

# Aplicaciones en física y geometría

## 4.1 Teoría de curvas planas

### a. Representación paramétrica

#### *Definición*

La representación de una curva por medio de una ecuación  $y = f(x)$  impone una seria restricción geométrica: Una curva representada de esa manera no debe ser intersectada en más de un punto por cualquier paralela al eje  $y$ . Usualmente esta restricción puede superarse descomponiendo la curva en porciones, cada una representable en la forma  $y = f(x)$ . Así, una circunferencia de radio  $a$  alrededor del origen está dada por las dos funciones  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  e  $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$  definidas para  $-a \leq x \leq a$ . Sin embargo, para una curva tan simple como una recta paralela al eje  $y$  este artificio no sirve.

Mayor flexibilidad se obtiene usando una representación *implícita* mediante una ecuación  $\phi(x, y) = 0$  que involucra una función  $\phi$  de dos variables independientes. Por ejemplo, la circunferencia de radio  $a$  alrededor del origen está completamente descrita por  $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ . Cualquier línea recta en el plano tiene una ecuación implícita de la forma  $ax + by + c = 0$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes y  $a$  y  $b$  no se anulan simultáneamente. Para  $b = 0$  se obtiene una paralela al eje  $y$ .

La descripción implícita de una curva tiene la desventaja de que para encontrar puntos  $(x, y)$  de la curva explícitamente, es decir, el valor de  $y$  para un valor de  $x$  dado, se debe *resolver* la ecuación  $\phi(x, y) = 0$ . Este problema se discutirá en detalle en el Volumen II.

La descripción más directa y más flexible de una curva es una *representación paramétrica*. En vez de considerar una de las coordenadas rectangulares en particular,  $y$  o  $x$ , como una función de la otra, se consideran ambas coordenadas  $x$  e  $y$  como funciones de una *tercera* variable indepen-

diente  $t$ , el llamado *parámetro*<sup>1</sup>; y el punto con coordenadas  $x$  e  $y$  describe entonces la curva conforme  $t$  recorre un cierto intervalo. Tal representación paramétrica ya ha sido encontrada antes; por ejemplo, la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  tiene la representación paramétrica  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ . Aquí  $t$  denota el ángulo en el centro de la circunferencia.

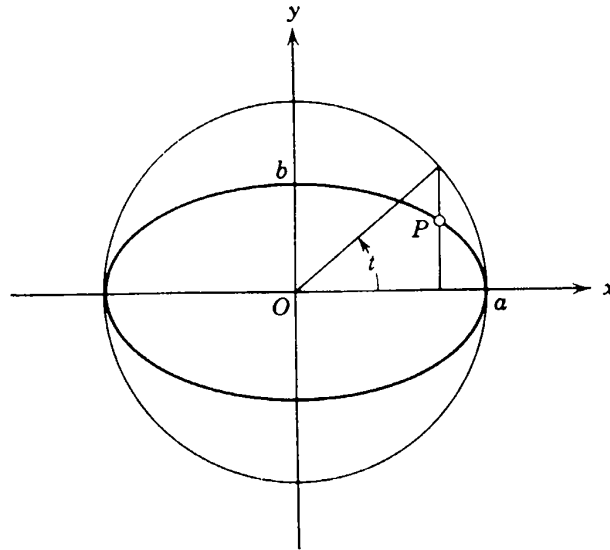


Figura 4.1

Para el elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  se tiene una representación paramétrica similar:  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , donde  $t$  es el llamado ángulo excéntrico, esto es, el ángulo en el centro de la elipse asociado al punto de la circunferencia circunscrita que está verticalmente por encima o por debajo del punto  $P = (a \cos t, b \sin t)$  de la elipse. Se supone aquí que  $b < a$  (véase Fig. 4.1). En ambos casos el punto con coordenadas  $x, y$  describe por completo la circunferencia o la elipse conforme el parámetro  $t$  recorre el intervalo  $0 \leq t < 2\pi$ .

En general, una curva  $C$  es representada paraméricamente mediante dos funciones de un parámetro  $t$ ,

$$x = \phi(t) = x(t), \quad y = \psi(t) = y(t);$$

la notación abreviada  $x(t)$  e  $y(t)$  se usará siempre que no dé lugar a confusión.\*

En lo que sigue se supondrá que  $\phi$  y  $\psi$  tienen derivadas continuas, a menos que se diga lo contrario

<sup>1</sup> Esta palabra denota una variable auxiliar que no se desea señalar en especial.

\* La notación  $x = \phi(t)$ , etc., pone de relieve la conexión funcional entre la variable dependiente y la independiente; la notación  $x(t)$ , etc., significa justamente que  $t$  va a ser considerada como la variable independiente que determina el valor funcional de  $x$  según una forma prescrita.

*Transformación del intervalo paramétrico en la curva.  
Sentido de dirección*

Dada una curva, las dos funciones  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  deben determinarse de manera que el conjunto de pares de valores funcionales,  $x(t)$  e  $y(t)$ , correspondientes a un cierto intervalo de valores de  $t$  definan todos los puntos de la curva y ningún otro punto más. Se tiene entonces una correspondencia entre los puntos de la curva y los valores de  $t$  en un intervalo del eje  $t$ . La representación paramétrica define una *transformación de un intervalo del eje  $t$  en la curva*,<sup>2</sup> siendo el punto  $t$  original del eje  $t$  transformado en el punto  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  de  $C$ .

Puesto que  $x(t)$  e  $y(t)$  se han considerado continuas, puntos vecinos sobre el eje  $t$  corresponden a puntos vecinos sobre la curva. Además, como los puntos del eje  $t$  están ordenados, de manera obvia se puede asignar un orden o "sentido" a los puntos de  $C$  diciendo simplemente que el punto en el cual se transforma el número  $t_1$  *precede* al punto en el cual se transforma  $t_2$  si  $t_1 < t_2$  (ver p. 352). La representación paramétrica da así un significado preciso a la vaga noción intuitiva de curva como un conjunto de puntos dispuestos en el mismo orden que sobre una línea recta.

### b. Cambios de parámetros

Los valores del parámetro  $t$  sirven para distinguir los diferentes puntos de la curva  $C$ . Dichos valores desempeñan el papel de "nombres" para los puntos individuales de la curva.

La misma curva  $C$  admite muchas representaciones paramétricas diferentes. Cualquier cantidad que varíe continuamente a lo largo de la curva y que tenga diferentes valores en puntos diferentes de ella puede servir como parámetro.

Si, por ejemplo, la curva está dada originalmente por una ecuación  $y = f(x)$ , se puede escoger como parámetro  $t$  la variable  $x$  y describir la curva mediante las funciones  $x = t$ ,  $y = f(t)$ . Análogamente, para una curva descrita dando  $x$  como una función de  $y$ , por ejemplo  $x = g(y)$ , se puede usar  $y$  como parámetro  $t$  y escribir  $x = g(t)$ ,  $y = t$ .

Para una curva dada por una ecuación  $r = h(\theta)$  en *coordenadas polares*  $r, \theta$  (véase capítulo 1, p. 124), se puede escoger  $\theta$  como parámetro  $t$  y obtener la representación paramétrica

$$x = r \cos \theta = h(t) \cos t = \phi(t),$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta = h(t) \operatorname{sen} t = \psi(t).$$

<sup>2</sup> Más exactamente, se dice que la transformación es *sobre* la curva  $C$  (en inglés, "onto") porque los puntos imagen son *todos* los puntos de la curva ( $N. del R.$ ).

Partiendo de una representación paramétrica dada,  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , para una curva  $C$ , siempre se pueden obtener muchas otras representaciones paramétricas. Para ello se toma una función arbitraria  $\tau = \chi(t)$  que sea monótona y continua en el intervalo  $t$  correspondiente a los puntos de  $C$ . La función  $\chi$  tiene entonces una inversa monótona y continua  $t = \sigma(\tau)$  en un correspondiente intervalo de  $\tau$ . Las coordenadas de los puntos  $(x, y)$  de  $C$  pueden entonces representarse en la forma

$$x = \phi[\sigma(\tau)] = \alpha(\tau), \quad y = \psi[\sigma(\tau)] = \beta(\tau).$$

Las funciones  $\alpha(\tau)$  y  $\beta(\tau)$  son también continuas; además, puntos diferentes de  $C$  corresponden a valores diferentes de  $t$  y, por lo tanto, debido al carácter monótono de la función  $\sigma$ , a diferentes valores de  $\tau$ . El efecto total del cambio de parámetro de  $t$  a  $\tau$  es el de “rebautizar” los puntos de  $C$ .

Así, la recta  $y = x$  tiene la representación paramétrica  $x = t$ ,  $y = t$ , donde  $-\infty < t < \infty$ . La substitución  $\tau = t^3$  da lugar a la representación paramétrica  $x = \tau^{1/3}$ ,  $y = \tau^{1/3}$  para la misma recta.

Análogamente, la elipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  admite la representación paramétrica  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , donde  $0 \leq t < 2\pi$ . Definiendo  $t = c\zeta + d$ , para números reales  $c$  y  $d$  ( $c \neq 0$ ), se obtiene otra representación,  $x(\zeta) = a \cos(c\zeta + d)$ ,  $y(\zeta) = b \sin(c\zeta + d)$ , para la misma elipse, con  $\zeta$  variando en los intervalos  $-d/c \leq \zeta < (2\pi - d)/c$  para  $c > 0$  y  $(2\pi - d)/c < \zeta \leq -d/c$  para  $c < 0$ . La substitución  $\tau = \tan(t/2)$  conduce a la *representación paramétrica “racional”* (ver pp. 311-312),

$$x = \frac{a(1 - \tau^2)}{1 + \tau^2}, \quad y = \frac{2b\tau}{1 + \tau^2},$$

para la elipse. Conforme  $\tau$  recorre todos los valores reales, se obtienen todos los puntos de la elipse con la excepción del punto  $S = (-a, 0)$ .

Las singularidades en una representación ordinaria pueden desaparecer si se usa un parámetro adecuado. Por ejemplo, la curva  $y = \sqrt[3]{x^2}$  puede ser representada por las funciones suaves  $x = t^3$ ,  $y = t^2$ . El punto con coordenadas  $x, y$  describe entonces la curva completa (parábola semicúbica) conforme  $t$  varía de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

Esta flexibilidad en la elección del parámetro permite a menudo simplificar el estudio de las propiedades geométricas que, por supuesto, no dependen de representaciones específicas.

