Notas núm. 2

Nota: todas las representaciones son complejas, de dimesnión finita (a menos que diga otra cosa...).

Definición. Sea X un conjunto y G un grupo. Una **acción** de G en X es un homomorfismo ϕ entre G y el grupo de biyecciones $X \to X$. Se dice en este caso que X es un G-espacio.

O sea, para cada $g \in G$, $\phi(g) : X \to X$ es una biyección, $\phi(e) = id_X$ (la transformación identidad de X) y $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$. A veces se escribe simplemente gx en lugar de $\phi(g)(x)$, así que la regla $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$ es la "asociatividad" $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$.

Ejemplo. Una representación de un grupo es un caso especial de acción, una acción *lineal*, donde X es un espacio vectorial y cada $\phi(g)$ es una transformación lineal.

Definición. Dada una acción de un grupo G en un conjunto X, un **punto fijo** de un $g \in G$ es un $x \in X$ tal que $gx = x$.

Los puntos fijos de G son los puntos $x \in X$ que son fijos para todo $g \in G$. El conjunto de los puntos fijos de G se denota a veces por X^G. La acción es **libre** si ningun elemento $g \in G$, $g \neq e$, tiene puntos fijos.

La acción es **trivial** si $\phi(g) = id_X$ para todo $g \in G$ (o $X^G = X$).

La acción es **efectiva** si el kernel de ϕ es trivial (cada elemento $g \neq e$ "hace algo").

La acción es **transitiva** si para todo $x, y \in X$ existe un $g \in G$ tal que $gx = y$.

La **órbita** de un $x \in X$ es el conjunto $G \cdot x = \{gx | g \in G\} \subset X$. El **estabilizador** de un $x \in X$ es el conjunto $G_x = \{g \in G | gx = x\} \subset G$.

Definición. Para cada grupo G se definen tres acciones de G en G mismo: translaciones por la izquierda, por la derecha y conjungación. La translación por la izquierda por g manda $x \mapsto gx$, por la derecha manda $x \mapsto xg^{-1}$, y la conjugación manda $x \mapsto gxg^{-1}$.

→**2.1.** Verifica que las acciones de la última definición satisfacen las propiedades requeridas de ser acción. Determina cuales son los puntos fijos de la acciones, cuales son libres y triviales.

→**2.2.** Cada estabilizador $G_x \subset G$ es un subgrupo. Estabilizadores de puntos sobre la misma órbita son subgrupos conjugados. La relación "estar en la misma órbita" es una relación de equivalencia en X; las clases de equivalencia son las órbitas. Demuestra que $gG_x \mapsto gx$ define una biyección $G/G_x \to G \cdot x$.

Definición. Una función entre dos G-espacios $F : X \to Y$ es G-equivariante si $F(gx) = gF(x)$ para todo $g \in G$, $x \in X$.

→**2.3.** Demuestra que para todo subgrupo $H \subset G$, la acción de G en G por translaciones por la izquierda induce una acción de G en G/H, $g : xH \mapsto gxH$. Demuestra que la biyección $G/G_x \to G \cdot x$ del último ejercicio es G-equivariante.

→**2.4.** Considera la acción natural de $G = S_3$ (el grupo de permutaciones de $\{1, 2, 3\}$) en $X = \{1, 2, 3\}$ ($\phi(g) = g$). Encuentra las órbitas y los estabilizadores. Repite lo mismo para las acciones izquierda, derecha y conjugación de G en G.

→**2.5.** Sean G_1, G_2 dos grupos y X un conjunto. Demuestra que existe una biyección entre acciones de $G_1 \times G_2$ en X y pares de acciones ϕ_1, ϕ_2 de G_1, G_2 (resp.) en X que conmutan ($\phi_1(g_1) \circ \phi_2(g_2) = \phi_2(g_2) \circ \phi_1(g_1)$, para todo $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$).

Sugerencia: a un par de acciones de G_1, G_2 asociamos la acción de $G_1 \times G_2$ dada por la fórmula $(g_1, g_2)x = g_1(g_2 x)$.

<u>**Definición**</u>. Con una acción de G en X se asocia una representación ρ de G en $\mathbb{C}[X]$, el espacio de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$, llamada **la representación de permutación**, dada por $[\rho(g)f](x) = f(g^{-1}x)$.

