Parcial núm. 2 – Soluciones y problemas adicionales

1. La gráfica de $y = f(x)$ es una parábola con vértice en $(1, 1)$. Encuentra el vértice de $y = f(x - 2) - 4$.

   Solución.
   [Ver problema 2 de la tarea 5 y problema 2 de la tarea 7]
   La regla general es la siguiente: si tenemos la gráfica de una función $y = f(x)$, la gráfica de $y = f(x-a)$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ moviendola $|a|$ unidades a la *derecha* si $a > 0$, y $|a|$ unidades a la *izquierda* si $a < 0$. Luego, la gráfica de $y = f(x) + b$ se obtiene de la de $y = f(x)$ moviendola $|b|$ unidades hacia *arriba* si $a > 0$, y $|b|$ unidades hacia *abajo* si $a < 0$.

   Así que, en nuestro caso, la gráfica de $y = f(x-2)-4$ se obtiene de la gráfica de $y = f(x)$ moviendola (con todo y vértice) 2 unidad a la derecha y 2 unidades hacia abajo. El nuevo vértice esta entonces en $(3, -3)$. □

   Problema adicional. La gráfica de $y = f(x)$ se obtiene de la gráfica de $y = x^3 - 1$ moviendola 3 unidades hacia arriba y 3 unidades hacia la derecha. Encuentra una fórmula explicita para la función $y = f(x)$.

2. Encuentra el dominio de definición de la función $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-x^2}}$.

   Solución.
   [Ver problema 1a de la tarea 5]
   El dominio de una función $y = f(x)$ es el conjunto de valores de la variable x para los cuales la función está bien-definida. En nuestro caso, tenemos dos restricciones sobre los valores de x: (1) $x^2 - 1 \geq 0$, y (2) $4 - x^2 > 0$. La primera restricción implica que $x \geq 1$ ó $x \leq -1$, la segunda que $-2 < x < 2$. Para satisfacer ambas condiciones, tenemos que tomar la intersección de estos dos conjuntos. Esto nos da el conjunto $(-2, -1] \cap [1, 2)$. □

   Problema adicional. Encuentra el dominio de definición de la función

   $$y = \frac{\sqrt{4 - x^2 + 3x}}{x^{2014}\sqrt{1 + x^{133}}}.$$

3. Se sabe que $2x + 3$ divide al polinomio $2x^3 + 7x^2 + 8x + c$. Encuentra el valor de c.

   Solución.
   [Ver problema 2 de la tarea 8]
   Se puede hacer la división, intentando "ajustar"la c para que salga un residuo 0. Pero hay otra manera, más eficiente (e interesante), usando la misma idea que usamos para obtener el llamado "teorema del residuo"(el residuo de la división de $p(x)$ por $x - a$ es $p(a)$). La idea es la siguiente: cuando dividimos un polinomio $p(x)$ entre otro polinomio $q(x)$ y nos da como resultado un polinomio cociente $c(x)$ con residuo $r(x)$, esto significa que (1) el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, y (2) $p(x) = q(x)c(x) + r(x)$ (ver la introducción de la tarea 8).

   En nuestro caso, $p(x) = 2x^3 + 7x^2 + 8x + c$ y $q(x) = 2x + 3$, así que $r(x)$ tiene grado 0, o sea es una constante, digamos R. Tomamos la raíz de $q(x)$. Esto es, la solucion de $2x + 3 = 0$. Esta es $x = -3/2$. Si sustituimos este valor en la ecuación $p(x) = q(x)c(x) + R$, obtenemos que $p(-3/2) = R$. Así que la condición para que $2x + 3$ divida a $p(x)$ ($R = 0$), se traduce a $p(-3/2) = 0$. Ahora calculamos $p(-3/2) = 2(-3/2)^3 + 7(-3/2)^2 + 8(-3/2) + c = c - 3$. Así que la condición que $2x + 3$ divida a $p(x)$ es que $c - 3 = 0$, o $c = 3$. □

Problema adicional. Encuentra los valores de c para los cuales $2x + 1$ divide al polinomio $x^5 + cx^4 + c + 1$.

4. Encuentra la imagen (conjunto de valores) de la función $f(x) = x^2 + 2$, restringida al conjunto $-1 \leq x \leq 2$.

   Solución.
   [Ver el problema 1a de la tarea 5.]
   Recordamos: la imagen de una función $y = f(x)$, es el conjunto de todos los valores posibles $f(a)$, donde a es cualquier elemento del dominio de la función (el intervalo $[-1, 2]$ en nuestro caso).