En particular, puede resultar conveniente algunas veces el uso de una representación  $y = f(x)$  para  $C$  o parte de  $C$ . Tal representación es siempre posible para un pedazo de la curva ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) en el cual una de las funciones  $\phi, \psi$  (por ejemplo,  $x = \phi(t)$ ), es monótona. En efecto, para este pedazo se tiene una función inversa única  $t = \gamma(x)$ , y así es  $y = \psi[\gamma(x)]$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Esto es, por supuesto, sólo una afirmación relativa a una propiedad “local” de una curva, o sea, una afirmación que se hace solamente para una parte pequeña

c. **Movimiento a lo largo de una curva. El tiempo como un parámetro. El ejemplo de la cicloide**

*Movimiento a lo largo de una curva*

Muy a menudo el parámetro  $t$  tiene el natural significado físico de tiempo. Cualquier movimiento de un punto en el plano puede describirse representando sus coordenadas  $x$  e  $y$  como funciones del tiempo de manera que al tiempo  $t$  el punto  $(x, y)$  esté en  $(x(t), y(t))$ . Por consiguiente, estas dos funciones determinan en forma paramétrica el movimiento a lo largo de un camino o trayectoria  $C$ ; y ellas constituyen una *transformación* de la escala del tiempo sobre la trayectoria.<sup>2</sup>

*Las cicloides y las trocoides*

Un ejemplo lo proporcionan las *cicloides*, o sea, las trayectorias de puntos sobre un círculo que rueda uniformemente sin deslizar a lo largo de una línea recta u otro círculo. En el caso más simple un círculo de radio  $a$  rueda a lo largo del eje  $x$ ; y la trayectoria de un punto  $P$  sobre su circunferencia es una cicloide “común”. Escójanse el origen de coordenadas del sistema y el tiempo inicial de manera que para el tiempo  $t = 0$  el punto  $P$  esté en el origen y que en el tiempo  $t$  el círculo haya girado un cierto ángulo  $t$  a partir de su posición original. Esto significa que el círculo gira en el sentido de las manecillas de un reloj “con velocidad angular” igual a uno. Se supone que el círculo rueda uniformemente sin deslizar a lo largo del eje  $x$ , de manera que para el tiempo  $t$  la distancia del punto de contacto al origen es exactamente igual a la longitud de arco medida desde el punto de contacto hasta  $P$ . Así, en el tiempo  $t$  el centro  $M$  del círculo giratorio debe estar en el punto  $(at, a)$ ; y el centro se mueve con velocidad constante  $a$  hacia la derecha. Para las coordenadas de  $P$  en el tiempo  $t$  se encuentra entonces (ver Fig. 4.2) la representación paramétrica

$$(1) \quad x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \operatorname{cos} t).$$

Eliminando el parámetro  $t$  puede obtenerse la ecuación de la curva en forma no paramétrica a costa, sin embargo, de la claridad de la expresión. Se tiene

$$\operatorname{cos} t = \frac{a - y}{a}, \quad t = \operatorname{arc} \operatorname{cos} \frac{a - y}{a}, \quad \operatorname{sen} t = \pm \sqrt{1 - \frac{(a - y)^2}{a^2}},$$

de la curva, escogida adecuadamente. Generalmente (por ejemplo, en el caso de la circunferencia), la variable  $x$  no puede usarse como parámetro para la curva completa sino sólo para una porción de ella.

<sup>2</sup> A un cambio del parámetro  $t$  correspondería entonces un cambio en la escala del tiempo según la cual la curva queda descripta por el punto móvil.

y, por lo tanto,

$$(1a) \quad x = a \arccos \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{y(2a-y)},$$

obteniéndose así  $x$  como una función de  $y$ .

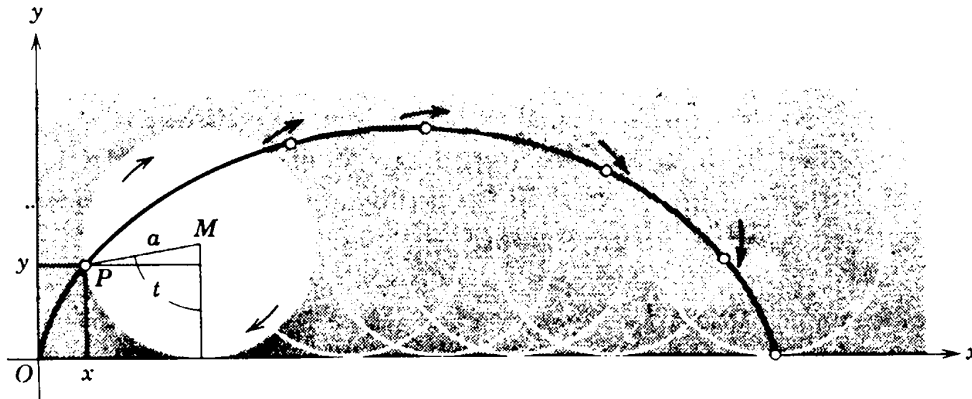


Figura 4.2 Cicloide.

### *Epicicloide*

Nuestro siguiente ejemplo es el de una *epicicloide*, definida como la trayectoria de un punto  $P$  fijo sobre la circunferencia de un círculo de radio  $c$ , conforme éste rueda a una velocidad uniforme a lo largo de la circunferencia y fuera de un segundo círculo de radio  $a$ . Supóngase el círculo fijo centrado en el origen del plano  $x, y$ . Supóngase además que el círculo que se mueve rueda a lo largo del círculo fijo de manera que su centro ha girado alrededor del origen a un ángulo  $t$  en el tiempo  $t$  (Fig. 4.3). Entonces se encuentra que en el tiempo  $t$  la posición del punto  $P = (x(t), y(t))$ , el cual en el tiempo  $t = 0$  es el punto de contacto  $(a, 0)$ , está dada por las ecuaciones paramétricas

$$(2) \quad \begin{aligned} x(t) &= (a + c) \cos t - c \cos \left( \frac{a + c}{c} t \right), \\ y(t) &= (a + c) \sin t - c \sin \left( \frac{a + c}{c} t \right). \end{aligned}$$

Cuando  $a = c$  la curva formada se llama *cardioide* (Fig. 4.4) y está dada por las ecuaciones paramétricas

$$(3) \quad \begin{aligned} x(t) &= 2a \cos t - a \cos (2t), \\ y(t) &= 2a \sin t - a \sin (2t). \end{aligned}$$

Una tercera variedad de cicloides se obtiene como el lugar geométrico de un punto sujeto a la circunferencia de un círculo que rueda sobre la circunferencia de otro círculo fijo, pero por su interior. Para encontrar las ecuaciones paramétricas de esta "*hipocicloide*", sea  $a$  el radio del círculo fijo y  $c$  el del círculo que gira. Supóngase que el punto  $P$  de la circunferencia del círculo que se mueve está localizado en  $(a, 0)$  en el tiempo  $t = 0$ . Supóngase, además, que el círculo que gira se mueve a lo largo del círculo fijo de manera que en el tiempo  $t$  su centro ha girado alrededor del origen en un ángulo  $t$  (Fig. 4.5). Se encuentra entonces que las ecuaciones paramétricas para la hipocicloide son

$$(4) \quad \begin{aligned} x(t) &= (a - c) \cos t + c \cos \left( \frac{a - c}{c} t \right), \\ y(t) &= (a - c) \sin t - c \sin \left( \frac{a - c}{c} t \right). \end{aligned}$$

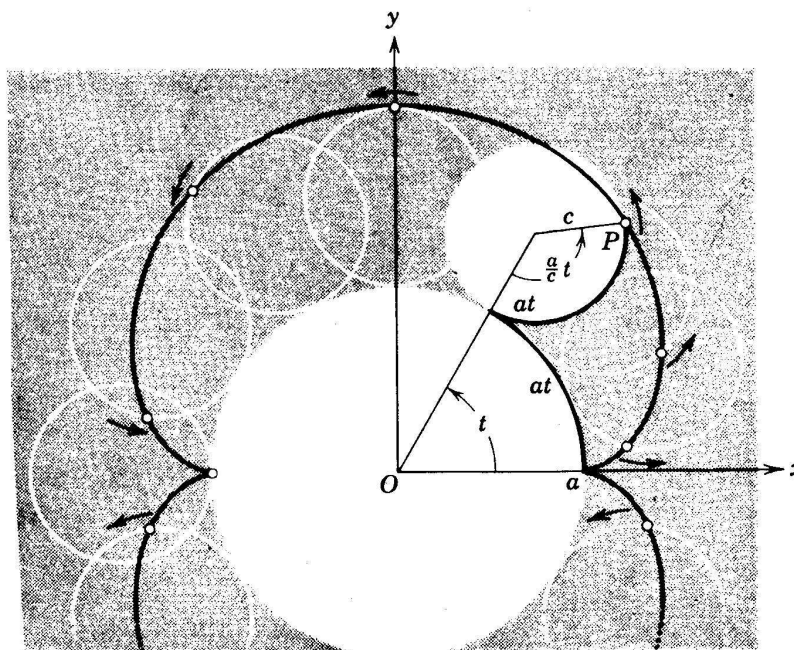


Figura 4.3 Epicicloide.

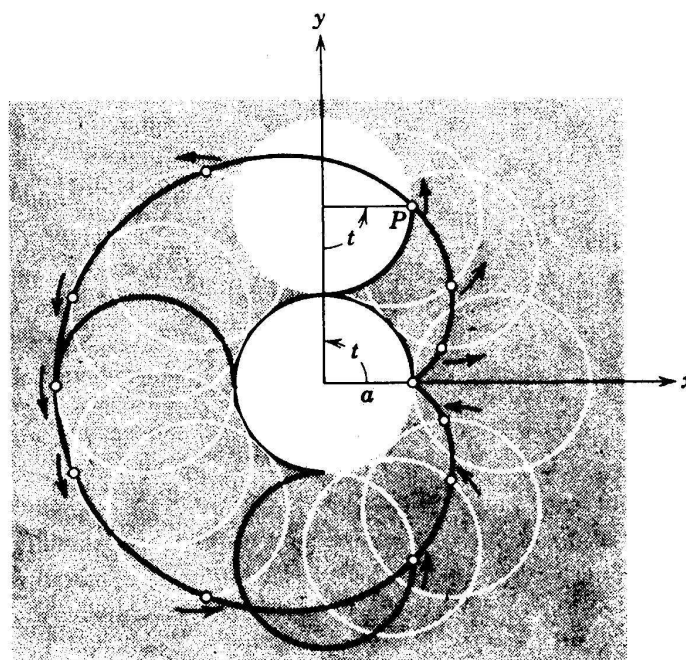


Figura 4.4 Cardioide.

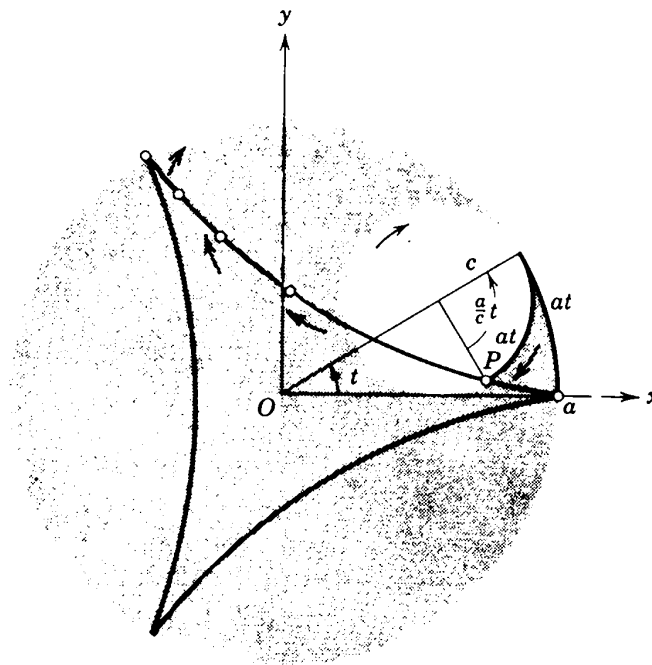


Figura 4.5 Hipocicloide.

