible es un eigen espacio de P. Para determinar el eigenvalor basta dejar a P actuar en uno de los vectores del subespacio. Para el subespacio trivial $\mathbb{C}(1, \ldots, 1)$ el eigen valor es claramente 1. Para el subespacio irreducible 2 dimensional podmeos tomar por ejemplo $f = (\mathbf{z}, \mathbf{z})$, con $\mathbf{z} = (1, -1, 0)$, y obtenemos $Pf = (-1/2)f$. Para el 3 dimensional tomamos $f = (\mathbf{z}, -\mathbf{z})$ con $z = (1, 0, 0)$ y obtenemos $Pf = 0$. Así que para un $f \in V$ general, si descomponemos $f = f^1 + f^2 + f^3$, donde f^i es el componente de f en el subespacio irreducible de dimension i, $i = 1, 2, 3$, tenemos que $P^N f = f^1 + (-\frac{1}{2})^N f^2$, por lo que $P^N f \to f^1 = (c, \ldots, c)$, donde c es el promedio aritmético de los 6 valores de f. $\triangleleft$