   No hay una "receta general" para determinar este conjunto, más que entender bien lo que significa esta definición. En nuestro caso, lo más simple talvez es observar con cuidado la gráfica de la función $y = x^2 + 2$. Esta es una parábola, abriendo hacia arriba, con vértice en $(0, 2)$. Mirando esta gráfica, vemos que cuando x varia (incrementando) entre -1 y 0, la y varia (bajando) entre $f(-1) = 2$ y $f(0) = 1$. Luego, cuando x varia entre 0 y 2, la y varia (subiendo) entre $f(0) = 2$ y $f(2) = 6$. Así que cuando la x recorre todos los valores del dominio, de $x = -1$ hasta $x = 2$, la y obtiene a todos los valores entre 2 y 6 (algunos de ellos los obtiene 2 veces, pero esto no importa para fines de la imagen de la función). Así que la respuesta es el intervalo de números $[2, 6]$. $\square$

   Problema adicional. Encuentra la imagen de la función $y = (x^2 - 1)^2$, restringida al conjunto $-1 < x \leq 3$.

5. Tenenmos la funcion $f(x) = x^2 + x$. Encuentra los valores de a tal que $f(a) = 6$.

   Solución.
   [Ver problema 1b de la tarea 4, inciso (ii)].
   Esto es, hay que resolver la ecuación $a^2 + a = 6$, la cual es la ecuación cuadrática $a^2 + a - 6 = 0$. Usando la fórmula general (o factorizando el lado izquierdo), obtenemos las dos soluciones: $a = 2$ y $a = -3$. $\square$

   Problema adicional. Tenenmos la funcion $f(x) = x^3 + x$. Encuentra los valores de x tal que $f(x) \leq x^2$.

6. La función $f(x) = x^2 + 3$ es un ejemplo de una
   a) Función par
   b) Funcion polinomial
   c) Función cuadrática
   d) Las tres respuestas de arriba son ciertas
   e) Solo las respuestas (b) y (c) arriba son correctas.

   Solución. Una función par es una función $y = f(x)$ tal que $f(x) = f(-x)$ para todo x (en el dominio de la función). En nuestro caso, $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$, así que f es una función par (nota que el cuadrado de cualquer número es igual al cuadrado de su negativo). Además, f es un polinomio, de grado 2 (esto es lo que significa "cuadrática"). Así que la respuesta correcta es (d). $\square$

   Problema adicional. La misma pregunta para la función $f(x) = x^3 + 3$.

7. La sucesión de números $1, 9, 21, 37, 61, \ldots$ se obtuvo al evaluar un polinomio en una lista de enteros sucesivos. Encuentra el siguiente valor de la sucesión.

   [Nota agregada después del examen: en este problema habian 2 errores. Primero, el último número dado debería ser 57, y no 61. Luego, se debería agregar la palabra "cuadrático"depués de la palabra "polinomio"; sin esta condición es imposible saber el siguiente término.]

   Solución.
   [Ver problema 4 de la tarea 7]

Como hemos visto en clase, si evaluamos un polinomio cuadrático en una lista de números enteros sucesivos, y luego calculamos la sucesión de las diferencias sucesivas de estos valores, lo que obtenemos siempre es una *progresión aritmética*, o sea una lista de números con diferencias sucecivas *constantes*. Si aplicamos este procedimiento a la lista (corregida) de los números dados en el problema, obtenemos la lista $8, 12, 16, 20$, la cual es una progresión aritmética con diferencia constante 4. El siguiente término es entonce $20 + 4 = 24$, por lo que el siguiente término en la sucesion original es $57 + 24 = 81$. □

Problema adicional. La suceción $3, 4, 11, 30, \ldots$ se obtuvo al evaluar un polinomio cúbico en la lista de enteros impares, $x = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$. Encuentra el siguiente término de la sucesión.

8. Encuentra los números x tal que $x^{-2} + x^{-1} = 6$.

   Solución. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por x^2. Obtenemos $1 + x = 6x^2$, o mejor $6x^2 - x - 1 = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática obetenemos dos soluciones: $x = 1/2$ y $x = -(1/3)$. □

   Problema adicional. Encuentra los números x tal que
   $$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x-3}.$$

9. ¿Para qué valor de k las rectas $3x - y = 9$ y $kx + 3y = 5$ son paralelas?

   Solución. Dos rectas son paralelas si tienen la mimsa pendiente. Para determinar la pendiente de una recta dada por una ecuación lineal, es cómodo esribir la ecuación en la forma $y = mx + b$, y entonces la coeficiente de la x (la m) es la pendiente. En nuestro caso las ecuaciones son $y = 3x - 9$ y $y = (-k/3)x + 5$. Sus pendientes son entonces 3 y $-k/3$ (resp.). Igualando las coeficientes de la x en las dos ecuaciones, obtenemos la ecuación $-k/3 = 3$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos $k = -9$. □

   Problema adicional. ¿Para qué valor de c las rectas $cx + y = 1$ y $x + cy = 1$ son paralelas?

10. Tenemos dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$. Se sabe que $f(x) = 2x + 3$ y que $f(g(1)) = 5$. ¿Cuáles de las siguiente funciones puede ser $g(x)$?