En el caso especial en el que el círculo fijo tiene un radio igual a dos veces el radio del círculo que se mueve,  $c = \frac{1}{2}a$ , se obtiene

$$x(t) = a \cos t,$$

$$y(t) = 0,$$

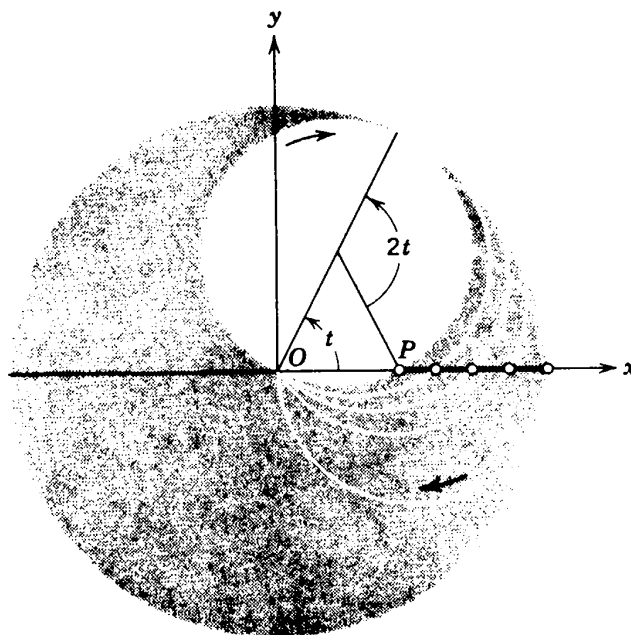


Figura 4.6 Un punto  $P$  sobre la periferia de un círculo que rueda interiormente sobre una circunferencia de radio doble describe un segmento de recta.



y la hipocicloide degenera en el diámetro del círculo fijo, recorrido hacia atrás y hacia adelante. La característica interesante de este ejemplo es que proporciona una solución mecánica al problema de dibujar una línea recta usando únicamente movimientos circulares (Fig. 4.6).

Si el radio del círculo fijo es tres veces el radio del círculo móvil, entonces  $c = a/3$  y

$$x(t) = \frac{2}{3}a \cos t + \frac{1}{3}a \cos (2t),$$

$$y(t) = \frac{2}{3}a \sin t - \frac{1}{3}a \sin (2t).$$

Mediante un cálculo elemental se encuentra

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2 \cos (3t),$$

de manera que la hipocicloide encuentra al círculo fijo en exactamente tres puntos y la curva aparece como se muestra en la Fig. 4.5.

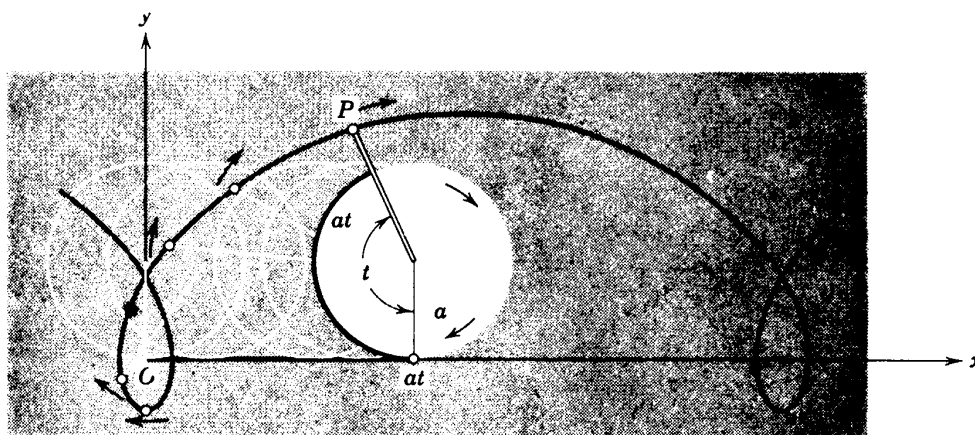


Figura 4.7 Trocoide.

### Trocoides

Curvas más generales llamadas *trocoides* (epitrocoides, hipotrocoides) se obtienen al considerar el movimiento de un punto  $P$  sujeto a un círculo (pero no necesariamente sobre su periferia) cuando dicho círculo rueda a lo largo de una línea recta o a lo largo de otro círculo por su parte exterior o interior (ver Fig. 4.7). El mismo tipo de curva aparece como la trayectoria de un punto que se mueve uniformemente sobre un círculo en tanto que el centro del círculo mismo se mueve uniformemente a lo largo de una línea recta o de un círculo. Estas curvas juegan un papel muy importante en la descripción ptolomeica del movimiento aparente de los planetas.

Algunas de las propiedades notables de las cicloides serán discutidas más adelante en este capítulo (p. 446).

#### d. Clasificación de curvas. Orientación

##### Definiciones

Entre las características más obvias de una curva están el número de partes separadas o *ramas* y el número de espiras que ellas tengan. Una hipérbola es un ejemplo de una curva que consiste de dos ramas ajenas;

otro de tales ejemplos es la curva  $y^2 = (4 - x^2)(x^2 - 1)$  que consiste de dos óvalos separados. Nos interesarán particularmente las curvas consistentes de una sola parte, las curvas *conexas*. Una curva conexa puede *intersectarse* a sí misma, como la trocoide (Fig. 4.7), o la “lemniscata” de la Fig. 1.S.3, p. 126.

Una curva conexa sin autointersecciones se denomina *simple*. Entre las curvas simples todavía se distinguirán las curvas *cerradas*, como los círculos o las elipses, de las curvas que no son cerradas, como parábolas o segmentos de recta. No se intentará aquí dar una clasificación ni rigurosa ni completa de las curvas, sino únicamente señalar ciertas características “*topológicas*” de una curva, importantes para la representación paramétrica.

### *Arcos simples*

Una representación paramétrica de una curva  $C$  por medio de dos funciones continuas,  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , define una transformación del eje  $t$ , o de una porción de él, en  $C$ .  $C$  se denominará un *arco simple* si puede representarse de tal manera que el parámetro  $t$  recorra un intervalo cerrado  $[a, b]$  sobre el eje  $t$ , formando así el dominio de las funciones  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$ , y si, además, diferentes  $t$  en el intervalo corresponden a diferentes puntos  $P$  sobre  $C$ . Un ejemplo es el arco parabólico  $x = t$ ,  $y = t^2$  para  $0 \leq t \leq 1$ .

El mismo arco  $C$  (esto es, los mismos puntos del plano) puede ser representado paraméricamente de muchas maneras. Cualquier función monótona continua  $\tau = \chi(t)$ , para  $a \leq t \leq b$ , define un parámetro  $\tau$  de manera que  $x$  e  $y$  sean funciones continuas de  $\tau$  en un intervalo cerrado  $[\alpha, \beta]$  conveniente, correspondiendo valores diferentes de  $\tau$  a diferentes  $P$ . De hecho, como es fácil concluir, las substituciones monótonas continuas  $\tau = \chi(t)$  proporcionan las representaciones paramétricas continuas *más generales* de un arco simple que asignan diferentes puntos del arco a diferentes valores del parámetro. (Ver notas en la p. 78 relativas a transformaciones continuas biunívocas.)

Una representación paramétrica especial,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , de un arco simple  $C$  tiene un *sentido* definido sobre  $C$  correspondiente al sentido de las  $t$  *crecientes*. Dados dos puntos distintos cualesquiera,  $P_0$ ,  $P_1$ , se dice que  $P_1$  sigue a  $P_0$  si  $P_1$  pertenece al mayor valor del parámetro  $t$ . Si se introduce un nuevo parámetro  $\tau$  mediante una función continua *creciente*  $\tau = \chi(t)$ , el orden de los pares de puntos con respecto a  $\tau$  es el mismo; y el parámetro  $\tau$  define el *mismo sentido* sobre  $C$ . Si  $\chi(t)$  es decreciente, el sentido se invierte.

### *Dirección u orientación de arcos*

Un arco simple *dirigido* u *orientado* es aquél en el cual se ha escogido un sentido definido (por ejemplo, el sentido que corresponde a un incre-

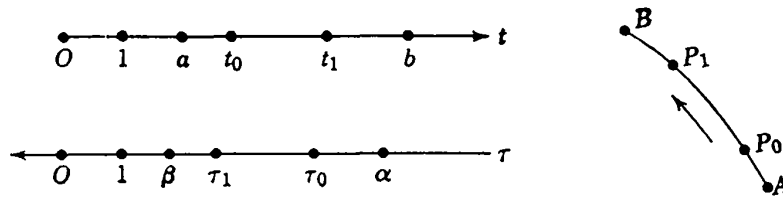


Figura 4.8 Sentido y representación paramétrica.

mento para una elección particular del parámetro  $t$ ); y ese sentido se llama entonces el *sentido positivo* del arco. El sentido positivo queda completamente especificado si se sabe cuál de los dos puntos extremos del arco *sigue* al otro. Se denominará punto *final* del arco al punto extremo que sigue al otro, y punto *inicial* a éste. Dada cualquier representación paramétrica  $x = x(\tau)$ ,  $y = y(\tau)$  del arco orientado, donde  $a \leq \tau \leq b$ , el sentido positivo será aquél que corresponde al sentido de las  $\tau$  crecientes si el valor paramétrico  $\tau = a$  corresponde al punto inicial y el  $\tau = b$ , al punto final; en caso contrario, el sentido de las  $\tau$  crecientes corresponderá al sentido negativo del arco (Fig. 4.8).

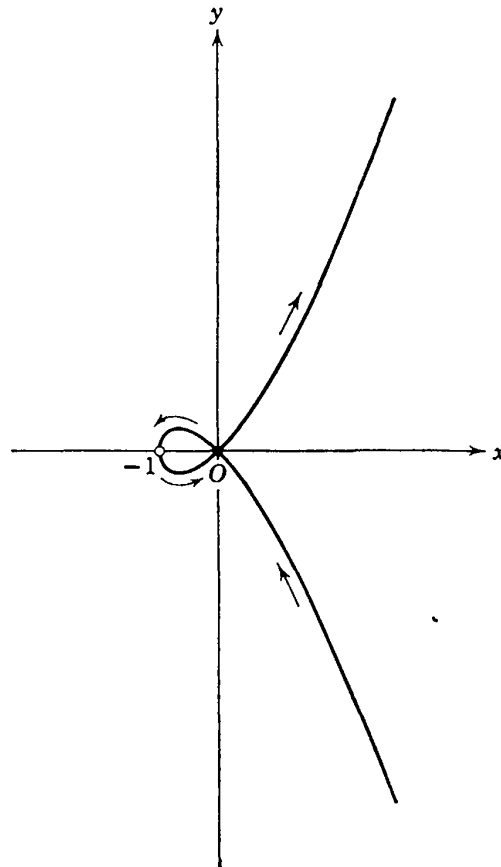


Figura 4.9 Una curva con una espira:  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t^3 - t$ , cuyo sentido es el de las  $t$  crecientes.

Dos puntos distintos cualesquiera,  $P_0, P_1$ , sobre un arco simple  $C$  definen un subarco con puntos extremos  $P_0, P_1$ , el cual consiste de los puntos con valores paramétricos comprendidos entre los correspondientes para  $P_0$  y  $P_1$ . Si  $C$  es un arco dirigido y  $P_1$  sigue a  $P_0$  en el sentido positivo de  $C$ , se obtiene un subarco dirigido con punto inicial  $P_0$  y punto final  $P_1$ . Un número finito de puntos de subdivisión sobre un arco simple dirigido  $C$  parte dicho arco en una sucesión de subarcos dirigidos, siendo el punto inicial de un subarco el punto final del que le precede.

A menudo resulta impráctico restringirse a arcos simples e insistir en que diferentes valores del parámetro  $t$  pertenezcan a puntos diferentes sobre la curva. Si, por ejemplo, las ecuaciones  $x = x(t), y = y(t)$  dan la posición de una partícula móvil  $P$  en el tiempo  $t$ , no existe razón para que la partícula no pueda permanecer en reposo durante algún tiempo o para que su trayectoria no se corte a sí misma de manera que la partícula regrese a la misma posición un tiempo después.

