Notas núm. 3

Tablas de caracteres de grupos finitos.

Las columnas están etiquetadas por las clases de equivalencia de representaciones irreducibles $\pi \in \hat{G}$. Las filas por las clases de conjugación del grupo $c \in G/conj$. Se forma un "cuadrado mágico". Nos gusta tambien agregar a un lado de la columna de las clases de conjugacion c la lista de sus cardinalidades $|c|$. A veces agregamos tambien una columna de una representacion redicible que nos ayuda a llenar la tabla.

Ejemplo. $G = S_3$.

c	$\lvert c\rvert$	1	signo	$\mathbb{C}^2$	$\mathbb{C}^3$
1	1	1	1	2	3
(12)	3	1	-1	0	1
(123)	2	1	1	-1	0

Explicación.

- En la primera columna aparece una lista de las clases de conjugación del grupo (un representante de cada clase). En la segunda columna el número de elementos de cada clase. En la primera fila (entre las dos doble-líneas verticales $\|$) aparece una lista de las representaciones irreducibles: "1" es la representación trivial (en $\mathbb{C}$), "signo" es la representación de dim=1 que asigna 1 a las permutaciones pares y -1 a las impares. $\mathbb{C}^2$ es la representación irreducible de dim=2 (solo hay una). $\mathbb{C}^3$ es la representación asociada a la acción natural de S_3 en $\{1, 2, 3\}$. Esta no es irreducible pero es útil porque es fácil calcular su caracter (contando el número de puntos fijos de una permutación) y tenemos que $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \oplus 1$, por lo que podemos calcular el caracter de $\mathbb{C}^2$. Pero también se puede calcular el caracter de $\mathbb{C}^2$ puramente de las propiedades generales de la tabla de caracteres.
- La relación de ortogonalidad $\langle \chi_\pi, \chi_{\pi'} \rangle = \delta_{\pi\pi'}$ se traduce a

  $$\sum_c |c|\chi_\pi(c)\chi_{\pi'}(c) = \delta_{\pi\pi'}|G|.$$

  (Nota: $|G|$ es la cardinalidad de G).

  Esta es una relación de ortogonalidad entre las columnas de la tabla.

- Si multiplicamos cada entrada $\chi_\pi(c)$ de la tabla por $\sqrt{|c|/|G|}$ obtenemos una maztriz cuyas *columnas* forman una base unitaria, o sea matriz unitaria, así que sus *filas* forman también una base unitaria. Esto da una relación de ortogonalidad entre las filas de la tabla.
$$\sum_\pi \chi_\pi(c)\chi_\pi(c') = \delta_{cc'}\frac{|G|}{|c|}.$$

→**3.1.** Verificar en la tabla de S_3 la relacion de ortogonalidad entre las filas.

→**3.2.** Construir las tablas de caracteres de los siguientes grupos: S_4, A_4 (el subgrupo de S_4 de permutaciones pares), $\mathbb{Z}_n$, D_n (el grupo de isometrias de un polígono regular de n lados), Q_8 (el grupo de cuaterniones $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$).

Definición. El **anillo de representaciones** del grupo, $R(G) = \mathbb{Z}[\hat{G}]$, es el anillo abeliano generado por los elementos de $\hat{G}$ con la suma dada por suma directa y producto dado por el producto tensorial. Los elementos de $R(G)$ se llaman a veces **representaciones virtuales**. Las representaciones "verdaderas" son las combinaciones lineales con coeficientes enteros no-negativos.

La asignacón de caracter a una representación, $\rho \mapsto \chi_\rho$, define un homomorfismo (encaje) de $R(G)$ en $\mathbb{C}[G/conj] = \mathbb{C}[G]^{cong}$, con el producto usual de funciones. Así podemos pensar en $R(G)$ como el conjunto de combinaciones lineales con coeficientes enteras de los caracteres de representaciones irreducibles, con la suma y producto ordinario de funciones.

Por ejemplo, para $G = S_3$, denotamos $\sigma =$ signo, $\lambda = \mathbb{C}^2$. Entonces tenemos $R(S_3) = \{a + b\sigma + c\lambda | a, b, c \in \mathbb{Z}\}$, y de la tabla de caracteres el producto determinado por las relaciones, $\sigma^2 = 1, \sigma\lambda = \lambda$, $\lambda^2 = 1 + \sigma + \lambda$.