→**2.6.** Demostrar que esta es una representación, de dimensión finita si y solo si X es un conjunto finito. Si X es finito, $\dim \mathbb{C}[X] = \#X$ (la cardinalidad de X). Una base para $\mathbb{C}[X]$ está dada por el conjunto $\{e_x | x \in X\}$ donde $e_x(y) = 1$ si $x = y$ y $e_x(y) = 0$ si $x \neq y$.

→**2.7.** Demuestra que $\rho(g)e_x = e_{gx}$.

La fórmula del último ejercicio sugiere idenificar $\mathbb{C}[X]$ con el conjunto de combinaciones lineales formales de elementos de X. Esto es, la función $f : X \to \mathbb{C}$ está denotada por $\sum_x f(x)x$. La ventaja de esta notación es que la representación de permutación asociada a una acción de G en X es simplemente "extender por linealidad"la acción en X a las combinaciones lineales de elementos de X.

<u>**Definición**</u>. Para un grupo finito G, $\mathbb{C}[G]$ se llama el **álgebra del grupo**. Definimos el producto hermitiano en $\mathbb{C}[G]$,

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_g \overline{\phi_1(g)} \phi_2(g).$$

→**2.8.** Esta definición es equivalente a declarar a la base $\{\sqrt{\#G} e_g | g \in G\}$ una base unitaria.

→**2.9.** Demuestra que las representación de $G \times G$ en $\mathbb{C}[G]$ asociadas con las acciones de translaciones izquierda y derecha de G en G son unitarias con respecto al producto hermitiano en el álgebra de G definido arriba.

Pensando en $\mathbb{C}[G]$ como "combinaciones lineales de elementos de G", podemos extender linealmente el producto $G \times G \to G$ a producto bilineal $\mathbb{C}[G] \times \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$. A este producto nos referimos cuando llamamos a $\mathbb{C}[G]$ el álgebra de G.

→**2.10.** Demuestra que $\mathbb{C}[G]$ es un álgebra conmutativo ssi G es conmutativo.

→**2.11.** Pensando en $\mathbb{C}[G]$ como funciones $G \to \mathbb{C}$, escribe explicitamente el producto. A este producto de funciones en G se llama a veces **convolución**, y se denota por $f_1 * f_2$.

<u>**Proposición**</u> **("las relaciones de ortogonolidad de Schur").** Sea ρ una representación irreducible compleja de un grupo finito G en un espacio vectorial V de dimensión finita, unitaria con respecto a un producto hermitiano invariante en V. Entonces

(A) Las n^2 componentes de ρ, con respecto a una base unitaria de V, satisfacen

$$\langle \rho_{ij}, \rho_{kl} \rangle = \frac{\delta_{ik}\delta_{jl}}{\dim V}.$$

(B) Si ρ' es otra representación irreducible compleja que no es equivalente a ρ, entonces todas sus componentes son ortogonales a todas las componentes de ρ.

Demostración: (idea) Para toda $T \in \mathrm{End}(V)$ se define $\langle T \rangle := \frac{1}{\#G}\sum_g \rho(g)T\rho(g^{-1})$ y se verifica que es G-equivariante. Así que, según el Lema de Schur, es un múltiplo de la identidad, $\langle T \rangle = \lambda I$. Tomando la traza de ambos lados, $\lambda = \mathrm{tr}T/\dim V$. Sea $v_1, \ldots, v_n$ una base unitaria y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ su base dual. Sea $E_{ij} \in \mathrm{End}(V)$ dada por $E_{ij}v = v_i\alpha_j(v)$. Ahora se calcula $\langle E_{ij} \rangle$ y se usa el hecho que es un múltiplo de la identidad. Para la segunda parte se hace algo similar con $T : V_1 \to V_2$ y $\langle T \rangle := \sum_g \rho_2(g)T\rho_1(g^{-1})$. □

Definición. Sea (ρ, V) una representación compleja de un grupo G. El **caracter** de la representación es la función $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ dada por $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}[\rho(g)]$, donde $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{C}$ es la traza (suma de las entradas del diagonal de la matriz que represnta a un operador lineal con respecto a una base de V).

→**2.12.** Demostrar:

- $\chi_\rho(e) = \dim V$.
- Si $g_1, g_2 \in G$ son elementos conjugados ($g_2 = hg_1h^{-1}$ para algun $h \in G$), entonces $\chi_\rho(g_1) = \chi_\rho(g_2)$.
- Los caracteres de representaciones equivalentes coinciden.
- $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$.
- $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1}\chi_{\rho_2}$.
- $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$.
- Si $H \subset G$ es un subgrupo, $\rho' = \rho|_H$, entonces $\chi_{\rho'} = \chi_\rho|_H$.