Un ejemplo lo constituye la curva  $x = t^2 - 1, y = t^3 - t$  [la cual también podría describirse completamente mediante la ecuación cúbica  $y^2 - x^2(1 + x) = 0$ ]. Conforme  $t$  varía desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , la curva pasa por el origen dos veces, para  $t = -1$  y para  $t = +1$  (Fig. 4.9). Fácilmente se verifica que los demás puntos de la curva pertenecen a un único valor de  $t$ . Geométricamente, el intervalo  $-1 < t < +1$  corresponde a una *espira* de la curva. Aquí, nuevamente, el sentido de las  $t$  crecientes define un cierto *orden entre los puntos de la curva*, al menos si se interpretan de alguna manera los puntos correspondientes a  $t = -1$  y a  $t = +1$  como diferentes, estando uno de ellos situado “encima” del otro. La curva cúbica completa y orientada puede descomponerse en arcos simples dirigidos, por ejemplo, en los arcos correspondientes a  $n \leq t \leq n + 1$ , donde  $n$  recorre todos los enteros.

### *Curvas cerradas*

El ejemplo usual de una representación paramétrica en la cual valores de  $t$  diferentes corresponden al mismo punto de la curva está dado por las fórmulas

$$x = a \cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t,$$

que describen el movimiento uniforme de un punto sobre una circunferencia, siendo  $t$  el tiempo. Conforme  $t$  varía desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$  el punto  $P = (x, y)$  recorre la circunferencia un número infinito de veces en el sentido contra reloj. Podemos hacer que los puntos de la circunferencia sean recorridos exactamente una vez restringiendo  $t$  a cualquier intervalo semiabierto de longitud  $2\pi$ :

$$\alpha \leq t < \alpha + 2\pi.$$

Los puntos extremos  $\alpha$  y  $\alpha + 2\pi$  del intervalo corresponden al mismo punto de la circunferencia. Aquí los puntos extremos del intervalo paramétrico no tienen un significado geométrico especial para la curva.

Generalmente, un par de funciones continuas,  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , definidas en un intervalo cerrado  $a \leq t \leq b$  representan una curva *cerrada* si  $\phi(a) = \phi(b)$  y  $\psi(a) = \psi(b)$ . La curva cerrada será simple si valores  $t$  diferentes, con  $a \leq t < b$ , corresponden a puntos diferentes  $(x, y)$ .

El punto correspondiente a  $t = a$  y  $t = b$  podría ser cualquier punto de la curva; y es justamente el punto en el cual la curva se “rompe” para hacer que sus puntos correspondan a los de un intervalo sobre el eje.

*Curvas cerradas representadas por funciones periódicas*

Justamente como en el ejemplo de la circunferencia, se puede evitar el distinguir cualquier punto de división particular tomando para  $\phi(t)$  y  $\psi(t)$  funciones *periódicas* con período  $p = b - a$ . Es sumamente valioso hacer aquí algunos comentarios generales acerca de las funciones periódicas, a las cuales regresaremos para tratarlas en forma más intensiva en el capítulo 8.

Una función  $f(t)$  se llama *periódica* con período  $p$  si está definida para todo  $t$  y satisface la ecuación  $f(t) = f(t + p)$ . Así, por ejemplo, las funciones trigonométricas  $\sin t$  y  $\cos t$  son periódicas con período  $2\pi$ . (Cualquier múltiplo  $2n\pi$ , donde  $n$  es un entero, es entonces también un período.) Interpretada geoméricamente,  $f(t)$  tiene período  $p$  si un corrimiento de su gráfica en  $p$  unidades hacia la derecha lleva nuevamente a la misma gráfica.

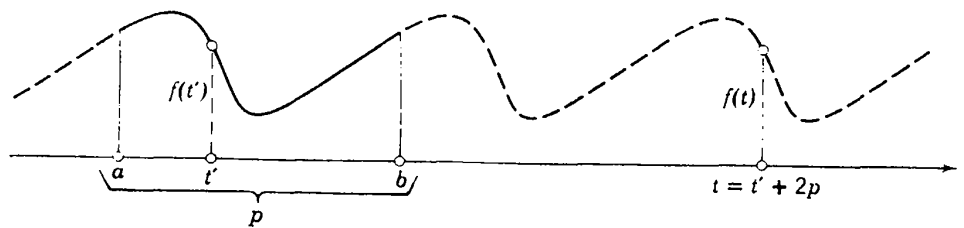
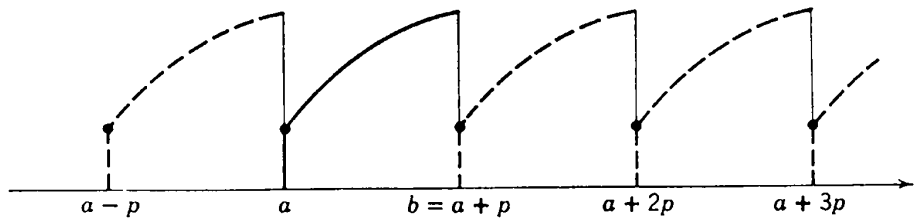


Figura 4.10 Gráfica de una función periódica.  $f(t)$ .

Puesto que  $f(t)$  “se repite” a sí misma, una función  $f(t)$  de período  $p$  está determinada para todo  $t$  si se conoce dicha función en un intervalo  $a \leq t < b$  de longitud  $p = b - a$  (Fig. 4.10). En efecto, para cada  $t$  existe un valor  $t'$  en el intervalo  $a \leq t' < b$  tal que  $t - t' = np$ , donde  $n$  es un entero [sólo se tiene que tomar para  $n$  el mayor entero que no exceda a  $(t - a)/p$ ]. Entonces  $f(t) = f(t')$  es conocida.

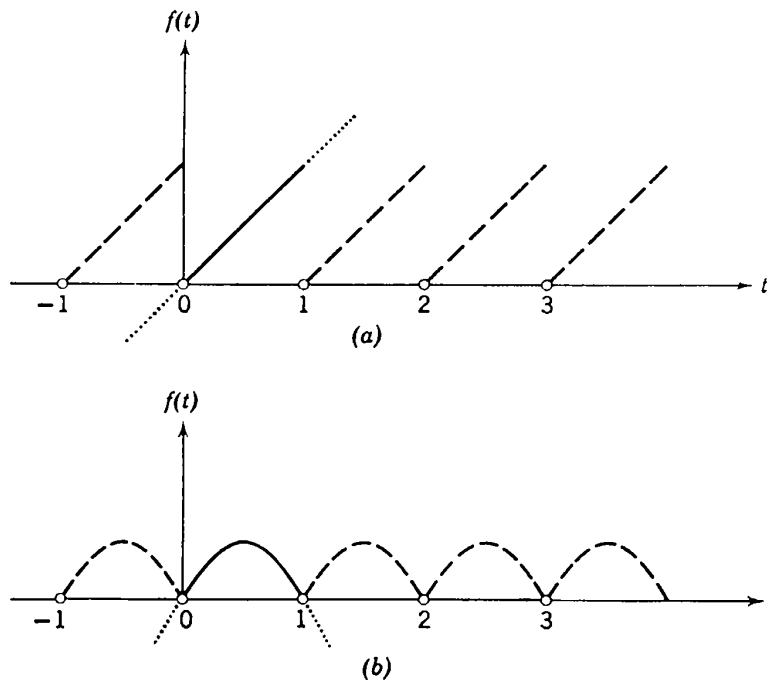
De hecho, podemos partir con *cualquier* función  $f(t)$  *continua* en un intervalo semiabierto  $a \leq t < b$ ; y la función extendida será, claramente, continua para todo  $t$  que no sea de la forma  $t = a + np$  con  $n$  entero (Fig. 4.11).



**Figura 4.11** Continuidad periódica de una función  $f(t)$  partiendo del intervalo  $a \leq t < b$ .

Por ejemplo, la extensión en forma periódica de la función  $f(t)$  definida por  $f(t) = t$  para  $0 \leq t < 1$ , conduce a una función de período  $p = 1$ , que llamaremos “parte fraccional de  $t$ ”, y la cual es discontinua en los puntos  $t$  que son enteros (Fig. 4.12a). Generalmente, en  $t = a + np$  la función periódicamente extendida tendrá el valor  $f(a)$ ; y éste también será el límite de  $f$  al aproximarse al punto desde la derecha, en tanto que el límite de  $f$  desde la izquierda será el mismo que el correspondiente al punto  $b$ . En el caso de mayor interés para nosotros por ahora, comenzamos con una función definida y continua en el intervalo *cerrado*  $a \leq t \leq b$ , la cual tiene además el mismo valor en los puntos extremos:  $f(a) = f(b)$ . Continuando periódicamente tal función se llega siempre a una función  $f(t)$  de período  $p = b - a$ , la cual es continua para todo  $t$ . (Fig. 4.12b).

Las funciones periódicas continuas son ideales para representar curvas cerradas  $C$ . Sea  $C$  dada paramétricamente por  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , para



**Figura 4.12** Continuidad periódica de las funciones  $f(t)$  definidas inicialmente en el intervalo  $0 \leq t < 1$ . Aquí (a)  $f(t) = t$ , (b)  $f(t) = 2t - 2t^2$ .

$\phi, \psi$  continuas en el intervalo  $a \leq t \leq b$  y teniendo los mismos valores en ambos puntos extremos. Se puede extender la definición de estas funciones a todos los valores de  $t$  de manera que  $\phi$  y  $\psi$  tengan período  $b - a = p$  y sean continuas para todo  $t$ . Para cualquier  $t$  la representación paramétrica extendida solamente conduce a puntos de  $C$  puesto que se tiene  $t = t' + np$  con  $n$  entero y  $a \leq t' \leq b$ . El punto correspondiente a  $t$  es entonces el mismo que el correspondiente a  $t'$ , el cual está sobre  $C$ . Conforme  $t$  varía desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$  el punto  $(x, y)$  recorre la curva  $C$  un número in-

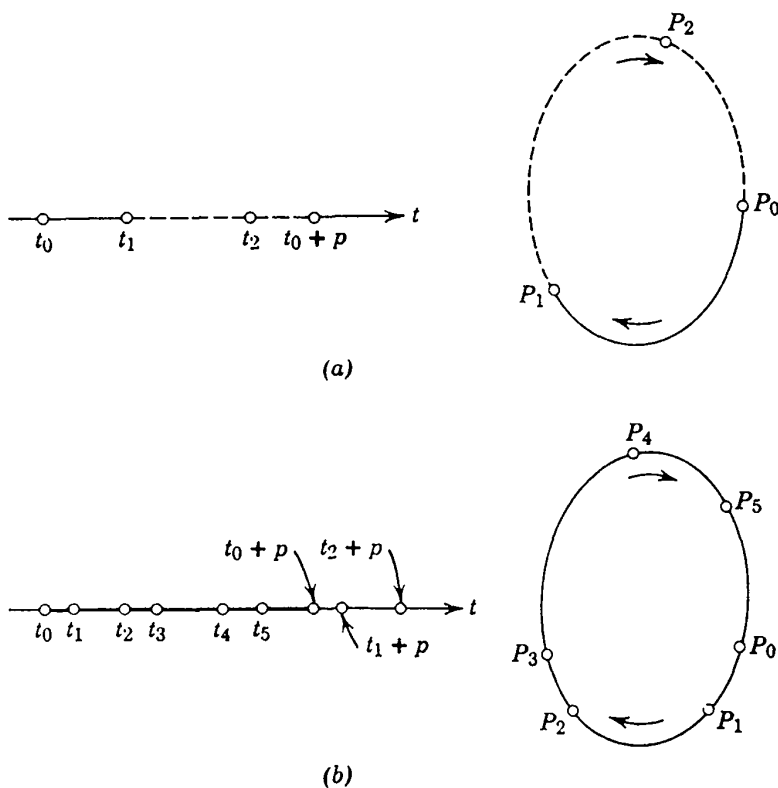


Figura 4.13 Orientación de curvas cerradas en el sentido de las  $t$  crecientes.

finito de veces, justamente como en el caso de la circunferencia  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ . Aquí el papel sobresaliente del valor paramétrico  $t = a$  es eliminado. Para cualquier  $\alpha$  la curva completa queda ahora representada por  $x = \phi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  cuando  $t$  varía desde  $\alpha$  hasta  $\alpha + p$ .

