Notas núm. 1

29 ene, 2013

Los ejercicios están marcados con →.

1. Repaso de cálculo diferencial en $\mathbb{R}^n$

Definiciones. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.

- Una función $f : U \to \mathbb{R}$ es *suave* (o C^∞) si todas sus derivadas parciales, de cualquier orden, existen. El conjunto de las funciones suaves en U se denota por $C^\infty(U)$.
- Una función $F : U \to V$, donde $V \subset \mathbb{R}^m$ es abierto, es suave, si sus m componentes $F_1, \dots, F_m$ son suaves.
- F es un *difeomorfismo* si es biyectiva con inversa suave.
- La *derivada* (o *diferencia*l) de F en un punto $p \in U$ es la transformación lineal $dF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cuya matriz, con repecto a las bases canónicas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, es $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)\right)$. La derivada de F es la función $dF : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $dF(p, \cdot) = dF(p)$. $\square$

Teoremas

- Toda función suave es contínua.
- Toda función constante es suave y su derivada es nula.
- El conjunto $C^\infty(U)$ es cerrado bajo combinaciones lineales y productos; $d(af + bg) = adf + bdg$, $d(fg) = (df)g + f(dg)$ para todo $f, g \in \mathbb{C}^\infty$, $a, b \in \mathbb{R}$.
- Toda transformación lineal $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es suave y su derivada $dF(p)$ es ella misma para todo $p \in \mathbb{R}^n$.
- La restricción de una función suave $F : U \to V$ a un abierto $U_1 \subset U$ es suave, y la derivada de la restricción es la restricción de la derivada a $U_1 \times \mathbb{R}^n$.
- Las derivadas parciales de una función suave no dependen del orden en que se aplican: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
- La composición de funciones suaves $G : U \to U'$, $F : U' \to U''$ es suave y se tiene que $d(F \circ G)(p) = dF(G(p)) \circ dG(p)$ para todo $p \in U$ (la regla de la cadena).
- Si la derivada de F en un punto $p \in U$ es un isomorfismo lineal entonces F es un difeomorfismo local alrededor de p (existe una vecindad $U_1 \subset U$ de p tal que F restrigida a U_1 define un difeomorfismo $U_1 \to F(U_1)$).
- Teorema de Taylor…
- Teorema de la función implicita…

Todos estos teoremas los suponemos. Se encuentran en cualquer libro de cálculo vectorial (e.g. Courant y John, vol. 2).

→ **Ej.1.** Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Demuestra que F es suave y calcula su derivada en $p = (1, \pi/4)$. Encuentra una vecindad maximal U de p tal que la restricción de F a U define un difeomorfismo $U \to F(U)$.

→ **Ej.2.** Cierto o falso: una función suave $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que todas sus derivadas parciales se anulan en $0 \in \mathbb{R}^n$ es una función constante.

2. Cohomología de de Rham en $\mathbb{R}^n$

Definición. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y k un entero, $0 \le k \le n$.

- Una *forma diferencial en U de grado k* (o una k-forma) es una combinación lineal formal $\alpha = \sum_I f_I dx_I$, donde $f_I \in C^\infty(U)$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$. El conjunto de las k-formas se denota por $\Omega^k(U)$. Luego, $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ y $\Omega^*(U) = \bigoplus_k \Omega^k(U)$ es una *álgebra asociativa* (i.e. un espacio vectorial con un producto bilineal asociativo), donde la multiplicación se genera por la regla $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. (Nota: en unos textos, como el Bott-Tu, se omita el símbolo de la cuña $\wedge$).
- La *derivada exterior* es un operador lineal $d : \Omega^k \to \Omega^{k+1}$ dado por las reglas (1) $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, para todo $f \in \Omega^0$, (2) $d(\sum_I f_I dx_I) = \sum_I df_I dx_i$. ($d|_{\Omega^n} = 0$).
- $\alpha \in \Omega^k$ es *cerrada* si $d\alpha = 0$ y es *exacta* si existe una $\beta \in \Omega^{k-1}$ tal que $\alpha = d\beta$. (Así que todas las n formas son automáticamente cerradas).
- Una n-forma nunca nula se llama tambien una *forma de volumen.*

□

→ **Ej.3.** Escribe explicitamente la derivada exterior para formas de grado $k = 1, 2$ en $\mathbb{R}^n$, para $n = 2, 3, 4$.

→ **Ej.4.** Encuentra una $(n-1)$-forma $\beta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ que sea (1) cerrada (2) su integral sobra la esfera unitaria no se anula. (Sugerencia: intenta $\beta = r^\lambda \beta_1$, donde $d\beta_1$ es la forma de volumen $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

→ **Ej.5.** Demuestra que $d^2 = 0$. Concluye que toda forma exacta es cerrada. Demuestra que el converso es cierto en $U = \mathbb{R}^n$ pero que no es cierto en general. (Sugerencia: considera a $(xdy - ydx)/(x^2+y^2) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$).

Definición. Denotamos a las formas cerradas en U por $Z^k(U)$ y a las exactas por $B^k(U)$. El ejercicio anterior implica que $B^k \subset Z^k$. Se define a la cohomología de de Rham de U por $H^k(U) = Z^k(U)/B^k(U)$.

→ **Ej.6.** Demuestra que $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ donde k es el grado de α. Concluye: el producto cuña de formas induce un producto de clases de cohomología: $[\alpha] \smile [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$ (se llama el producto "cup" en cohomología).

Definición. Sea $F : U \to V$ una unción suave, donde U, V son abiertos en espacios euclideanos. Se define el "pull-back" $F^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ por las reglas (1) $F^*(\sum_I g_I dy_I) = \sum_I (g_I \circ F) F^*(dy_I)$, (2) $F^*(dy_I) = (F^* dy_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (F^* dy_{i_k})$, y (3) $F^* dy_i = dF_i$.

→ **Ej.7.** Demuestra que (1) $F^* : \Omega^*(V) \to \Omega^*(U)$ es un homomporfismo de álgebras (es lineal y $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta)$. (2) $F^* \circ d = d \circ F^*$. (3) Si $F : U \to V$, $G : V \to W$ son suaves entonces $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$. (4) Para $Id : U \to U$, Id^* es la identidad de $\Omega^*(U)$. Concluye: (1) F^* induce un homomorphismo de álgebras $H^*(V) \to H^*(U)$. (2) Si F es un difeomorfismo $F^* : H^*(V) \to H^*(U)$ es un isomorfismo.

→ **Ej.8.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $F : U \to \mathbb{R}^n$ suave. Entonces $F^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = J_F dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, donde $J_F = \det(dF)$.

→ **Ej.9.** Calcular la cohomologia de de Rham de los siguientes espacios (intenta primero sin mirar texto; luego puedes consultar Bott-Tu o Madsen): (1) $\mathbb{R}$ (2) union finita de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ (3) $\mathbb{R}^n$ (4) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (5) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(Fin de notas núm. 1).