Nota: El converso de la tercera propiedad no es cierto. Por ejemplo, La representación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{C}^2$ dada por

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene el mismo caracter que la representación trivial. Sin embargo, veremos más tarde que para grupos *finitos* es cierto.

→**2.13.** Si un grupo G actua en un conjunto finito X y $(\rho, \mathbb{C}[X])$ es la representación asociada, entonces $\chi_\rho(g)$ es el número de puntos fijos de g en X.

Corolarios de las relaciones de ortogonalidad de Schur. Para un grupo finito G:

1. Una representación es irreducible ssi su caracter es un elemento unitario (de norma 1) en $\mathbb{C}[G]$.
2. Los caracteres de representaciones irreducibles no equivalentes son ortogonales uno al otro.
3. Dos representaciones (no necesariamente irreducibles) son equivalentes ssi sus caracteres coinciden.
4. El conjunto de caracteres de representaciones irreducibles forma un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{C}[G]$.
5. El número de clases de equivalencias de representaciones irreducibles es finito, acotado por el número de las clases de conjugación en G.

→**2.14.** Demostrar todas estos corolarios.

<u>**Definición**</u>. Consideramos la acción de $G \times G$ en G por translaciones por ambos lados; i.e. $(g_1, g_2) \cdot g = g_1 g g_2^{-1}$. Esto induce una representación de $G \times G$ en $\mathbb{C}[G]$ llamada la **representación regular**. La restricción de la representación regular a $G \times \{e\}$ (resp. $\{e\} \times G$) se llama la **representación regular izquierda** (resp. derecha).

Sea $\hat{G}$ el conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles complejas de G. Para cada $\pi \in \hat{G}$ sea

- ρ_π una representación en la clase π, en un espacio vectorial V_π de dimensión d_π;
- $\mathbb{C}[G]_\pi \subset \mathbb{C}[G]$ el suespacio generado por las componentes de ρ_π (con respecto a alguna base de V_π);
- χ_π el caracter de ρ_π.

Teorema. Bajo la acción regular de $G \times G$ en $\mathbb{C}[G]$, cada $\mathbb{C}[G]_\pi \subset \mathbb{C}[G]$ es invariante e irreducible, isomorfo a $\mathrm{End}(V_\pi) = V_\pi \otimes V_\pi^*$, y $\mathbb{C}[G] = \oplus_\pi \mathbb{C}[G]_\pi$.

Ojo con el significado de $\mathrm{End}(V_\pi) = V_\pi \otimes V_\pi^* \ldots$

Corolarios.

- $\#\hat{G} = \#(G/conj)$ (el número de clases de conjugación de G).
- $\#G = \sum_\pi d_\pi^2$.

<u>**Definición**</u>. Sea V un espacio vectorial complejo. El espacio vectorial conjugado $\overline{V}$ es el mismo conjunto de vectores pero la multiplicación por escalar (complejo) cambia: la nueva multiplicación por el escalar λ es la antigua multiplicación por el esacalar $\bar{\lambda}$. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces se denota por $\overline{T} : \overline{V} \to \overline{W}$ la *misma* función (y se verifique que sigue siendo lineal como transformación lineal $\overline{V} \to \overline{W}$.) Si (ρ, V) es una representación compleja se denota por $(\overline{\rho}, \overline{V})$ la representación $\overline{\rho}(g) = \overline{\rho(g)}$.

→**2.15.** Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base para V entonces es tambien base para $\overline{V}$. Si A es la matriz de una $T \in \mathrm{End}(V)$ con respecto a esta base entonces la matriz de $\overline{T}$, con respecto a la misma base, es $\overline{A}$ (conjugando todas las entradas de la matriz A).

→**2.16.** $\chi_{\overline{\rho}} = \overline{\chi_\rho}$.

→**2.17.** Una representación unitaria satisface $\overline{\rho} \sim \rho^*$.
Sugerencia: el isomorfismo está dado por $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$.

→**2.18.** Sean (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) dos representaciones irreducibles de G_1, G_2 (resp). Se define su producto

Tablas de caracteres de grupos finitos.
Las columnas (verticales) estan etiquetadas por las representación irreducibled. Las filas (horizontales) por las clases de conjugación. Se forma un cuadrado.

(Actualizado: 24 sept, 2013).