Una porción de la curva cerrada  $C$  correspondiente a los valores del parámetro  $t$  en un intervalo  $\alpha \leq t \leq \beta$  forma un arco simple si valores  $t$  diferentes en ese intervalo conducen a puntos diferentes  $(x, y)$ . La curva cerrada  $C$  completa es una curva simple si diferentes  $t$  en el mismo intervalo  $\alpha \leq t < \alpha + p$  siempre conducen a puntos diferentes sobre  $C$ . Así, cualquier intervalo paramétrico cerrado de longitud menor que  $p$  origina un arco simple.

*Curvas cerradas compuestas de arcos simples. Orden de puntos*

Las curvas cerradas que se considerarán pueden todas ellas descomponerse en arcos simples. Si la curva cerrada  $C$  completa es simple, puede descomponerse en dos arcos simples  $t_0 \leq t \leq t_1$  y  $t_1 \leq t \leq t_0 + p$  que tengan solamente sus puntos extremos,  $P_0, P_1$ , en común. El sentido de las  $t$  crecientes determina un sentido positivo u orientación sobre  $C$ , fijando una dirección positiva sobre cada arco simple de  $C$ . Dos puntos distintos cualesquiera,  $P_0, P_1$ , sobre la curva cerrada simple  $C$  dividen a ésta en dos arcos simples. En el sentido de las  $t$  crecientes exactamente uno de los dos arcos tendrá a  $P_0$  como punto inicial y a  $P_1$  como punto final; lo llamaremos  $P_0P_1$ . La inversa se cumple para el otro arco.

*Orientación y orden*

La orientación positiva de  $C$  puede también caracterizarse mediante una terna ordenada de puntos  $P_0P_1P_2$  de  $C$ , si se especifica que  $P_2$  no está sobre el arco dirigido simple con punto inicial  $P_0$  y punto final  $P_1$ . Las ternas  $P_1P_2P_0$  y  $P_2P_0P_1$  obtenidas por permutación cíclica a partir de  $P_0P_1P_2$  describen la misma orientación (Fig. 4.13a).

\*En forma completamente general, cualesquier  $n$  puntos distintos sobre la curva cerrada simple  $C$ , orientada, siempre se suceden uno al otro en un orden determinado  $P_1P_2 \cdots P_n$ , excepto por permutaciones cíclicas,<sup>1</sup> y dividen  $C$  en arcos simples dirigidos  $P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$ . Pueden siempre escogerse valores paramétricos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  para los puntos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  de manera tal que los  $t_i$  formen una sucesión monótona creciente y estén todos contenidos en uno y el mismo intervalo paramétrico de longitud igual al período  $p$  (Fig. 4.13b).

*Orientación de curvas y ángulos*

Como ya se ha señalado en el capítulo 1, estamos obligados a hacer uso de los signos más y menos para establecer relaciones satisfactorias entre los entes geométricos y los conceptos analíticos expresados por números. Los ejemplos más simples los constituyen las *rectas dirigidas*, tales como el eje numérico. El sentido que se define como positivo en una recta es arbitrario al principio. Un sentido positivo correspondiente a valores crecientes de  $t$  puede asociarse con cualquier representación paramétrica particular  $x = at + b, y = ct + d$  de la recta. Una recta orientada de esta manera *apunta* en una cierta *dirección*. Dos rectas paralelas dirigidas tienen el mismo sentido o bien sentidos opuestos. Una dirección puede también determinarse mediante un *rayo* que parte de un punto  $P_0$ , esto es, mediante una semirrecta que consiste de todos los puntos de la recta que “siguen” en el sentido positivo a un punto dado  $P_0$ .

<sup>1</sup> Esto es,  $P_2P_3 \cdots P_nP_1, P_3P_4 \cdots P_nP_1P_2, \dots, P_nP_1 \cdots P_{n-1}$  dan la misma orientación.



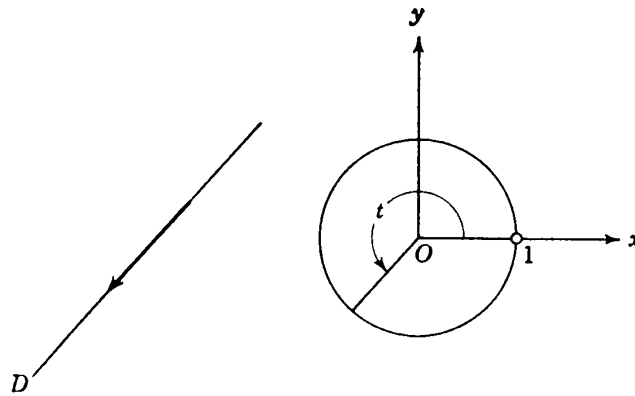


Figura 4.14 Ángulo de inclinación  $t$  de una dirección  $D$ .

Cualquier dirección en el plano puede representarse mediante un rayo que parte del origen, y también mediante el punto  $P$  que es común al rayo y a la circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Si representamos esta circunferencia unitaria en forma paramétrica mediante  $x = \cos t$ ,  $y = \operatorname{sen} t$ , habremos asociado con cada dirección ciertos valores  $t$  que difieren uno de otro por múltiplos de  $2\pi$ . Estos son los llamados *ángulos de inclinación* de la dirección o ángulos que la dirección forma con el eje  $x$  positivo. Existe siempre exactamente un ángulo de inclinación  $t$  para el cual  $0 \leq t < 2\pi$  (Fig. 4.14).

Los *ángulos entre dos direcciones* son simplemente las diferencias entre sus ángulos de inclinación. Más precisamente, puesto que el orden en el cual se toman las dos direcciones es importante, decimos que *una dirección de inclinación  $t'$  forma con una dirección de inclinación  $t''$  un ángulo  $\alpha = t' - t''$*  (Fig. 4.15). Como  $t$  y  $t'$  pueden cambiar en múltiplos enteros de  $2\pi$ , el mismo cambio es permisible para el ángulo que una dirección forma con otra.

*Sentido de rotación*

También se dice que la dirección con ángulo de inclinación  $t''$  se convierte en la dirección  $t'$  mediante una *rotación* a través de un ángulo  $\alpha$ . La

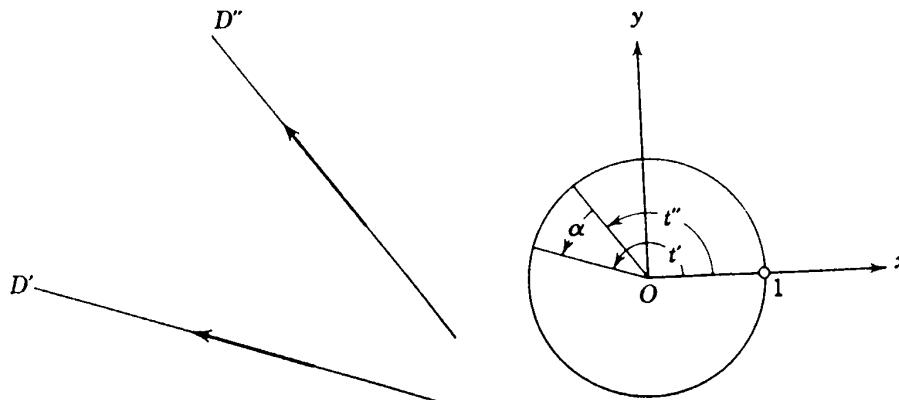


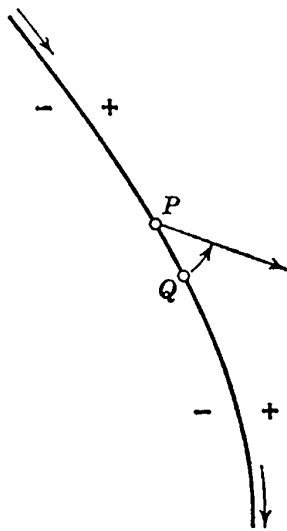
Figura 4.15 Ángulo  $\alpha$  que la dirección  $D'$  forma con la dirección  $D''$ .

idea intuitiva de rotación es aquí la de un *movimiento continuo* mediante el cual la dirección con inclinación  $t''$  se transforma en la dirección con inclinación  $t'$  pasando por las direcciones con todas las inclinaciones posibles  $t$  intermedias entre  $t''$  y  $t'$ . La rotación se denomina *positiva* o *contra reloj* si  $\alpha = t' - t''$  es positivo, y *negativa* o *en el sentido del reloj* para el caso contrario. Por supuesto, existen muchas rotaciones diferentes, tanto en el sentido del reloj como en el opuesto, que convertirán una cierta dirección en otra dirección dada, a menos que se especifique que el ángulo de rotación satisface  $-\pi < \alpha \leq \pi$ .

Entonces, finalmente, el sentido positivo de rotación está asociado con una representación paramétrica particular  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  de la circunferencia que se ha escogido. Si, como es costumbre, el eje  $x$  apunta hacia la derecha y el eje  $y$  hacia arriba, entonces el sentido positivo de rotación coincide con el sentido opuesto al de las manecillas de un reloj convencional.<sup>1</sup>

#### *Lados positivo y negativo de una curva*

Una curva separa los puntos del plano cercanos a uno de sus puntos  $P$  en dos clases. Por lo menos localmente pueden distinguirse dos “lados” de



**Figura 4.16** Lados positivo y negativo de un arco orientado.

la curva. Si la curva  $C$  está orientada podemos definir un lado *positivo* (o “izquierdo”)<sup>2</sup> y un lado *negativo* (o “derecho”) de la siguiente manera. Considérese un rayo que parte de  $P$ . Se dice que este rayo apunta hacia el lado positivo de una curva si existen puntos  $Q$  sobre la curva, arbitrariamente próximos a  $P$  y que siguen a  $P$  en el sentido dado a la curva, tales que la recta  $PQ$  deba girarse en el sentido contra reloj un ángulo comprendido entre  $0$  y  $\pi$  para llegar al rayo dado (Fig. 4.16). Los puntos sobre el rayo cercanos a  $P$  se dice que están sobre el lado positivo de la curva. En el caso opuesto se dice que el rayo apunta hacia el lado negativo de  $C$  y que los puntos sobre él están en el lado negativo de la curva. Si  $C$  es una curva cerrada simple, ella divide todos los puntos del plano en dos clases, los *interiores* a  $C$  y los *exteriores* a  $C$ .<sup>3</sup> Se dice que  $C$  tiene una *orientación*

<sup>1</sup> Este sentido, a su vez, es sugerido por el movimiento en el suelo de la sombra de un reloj de Sol en el hemisferio norte.

<sup>2</sup> Los términos “lado derecho” e “izquierdo” corresponden al uso ordinario de las palabras “ribera izquierda” y “ribera derecha” para un río orientado según la dirección de su flujo.