→**3.3.** Demostrar el último inciso.

→**3.4.** Encontrar los anillos de representaciones para los grupos vuyos tablas de caracteres calculaste en ejercicios anteriores.

→**3.5.** Descomponer en irreducibles la representación de S_n en $\mathbb{C}^n$ dada por permutación de las coordenadas.

Nota: la respuesta es que hay dos irreducibles; una es la trivial $\mathbb{C}(1, \ldots, 1)$, la otra $\{\sum z_i = 0\}$. Se puede demostrar sin gran dificultad que el segundo es irrreducible directamente de la definicion de irreducible (empiezas con un vector con dos coordenadas diferentes y ves que su orbita bajo

S_n genera a todo el subespacio). Demostrandolo con teoria de caracter, ie calculando que $\|\chi\|^2 = 2$, me resulta demasiado dificil, pero si alguien lo logra nos avisa por favor.

Definición. Dada una representación V, definimos a $S^k(V)$, la k-esima potencia simétrica de V, como el subespacio de $V \otimes \ldots \otimes V$ (k veces) de los elementos que quedan fijos bajo la representación de S_k que permuta a los factores: $\sigma \cdot [v_1 \otimes \ldots \otimes v_k] = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$. Tambien definimos a $\Lambda^k(V)$, la k-sima potencia exterior (o alternante) de V, como el subespacio de tensores que satifacen $\sigma \cdot T = signo(\sigma) T$.

→**3.6.** Sea $\dim V = n$. Encuentra la dimensión de $\Lambda^k(V)$ y $S^k(V)$

→**3.7.** $V \otimes V = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$ (suma directa de representaciones).

→**3.8.** Calcula $S^2(\lambda), \Lambda^2(\lambda) \in R(S_3)$.

Sugerencia: Tenemos que $\lambda^2 = S^2(\lambda) + \Lambda^2(\lambda)$. Ahora para cualquer representación ρ de dimensión n, $\Lambda^n(\rho) = det(\rho)$ (la representación unidimensional que manda $g \in G$ a $\det(\rho(g))$). Ahora demuestra que $\det(\lambda) = \sigma$ así que $S^2(\lambda) = 1 + \lambda$.

→**3.9.** $S^k(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{p+q=k} S^p(V_1) \otimes S^q(V_2)$. Mismo para la potencia exterior.

→**3.10.** Sea V una representación compleja de un grupo G. Una función $p : V \to \mathbb{C}$ es **polinomial homogenea** de grado d si es polinomial homogenea de grado d cuando la expresamos en coordenadas con respecto a una base en V. Demuestra que esta definición no depende de la base en V que usamos. Sea $H_d \subset \mathbb{C}[V]$ el subespacio de todas las funciones en V que son polinomiales homogeneas de grado d. Demuestra que H_d es un subespacio invariante bajo la representación de permutación de G en $\mathbb{C}[V]$ ($p(z) \mapsto p(g^{-1} \cdot z)$). Finalmente, demuestra que existe un isomorfismo canónico de representaciones entre H_d y $S^d(V^*)$ (intenta definir rigurosamente "canónico").

→**3.11.** Calcula $\lambda^n, S^n(\lambda) \in R(S_3)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

→**3.12.** Sea $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ el espacio de polinomios en 3 variables con coeficientes complejas, equipado con la representación de permutación de S_3, asociada con la acción en $\mathbb{C}^3$ que permuta las coordenadas. Encuentra la descomposición en irrducibles de $H_d \subset \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ (el subespacio de polinomios homogeneos de grado d). Sugerencia: $H_d = S^d(V_1)$ y

$V_1 = 1 + \lambda$.

Nota: "encontrar la descomposición en irreducibles" de una representación V tiene dos sentidos distintos. El primero significa encontrar subespacios invariantes irreducibles $V_i \subset V$ tal que V es la suma directa de los V_i's. El segundo es escribir a la clase de V en $R(G)$ como combinación lineal de elementos de $\hat{G}$, o sea encontrar la clase de equivalencia de cada V_i, sin encontrar los V_i's mismos. La segunda tarea es mucha más fácil que la primera, usando la tabla de caracteres del grupo y la estrucura de $R(G)$.

(Actualizado: 29 sept, 2013).