Tarea num. 4

24 abril, 2013

1. Determina la cohomologia de deRham de $\mathbb{C}P^n$. Esto es:

   a) Sea $b_k = dim(H^k_{DR}(\mathbb{C}P^n))$. Demuestra que $b_0 = b_2 = \ldots = b_{2n} = 1$, el resto 0.

   Sugerencias: por inducción, usando Mayer-Vietoris para la cubierta $\mathbb{C}P^n = U \cap V$, donde U está dado en coordenadas homogeneas $z_0, z_1, \ldots, z_n$ por $z_0 \neq 0$ y V es el complemento en $\mathbb{C}P^n$ de un punto en U. Demuestra que U es difeomorfo a $\mathbb{C}^n$ y V a un haz con fibra $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}P^{n-1}$.

   b) Sea $\Omega = i(\sum_{i=0}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i) \in \Omega^2(\mathbb{C}^{n+1})$. Demuestra que como un generador de $H^2(\mathbb{C}P^n)$ se puede tomar a la "forma de Kahler"ω: el pull-back de ω bajo la fibración de Hopf $\pi : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^n$ está dado por la restriccón de Ω a S^{2n-1}.

   Sugerencias: las fibras de π son las órbitas de la acción de S^1 en S^{2n-1} por multiplicación por escalares complejos unitarios. Demuestra que en general, si las fibras de $\pi : Y \to X$ son las órbitas de una acción de un grupo de Lie G en Y, entonces una k-forma α en Y es básica con respecto a π, ie el pull back de una forma en X, ssi (i) es semi-básica, i.e. $\alpha(X_1, \ldots, X_k) = 0$ si uno de los X_i es tangente a la fibra; (ii) es G-invariante.

   Luego, demuestra que ω es *simpléctica*, ie una forma cerrada, que en el tangente de cada punto de $\mathbb{C}P^n$ define una forma bilineal antisimétrica *no degenerada*. Así que ω^n es una forma de volumen (una $2n$-forma nunca nula), por lo que $\int_{\mathbb{C}P^n} \omega^n \neq 0$, así que $[\omega] \neq 0 \in H^2(\mathbb{C}P^n)$.

   c) Como álgebra, $H^*_{DR} = \mathbb{R}[x]/x^{n+1}$ (el álgebra de polinomios en x con coeficientes reales, módulo el ideal de polinomios de grado $> n$), donde $x \in H^2$ es el dual de Poincaré de un "hiperplano"H, i.e. una subvariedad de codimensión 2, difeomorfa a $\mathbb{C}P^{n-1}$, dada en coordenadas homogeneas $z_0, z_1, \ldots, z_n$, por la ecuación $z_n = 0$, o el kernel de cualquer funcional lineal no nulo en $(\mathbb{C}^{n+1})^*$. Más general, x^k, $k = 1, \ldots, n-1$, es el dual de Poincaré de una subvariedad difeomorfa a $\mathbb{C}P^{n-k}$, dada por el kernel comun de k funcionales lineales linealmente independientes.

   d) x del inciso anterior es un múltiplo de la clase de la forma de Kahler ω. Encuentra el múltiplo.

2. Problemas del libro: 6.10 (p.59), 6.20 (p. 65), 6.43, 6.44 (p. 75).