<sup>3</sup> Estos conceptos, así como la división del plano en dos partes por medio de una curva continua, cerrada, simple, se analizan en forma precisa en la topología. Aquí deben aceptarse sobre una base intuitiva.

*contra reloj* si su interior está sobre el lado positivo (esto es, izquierdo) (Fig. 4.17).

Pero si la curva cerrada  $C$  consiste de varias espiras, entonces no siempre es posible recorrer la curva de manera que todas las regiones encerradas estén en el lado positivo de ella (véase Fig. 4.18).

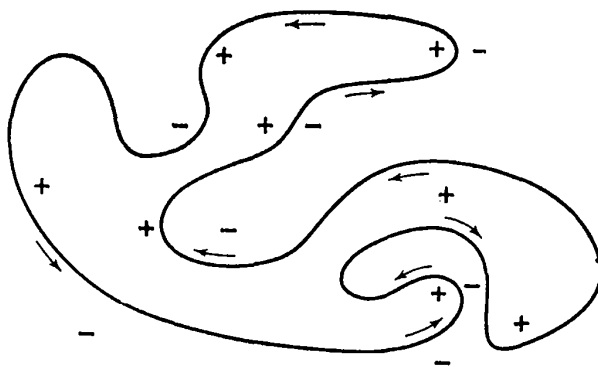


Figura 4.17 Curva cerrada simple con orientación contra reloj.

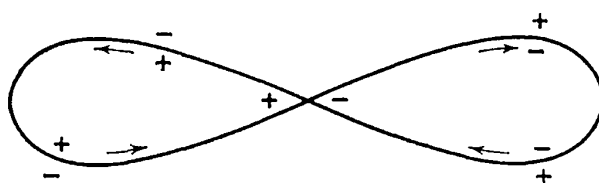


Figura 4.18

### e. Derivadas, tangentes y normales en representación paramétrica

#### *Dirección y velocidad*

Para una curva  $C$  dada en representación paramétrica usando el tiempo como parámetro  $t$ ,

$$x = x(t) = \phi(t), \quad y = y(t) = \psi(t),$$

las derivadas se denotan, como lo hizo Newton, mediante un punto:

$$\dot{x} = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}, \quad \dot{y} = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}.$$

Las derivadas  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  son a menudo visualizadas convenientemente como las “componentes de velocidad” o las “velocidades” de las coordenadas de un punto  $P$  que se mueve a lo largo de  $C$ .

Siempre que  $\dot{x} \neq 0$ , será posible representar la correspondiente porción de  $C$  por medio de una ecuación  $y = f(x)$  calculando primero  $t$  como una función de  $x$  a partir de la primera ecuación y luego substituyendo la expresión resultante para  $t$  en la segunda ecuación. Por la regla de la cadena

de la derivación y la regla para la derivada de la inversa de una función (ver p. 228), se encuentra que la pendiente de la tangente a la curva está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

La fórmula equivalente  $dx/dy = \dot{x}/\dot{y}$  se cumple si  $\dot{y} \neq 0$ .

A menos que se especifique lo contrario, siempre se supondrá que  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  no se anulan simultáneamente, o sea, escrito en forma concisa, se supondrá que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0.$$

Entonces la tangente siempre existe;<sup>1</sup> es horizontal si  $\dot{y} = 0$  y vertical si  $\dot{x} = 0$ .

Para la *cicloide*, por ejemplo [ver Ec. (1), p. 347] se tiene

$$\dot{x} = a(1 - \cos t) = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2},$$

$$\dot{y} = a \operatorname{sen} t = 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \cot \frac{t}{2}.$$

Estas fórmulas muestran que  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$  excepto para  $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ . Además, la cicloide tiene una cúspide (esto es, un punto en el que se invierte la dirección) con una tangente vertical en esos puntos excepcionales, en los que también encuentra al eje  $x$ , esto es, para los cuales  $y = 0$ . En efecto, al aproximarse a estos puntos la derivada  $y' = \dot{y}/\dot{x} = \cot(t/2)$  se vuelve infinita.

#### *Tangente, normal y cosenos directores*

La ecuación de la tangente a la curva en el punto  $x, y$  es

$$\eta - y = \frac{dy}{dx} (\xi - x),$$

donde  $\xi$  y  $\eta$  son las coordenadas "variables" correspondientes a un punto arbitrario sobre la tangente, en tanto que  $x, y$  y  $dy/dx$  tienen los valores

<sup>1</sup> Observamos que la condición  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ , aunque suficiente, no es necesaria para garantizar una representación no paramétrica. Así, podemos definir la curva  $y = x^2$  por medio de las ecuaciones paramétricas  $x = t^3, y = t^6$ . En el origen del eje  $t$  la condición de positividad para  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$  falla, pero aún la curva tiene una representación no paramétrica bien definida.

fijos que corresponden al punto de contacto. Substituyendo  $dy/dx$  por  $\dot{y}/\dot{x}$  podemos escribir la ecuación de la tangente en la forma

$$(5) \quad (\xi - x)\dot{y} - (\eta - y)\dot{x} = 0.$$

La misma ecuación exactamente se obtiene con la hipótesis  $\dot{y} \neq 0$ ; y lo único que se necesita es expresar  $x$  como función de  $y$ . En los puntos excepcionales para los que tanto  $\dot{x}$  como  $\dot{y}$  se anulan para el mismo valor  $t$ , la ecuación pierde todo significado, pues entonces es satisfecha por  $\xi, \eta$  cualesquiera.

La *normal a la curva*, esto es, la recta que pasa por un punto de la curva y es perpendicular a la tangente en ese punto, tiene la pendiente  $-dx/dy$ . Esto conduce a la ecuación

$$(6) \quad (\xi - x)\dot{x} + (\eta - y)\dot{y} = 0$$

para la normal.

Si un punto de  $C$  corresponde a varios valores de  $t$ , entonces en general existe una tangente diferente para cada una de las ramas de la curva que pasan por el punto, o para cada valor de  $t$ . Por ejemplo, la curva  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t^3 - t$  (Fig. 4.9, p. 353) pasa por el origen para  $t = -1$  y  $t = +1$ . Para  $t = -1$  se encuentra que la ecuación de la tangente es  $\xi + \eta = 0$ , en tanto que para  $t = +1$  la tangente está dada por  $\xi - \eta = 0$ .

De la definición de derivada se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan \alpha,$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que la tangente forma con el eje  $x$ . Esto significa que una rotación del eje  $x$  a través del ángulo  $\alpha$  (contra reloj si  $\alpha > 0$ , en el sentido del reloj si  $\alpha < 0$ ) hará que dicho eje sea paralelo a la tangente. Entonces también rotaciones a través de ángulos  $\alpha \pm \pi$ ,  $\alpha \pm 2\pi$ , ... harán el eje  $x$  paralelo a dicha tangente. Por lo tanto, el ángulo  $\alpha$  está determinado solamente salvo un múltiplo de  $\pi$ , en tanto que  $\tan \alpha$  está determinada en forma única. De las relaciones  $\dot{y}/\dot{x} = (\sin \alpha)/(\cos \alpha)$  y  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$  se obtiene

$$\cos \alpha = \pm \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \sin \alpha = \pm \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

(debiendo usarse el mismo signo en ambas fórmulas). A  $\cos \alpha$  y  $\sin \alpha$  se les llama los *cosenos directores* de la tangente.<sup>1</sup>

#### *Asignación de direcciones a la tangente y a la normal*

Las dos posibles elecciones para los cosenos directores corresponden a las dos direcciones en las cuales puede recorrerse la tangente; y los corres-

<sup>1</sup> Aquí se concibe  $\sin \alpha$  como  $\cos \beta$ , donde  $\beta = \pi/2 - \alpha$  es el ángulo que el eje  $y$  forma con la tangente.

pendientes ángulos  $\alpha$  difieren entre sí en un múltiplo impar de  $\pi$ . Una de las dos direcciones de la tangente corresponde a  $t$  creciente; la otra, a  $t$  decreciente. Supóngase que la dirección de la curva es la asociada a las  $t$  crecientes. Entonces, por definición, la dirección positiva de la tangente, o la que corresponde a valores crecientes de  $t$ , es aquella que forma con el eje  $x$  positivo un ángulo  $\alpha$  para el cual  $\cos \alpha$  tiene el mismo signo que  $\dot{x}$ , y  $\sin \alpha$  el mismo signo que  $\dot{y}$ . Los cosenos directores correspondientes a esa dirección de la tangente son entonces, sin ambigüedad:

$$(7) \quad \cos \alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Si, por ejemplo,  $\dot{x} = dx/dt > 0$ , la dirección de la tangente que corresponde a las  $t$  crecientes es también la que corresponde a las  $x$  crecientes;

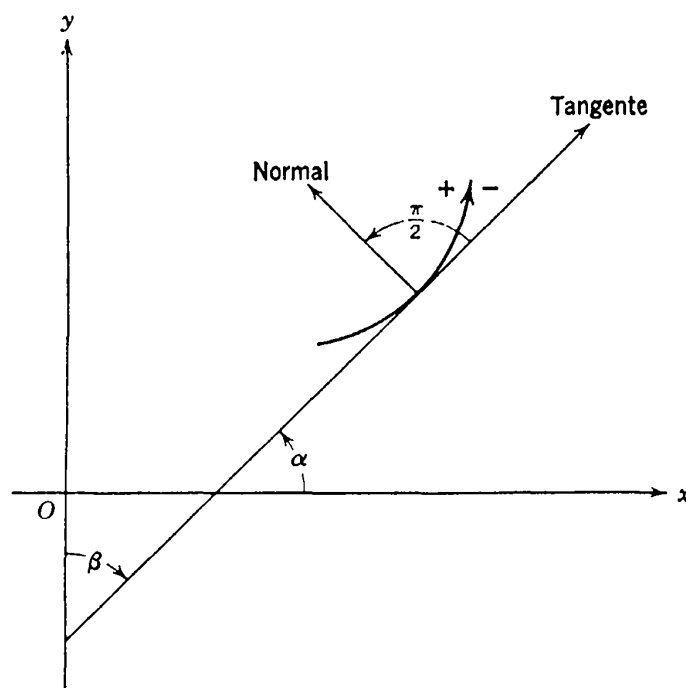


Figura 4.19 Tangente y normal positiva de una curva orientada.

y el ángulo que esa dirección forma con el eje  $x$  positivo tiene entonces un coseno positivo. Análogamente, la dirección normal que se obtiene haciendo girar un ángulo  $\pi/2$  en el sentido positivo (contra reloj) la dirección de la tangente positiva, que corresponde a valores crecientes de  $t$ , tiene como cosenos directores

$$\cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Esta es la llamada dirección normal positiva y apunta hacia el “lado positivo” de la curva (Fig. 4.19).

Si se introduce un nuevo parámetro  $\tau = \chi(t)$  para la curva, los valores de  $\dot{\cos} \alpha$  y  $\dot{\sin} \alpha$  no cambian si  $d\tau/dt > 0$  y cambian de signo si  $d\tau/dt < 0$ ; esto es, si cambia el sentido de la curva cambian también los sentidos positivos de la tangente y de la normal.

### Puntos críticos

Si  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  son continuas y  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ , las cantidades  $\cos \alpha$  y  $\sin \alpha$  que determinan la dirección de la tangente variarán continuamente con  $t$ . La tangente, cuya ecuación es

$$(\xi - x) \sin \alpha - (\eta - y) \cos \alpha = 0,$$

cambia entonces en forma continua a lo largo de la curva; lo mismo que la normal.