    (a) $x + 1$ (b) $2x + 1$ (c) $2x - 1$ (d) $x - 1$ (e) $3x - 4$

    Solución. Llamemos c al valor $g(1)$. Entonces c satiface $f(c) = 2c + 3 = 5$. Esto es, $c = 1$. Así que buscamos una función $g(x)$ tal que $g(1) = 1$. Evaluando $g(1)$ para cada una de las 5 opciones de $g(x)$ que nos dan, vemos que la única opcion que da $g(1) = 1$ es la (c). □

    Problema adicional. Tenemos dos funciones lineales (polinomios de grado 1) $y = f(x)$ y $y = g(x)$. Se sabe que $f(x) = 2x + 3$, que $f(g(0)) = 1$ y que $g(f(0)) = 2$. Encuentra una fórmula para $g(x)$.

    (Sugerencia: $g(x) = ax + b$ para algunos números a, b. Usar la información dada para escribir un sistema de dos ecuaciones para las incognitas a, b y resolvelo.

Extra Crédito.

1. Decide, sin hacer la división, si el polinomio $x^2 - 1$ divide al polinomio $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x - 4$.

   Solución. La idea es similar al problema 3 arriba. Si un polinomio $q(x)$ divide a otro polinomio $p(x)$ esto significa (por definición) que $p(x) = q(x)c(x)$ para algun polinomio $c(x)$. Sustituyendo en esta ecuación las raices de $q(x)$, vemos que *si $q(x)$ divide a un polinomio $p(x)$, entonces todas las raices de $q(x)$ son necesariamente raices de $p(x)$.*

   [Ojo: el converso es más delicado y no es cierto en general. Por ejemplo, $q(x) = x(x^1 + 1)$ tiene una sola raíz, $x = 0$. El polinomio $p(x) = x$ tiene esat raíz tambien. Sin embargo, es claro que $q(x)$ no divide a $p(x)$ (tiene grado mayor que $p(x)$ así que no lo puede dividir).]

En nuestro caso, $q(x) = x^1 - 1$ tiene dos raices, $x = 1$ y $x = -1$ (resolviendo la ecuación $x^2 - 1 = 0$). Para ver si son raices de $p(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x - 4$, evaluamos: $p(1) = 0$, $p(-1) = -2$. Así que $x = -1$ es una raíz de $q(x)$ que no es una raíz de $p(x)$. Conclusión: $q(x)$ no divide a $p(x)$. $\square$

2. Encuentra un valor de c tal que la recta $y = 2x + c$ sea tangente a la gráfica de $y = x^2 - 2x + 3$.

   Solución. Una recta es tangente a una curva si la intersecta en un solo punto. Esto es, el par de ecuaciones $y = 2x + c, y = x^2 - 2x + 3$ debe tener una sola solución. Eliminando la y, obtenemos la ecuación $2x + c = x^2 - 2x + 3$, o $x^2 - 4x + (3 - c) = 0$. Para que esta ecuación cuadrática tenga una solución necesitamos que su descriminante se anule: $\Delta = (-4)^2 - 4(3 - c) = 4 + 4c = 0$ La solución de esta ecuación para c es $c = -1$. $\square$

3. La bomba A vacia la alberca en 3 horas. La bomba B la vacia en 4 horas. Poniendo las dos bombas trabajar juntas, ¿en cuánto tiempo vacian la mitad de la alberca?

   Solución. Una una hora la bomba A vacia 1/3 de albera y la bomba B vacia 1/4 de alberca. Juntas, vacian en una hora $1/3 + 1/4 = 7/12$ de alberca $\Longrightarrow$ en 1/7 de hora vacian 1/12 de alberca $\Longrightarrow$ en 6/7 de hora vacian $6 \cdot (1/12) = 1/2$ alberca. Respuesta: 6/7 hora = (6/7)60 min $\approx$ 51 min + 19 seg.

4. Encuentra la suma de los primeros 40 enteros positivos impares. $S = 1 + 3 + \ldots$.

   Solución. Es una progresión aritmética con diferencia $d = 1$ y término inicial $a_1 = 1$. La fórmula general $a_n = a_1 + (n - 1)d$ implica que $a_{40} = 1 + 39 \cdot 2 = 79$. La fórmula general para la suma de los primeros n términos es $s_n = (a_1 + a_n)n/2$. En cuentro cas, $s_{40} = (1 + 79)40/2 = 1600$. $\square$

5. Encuentra el último dígito de 3^{30}.

   Solución. $3^{30} = 3^{4 \cdot 7 + 2} = (3^4)^7 3^2 = (81)^7 9$. La clave ahora es observar que para saber el último dígito del producto de dos enteros $a \cdot b$, solo es necesario saber los últimos d'gitos de cada uno de los factores a y b. Así que 81^7 termina con 1, por lo que $3^{30} = (81)^7 9$ termina con 9. $\square$

6. Tenemos que $A = \left(1 - \frac{x}{y}\right)$, $B = \left(y - \frac{x^2}{y}\right)$. Simplifica A/B.

   Solución.

$$\frac{A}{B} = \frac{1 - \frac{x}{y}}{y - \frac{x^2}{y}} = \frac{y\left(1 - \frac{x}{y}\right)}{y\left(y - \frac{x^2}{y}\right)} = \frac{y - x}{y^2 - x^2} = \frac{y - x}{(y - x)(y + x)} = \frac{1}{y + x}.$$

$\square$