Si  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  se anulan para cierto valor de  $t$ , los cosenos directores de la tangente no quedan definidos por nuestras fórmulas; y la tangente puede no existir en absoluto o no estar definida en forma única. A tales puntos se les llama puntos "críticos" o puntos "estacionarios". Mediante ejemplos se ilustrarán varias posibilidades en relación con los puntos críticos.

Uno de tales ejemplos lo proporciona la curva  $y = |x|$  con la representación paramétrica  $x = t^3$ ,  $y = |t|^3$ ; esta curva tiene una esquina para  $t = 0$ , aunque tanto  $\dot{x}$  como  $\dot{y}$  son continuas. En el ejemplo de la cicloide, discutido en la p. 362, los puntos "estacionarios" en los cuales  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  corresponden a cúspides. Por otra parte, en algunos casos la anulación de  $\dot{x}$  y de  $\dot{y}$  es sólo consecuencia de la representación paramétrica específica y no tiene relación con el comportamiento de la curva, como ocurre para la recta representada por  $x = t^3$ ,  $y = t^3$ , para el valor paramétrico  $t = 0$ .

### Esquinas

Las curvas que consisten de varios arcos suaves que se unen en esquinas son representadas convenientemente en forma paramétrica mediante

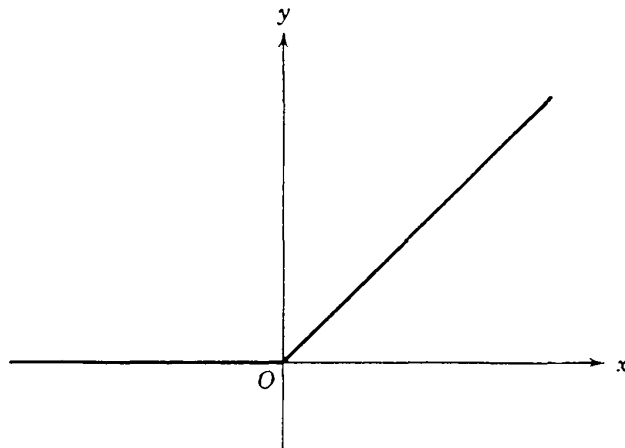


Figura 4.20 Gráfica de  $x = t$ ,  $y = \frac{1}{2}(t + |t|)$ .

funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  continuas pero con derivadas  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  que presentan discontinuidades de salto. Esto queda ilustrado por el ejemplo trivial de la línea quebrada con representación

$$\begin{aligned} x = t, \quad y = 0 & \quad \text{para } t \leq 0 \\ \text{y} \\ x = t, \quad y = t & \quad \text{para } t \geq 0. \end{aligned}$$

Aquí  $\dot{x} = 1$ ,  $\dot{y} = 0$  para  $t < 0$ , y  $\dot{x} = 1$ ,  $\dot{y} = 1$  para  $t > 0$ . En  $t = 0$  la tangente está indeterminada (ver Fig. 4.20).

### f. La longitud de una curva

#### *La longitud como una integral*

Existen dos tipos diferentes de cantidades o propiedades geométricas asociadas con una curva. El primer tipo depende sólo del comportamiento *local* de la curva, esto es, en la inmediata vecindad de un punto; tales propiedades son aquéllas que pueden representarse mediante derivadas en el punto en cuestión. Propiedades del segundo tipo, las *propiedades globales*, dependen de la configuración total de la curva o de una porción de ella y son usualmente expresadas en forma analítica mediante el concepto de integral. Empezaremos considerando una cantidad del segundo tipo, la longitud de una curva.

Por supuesto, se tiene ya una noción intuitiva de lo que se entiende por longitud de una curva. Sin embargo, como en el caso clásico de los arcos circulares, debe darse un significado matemático preciso al concepto intuitivo. Guiados por la intuición definimos la longitud de una curva arbitraria como el límite de las longitudes de polígonos que se le aproximan, en particular, polígonos inscritos. Las longitudes de los polígonos, a su vez, son definidas no bien se escoja una unidad de longitud. El resultado final será la expresión de la longitud mediante una integral.

Considérese la curva dada en la forma  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ . En el intervalo comprendido entre  $\alpha$  y  $\beta$  se escogen puntos intermedios  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  tales que

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Los puntos  $P_0, P_1, \dots, P_n$  de la curva que corresponden a estos valores  $t_i$  en el mismo orden se unen mediante segmentos de recta, obteniéndose así un polígono inscrito. La longitud del perímetro de este polígono inscrito depende de la manera en que los puntos  $t_i$  o los vértices  $P_i$  del polígono sean escogidos. Déjese ahora que el número de puntos  $t_i$  crezca más allá de toda cota, de manera que, al mismo tiempo, la longitud del subintervalo  $(t_i, t_{i+1})$  más largo tienda a cero. La longitud de la curva se define entonces



como el límite de los perímetros de estos polígonos inscritos, *siempre que* tal límite exista y sea independiente de la manera particular como se escojan los polígonos. Cuando esta hipótesis (hipótesis de *rectificabilidad*) se satisface, podemos hablar de la longitud de la curva.

Se supondrá que las funciones  $x(t)$  e  $y(t)$  tienen derivadas  $\dot{x}(t)$  e  $\dot{y}(t)$  continuas para  $\alpha \leq t \leq \beta$ . El polígono inscrito correspondiente a la subdivisión del intervalo  $t$  mediante los puntos  $t_i$ , con  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ , tiene vértices  $P_i = (x(t_i), y(t_i))$ ; su longitud total está dada por la expresión

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P_i P_{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2},$$

de acuerdo con el teorema de Pitágoras (cfr. Fig. 4.21, p. 374). Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial,

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \dot{x}(\xi_i) \Delta t_i, \quad y(t_{i+1}) - y(t_i) = \dot{y}(\eta_i) \Delta t_i,$$

donde  $\xi_i$  y  $\eta_i$  son valores intermedios en el intervalo  $t_i < t < t_{i+1}$ . Esto conduce a la expresión

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\dot{x}(\xi_i)]^2 + [\dot{y}(\eta_i)]^2} \Delta t_i$$

para la longitud del polígono, donde se ha usado el hecho de que las diferencias  $\Delta t_i$  son positivas. Si el número  $n$  de puntos  $t_i$  de subdivisión crece más allá de toda cota en tanto que, simultáneamente, el máximo valor  $\Delta t_i$  tiende a cero, la suma  $S_n$  tiende a la integral

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Este hecho es una consecuencia directa de los teoremas de existencia para integrales, del capítulo 2.<sup>1</sup>

Lo anterior prueba que, para  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  continuas, la curva realmente tiene una longitud y que esta longitud está dada por la expresión

$$(8) \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

La misma regla es válida si se admite que  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  sean discontinuas en puntos aislados, en los que la curva podría no tener, entonces, una tangente única; y, por supuesto, la integral debe entonces ser considerada como "impropia" (ver capítulo 3, p. 320). Curvas "rectificables" más generales, para las cuales la integral anterior sigue teniendo significado, no serán discutidas en este volumen.

<sup>1</sup> Puesto que los puntos intermedios  $\xi_i$  y  $\eta_i$  no necesariamente coinciden, hacemos uso de las sumas de aproximación más generales cuya convergencia a la integral se demostró en la p. 216.

*Definición alternativa de longitud*

Hacemos una observación interesante: El perímetro  $S$  de cualquier polígono inscrito  $\pi$  nunca puede exceder la longitud  $L$  de la curva. (En particular, la distancia entre los puntos extremos de la curva no puede exceder a  $L$ , pues la línea recta que une los puntos extremos es la curva *más corta* que va de uno de tales puntos al otro.) En efecto,  $L$  puede obtenerse como el límite de los perímetros de una sucesión especial de polígonos inscritos, en la cual se parte con el polígono  $\pi$  de perímetro  $S$  y se obtienen los siguientes agregando en forma sucesiva más y más vértices. Insertando un vértice adicional entre dos vértices sucesivos de un polígono inscrito nunca puede llegarse a una disminución de los perímetros, pues un lado de un triángulo jamás excede la suma de los otros dos. Así,  $L$  es el límite de una sucesión no decreciente de perímetros que comienza con  $S$ . Por tanto,  $S \leq L$ . Por consiguiente, en vez de definir  $L$  como el límite de los perímetros de una sucesión de polígonos inscritos correspondientes a subdivisiones cada vez más finas del intervalo  $t$ , podría también haberse definido  $L$  como el *extremo superior*<sup>1</sup> de los perímetros de *todos* los polígonos inscritos. Es interesante el hecho de que la longitud pueda definirse sin recurrir formalmente a ningún paso al límite.

*Invariancia de la longitud respecto de cambios de parámetros*

Resulta claro de la definición que la longitud  $L$  de una curva  $C$  no puede depender de la representación paramétrica particular usada para  $C$ . Por lo tanto, si se introduce un nuevo parámetro  $\tau = \chi(t)$ , donde  $d\tau/dt > 0$ , nuestra fórmula integral para  $L$  debe dar el mismo valor independiente de que el parámetro usado sea  $t$  o  $\tau$ . Esto puede verificarse inmediatamente a partir de la regla de la cadena de la derivación y de las leyes de sustitución para integrales. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2} \frac{d\tau}{dt};\end{aligned}$$

por lo tanto, si  $\chi(\alpha) = a$ ,  $\chi(\beta) = b$ ,

$$\begin{aligned}L &= \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2} \frac{d\tau}{dt} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2} d\tau,\end{aligned}$$

de manera que la expresión de la longitud basada en el parámetro  $\tau$  conduce al mismo valor de  $L$ . Si, por otra parte,  $d\tau/dt < 0$ , análogamente se encuentra

<sup>1</sup> Definido como *la menor de las cotas superiores*, o *supremum*, y denotado frecuentemente por los símbolos “*extr*” y “*sup*”. (Cfr. pp. 120-121). (*N. del R.*)

$$\begin{aligned} \int_a^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt &= - \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2} d\tau \\ &= \int_b^a \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2} d\tau; \end{aligned}$$

y el miembro derecho es nuevamente la integral correcta para la longitud de  $C$  referida al parámetro  $\tau$ , puesto que ahora  $b < a$  debido a que  $\chi(t)$  es una función decreciente.

Para una curva dada en forma no paramétrica mediante la función  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , podemos introducir  $x$  como parámetro  $t$ . Entonces  $\dot{x} = 1$ ,  $\dot{y} = dy/dx$ . La longitud de la curva queda entonces dada por

$$(9) \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

*Ejemplos.* Como un ejemplo se encuentra la longitud de un segmento de la parábola  $y = \frac{1}{2}x^2$  correspondiente al intervalo  $a \leq x \leq b$ :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + x^2} dx.$$

En este caso la substitución  $x = \sinh t$  (véase capítulo 3, p. 293) conduce a

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{ar\,senh} a}^{\operatorname{ar\,senh} b} \cosh^2 t dt &= \frac{1}{2} \int_{\operatorname{ar\,senh} a}^{\operatorname{ar\,senh} b} (1 + \cosh 2t) dt \\ &= \frac{1}{2} (t + \sinh t \cosh t) \Big|_{\operatorname{ar\,senh} a}^{\operatorname{ar\,senh} b} \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{ar\,senh} b + b\sqrt{1 + b^2} - \operatorname{ar\,senh} a\sqrt{1 + a^2}). \end{aligned}$$

Para una curva dada por la ecuación  $r = r(\theta)$ ,  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , en coordenadas polares, se tiene la representación  $x = r(\theta) \cos \theta$ ,  $y = r(\theta) \sin \theta$ . Escogiendo  $\theta$  como parámetro se tiene

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2.$$

Esto conduce a la expresión

$$(10) \quad L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

para la longitud de una curva en coordenadas polares. Por ejemplo, para la circunferencia de radio  $a$  alrededor del origen se tiene la ecuación  $r = \text{constante} = a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Esto da para la longitud total de la circunferencia

$$L = \int_0^{2\pi} a d\theta = 2\pi a.$$

*Aditividad de la longitud*

Sea  $C$  una curva dada por  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , donde  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  son continuas. Sea  $\gamma$  cualquier valor entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Por las reglas generales para integrales se tiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{\alpha}^{\gamma} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt + \int_{\gamma}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Las integrales de la derecha representan respectivamente las longitudes de las porciones en las que  $C$  es dividida por el punto correspondiente a  $t = \gamma$ . Por lo tanto, la longitud de la curva completa es igual a la suma de las longitudes de sus partes.

No es necesario que  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  sean continuas. Las integrales existen también cuando  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  tienen un número finito de discontinuidades de salto, como ocurriría para una curva con esquinas. La longitud total de la curva es entonces la suma de las longitudes de las porciones suaves comprendidas entre esquinas. Comportamientos aún más singulares de  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  son permitidos siempre y cuando la expresión de la longitud tenga sentido como integral impropia.

**g. La longitud de arco como parámetro**

Hemos visto que una y la misma curva admite muchas representaciones paramétricas diferentes  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Cualquier función monótona de  $t$  puede usarse como parámetro en lugar de  $t$ . Sin embargo, para muchos propósitos es ventajoso tomar como referencia para  $C$  algún “parámetro usual” que de alguna manera sea distinguido geoméricamente. La abscisa  $x$  o el ángulo polar  $\theta$  no son adecuados para ese propósito si las curvas han de describirse globalmente; además, dichos parámetros dependen de la elección del sistema de coordenadas. La posibilidad de medir longitudes a lo largo de una curva proporciona un parámetro natural definido geoméricamente al cual pueden ser referidos los puntos  $P$  de una curva rectificable. Este parámetro es la longitud de la porción de la curva comprendida entre  $P$  y algún punto fijo  $P_0$ .

Comenzamos con una representación paramétrica arbitraria  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  de  $C$ . La derivación con respecto a  $t$  es indicada mediante un punto. Introducimos la “longitud de arco”  $s$  por medio de la integral indefinida

$$(11) \quad s = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

o, en forma más precisa,  $s$  como una función de  $t$  por

$$(11a) \quad s = s(t) = c + \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)} d\tau,$$

donde  $c$  es una constante,  $t_0$  es un valor entre  $\alpha$  y  $\beta$ , y con  $\tau$  se designa la variable de integración para distinguirla del límite superior  $t$ . Claramente, para cualesquier valores  $t_1$  y  $t_2$  del intervalo paramétrico la diferencia

$$(12) \quad s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\tau$$

es igual a la longitud del pedazo de curva limitado por los puntos correspondientes a  $t = t_1$  y  $t = t_2$ , suponiéndose  $t_1 < t_2$ . Para  $t_1 > t_2$  la diferencia  $s(t_2) - s(t_1)$  es la negativa de la longitud de esa porción de curva. Así, el conocimiento de cualquier integral indefinida  $s$  permite calcular la longitud de cualquier parte de la curva.

#### *El signo de la longitud de arco*

Si la constante  $c$  tiene el valor 0, puede interpretarse  $s(t)$  como la longitud de arco de la curva (o "distancia a lo largo de la curva") entre el punto  $P_0$  con parámetro  $t_0$  y el punto  $P$  con parámetro  $t$ . Aquí la longitud se cuenta positiva en el caso en que el arco con punto inicial  $P_0$  y punto final  $P$  tenga la orientación correspondiente a las  $t$  crecientes.<sup>1</sup>

La forma integral de la definición de  $s$  es equivalente a la relación

$$(12a) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Usando la notación simbólica para diferenciales (p. 201),  $ds = (ds/dt)dt$ , etc., podemos escribir esa relación en la sugestiva forma

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

para el "elemento de longitud"  $ds$ .

#### *Velocidad de movimiento a lo largo de una curva*

Si  $t$  se interpreta como el tiempo y  $x(t)$ ,  $y(t)$  como las coordenadas de posición en el tiempo  $t$  de un punto o partícula puntual móvil, se tiene que

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

da la medida de la variación respecto al tiempo de la distancia recorrida por el punto *a lo largo de su trayectoria*, esto es, la *velocidad* de la partícula en el instante  $t$ .<sup>2</sup> Para una partícula que se mueve con velocidad

<sup>1</sup> Nótese que la variable  $s$  no es única; depende de la elección de  $P_0$  y  $c$  y también de la orientación inducida por el parámetro  $t$  sobre la curva. Sin embargo, cualquier otra longitud de arco es expresable en términos de  $s$  en la forma  $(s + \text{constante})$  o bien  $(-s + \text{constante})$ .

<sup>2</sup> O sea, el límite de la razón incremental  $\Delta s/h$  de espacio sobre tiempo  $h$ . El cociente  $\Delta s/h$  se llama *velocidad media* del punto en el intervalo  $(t, t+h)$ . (*N. del R.*)

uniforme a lo largo de la curva  $\dot{s}$  es constante y  $s$  es entonces una función lineal del tiempo  $t$ .

Si nuestra hipótesis usual de que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$$

se satisface, tenemos  $ds/dt \neq 0$  y podemos entonces introducir  $s$  como parámetro. De esta manera se simplifican una gran cantidad de fórmulas y cálculos. Las cantidades

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

son entonces justamente los cosenos directores de la tangente que apunta en la dirección de  $s$  creciente (ver (7), p. 364). La relación

$$(13) \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

caracteriza el parámetro  $s$  como la longitud de arco a lo largo de la curva.

## h. Curvatura

### *Definición mediante la medida del cambio de dirección*

Se discute a continuación un concepto básico que se refiere solamente al *comportamiento local* de una curva en la vecindad de un punto, el concepto de curvatura.

Conforme se recorre la curva, el ángulo de inclinación  $\alpha$  de la tangente a la curva variará en una medida definida por unidad de longitud de arco recorrida. Llamaremos a esta medida del cambio de  $\alpha$  *la curvatura de la curva*. De acuerdo con esto, la curvatura está definida como

$$(14) \quad \kappa = \frac{d\alpha}{ds}.$$

*Expresiones paramétricas.* Supóngase que la curva está dada paramétricamente mediante las funciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  que tienen primera y segunda derivadas con respecto a  $t$  continuas, para las cuales se cumple  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ . Al calcular  $d\alpha/ds$ , o sea, la medida de cambio del ángulo de dirección  $\alpha$  en el punto  $P$ , se tiene que tomar en cuenta que  $\alpha$  no está definido en forma única. Sin embargo, la función trigonométrica de  $\alpha$ ,  $\tan \alpha = \dot{y}/\dot{x}$  (o bien  $\cot \alpha = \dot{x}/\dot{y}$  para  $\dot{x} = 0$ ) tiene un valor definido. Para formar  $d\alpha/ds$  puede siempre suponerse que los valores paramétricos pertenecientes a puntos en la vecindad de  $P$  están todos ellos en un intervalo en todo el cual una de las cantidades  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  es diferente de cero. Si, por ejemplo,  $\dot{x} \neq 0$ , se

puede asignar a  $\alpha$  un valor que varíe continuamente con  $t$  en el intervalo tomando simplemente

$$\alpha = \alpha(t) = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}} + n\pi,$$

donde  $n$  es un entero fijo, posiblemente negativo, y “arc tan” indica el valor principal de la función (cfr. p. 236), el cual está entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ . Análogamente, si  $\dot{y} \neq 0$  en el intervalo, se puede tomar para  $\alpha$  la expresión

$$\alpha(t) = \arccot \frac{\dot{x}}{\dot{y}} + n\pi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\dot{x}}{\dot{y}} + n\pi.^1$$

En cualquier caso, se encuentra por derivación directa para cualquier representación paramétrica:

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Puesto que también (ver (12a), p. 371)

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

se obtiene para la curvatura  $d\alpha/ds = \dot{\alpha}/\dot{s}$  de la curva la expresión

$$(15) \quad \kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{s}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Escogiendo en particular la longitud de arco  $s$  como el parámetro  $t$  se tiene

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$$

[véase Ec. (13), p. 372] y, por lo tanto, se obtiene el resultado simplificado

$$(15a) \quad \kappa = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y.$$

#### Signo y valor absoluto de la curvatura

Introduciendo un nuevo parámetro  $\tau = \tau(t)$  en lugar de  $t$  no se afecta la dirección de la tangente y, por lo tanto, no ocurre un cambio en  $\alpha$ . Análogamente, el valor absoluto de la diferencia de los valores de  $s$  en dos puntos tiene un significado geométrico que es independiente de la elección

<sup>1</sup> Podríamos definir  $\alpha(t)$  como una función continua para *todos* los valores del parámetro  $t$  dividiendo el intervalo paramétrico total en subintervalos en cada uno de los cuales  $\dot{x} \neq 0$  o  $\dot{y} \neq 0$ . En cada subintervalo podemos definir entonces  $\alpha(t)$  por medio de una de las expresiones de arriba, eligiendo el entero constante  $n$  en cada subintervalo de manera que los valores de  $\alpha$  en el extremo común de dos intervalos adyacentes, calculados usando las expresiones correspondientes a esos intervalos, coincidan.

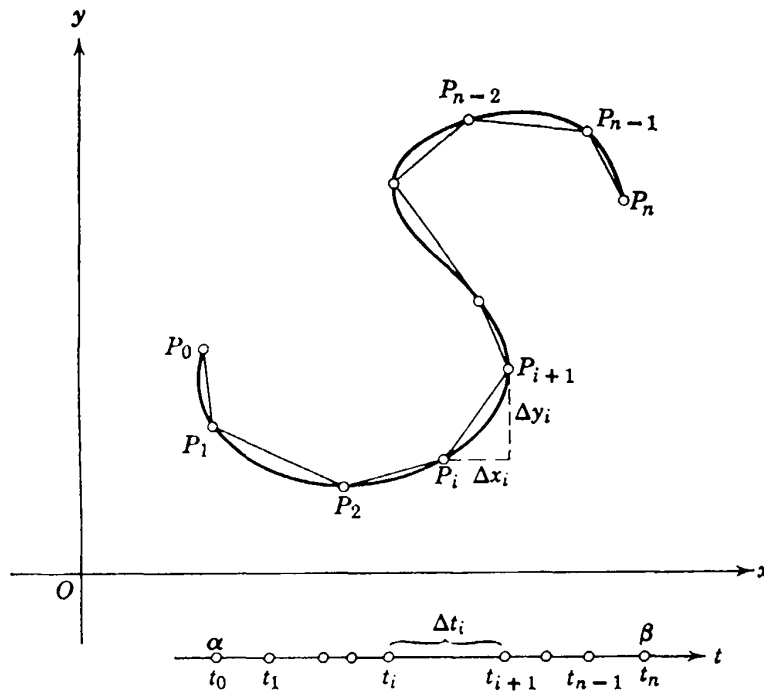


Figura 4.21 Rectificación de curvas.

del parámetro, a saber, el significado de distancia medida a lo largo de la curva. Sin embargo, el *signo* de la diferencia debe siempre tomarse como el signo de la diferencia entre los correspondientes valores paramétricos, puesto que se ha definido  $s$  como una función creciente de  $t$ . Así, el valor absoluto de la curvatura  $|\kappa| = |d\alpha/ds|$  no depende de la elección del pará-

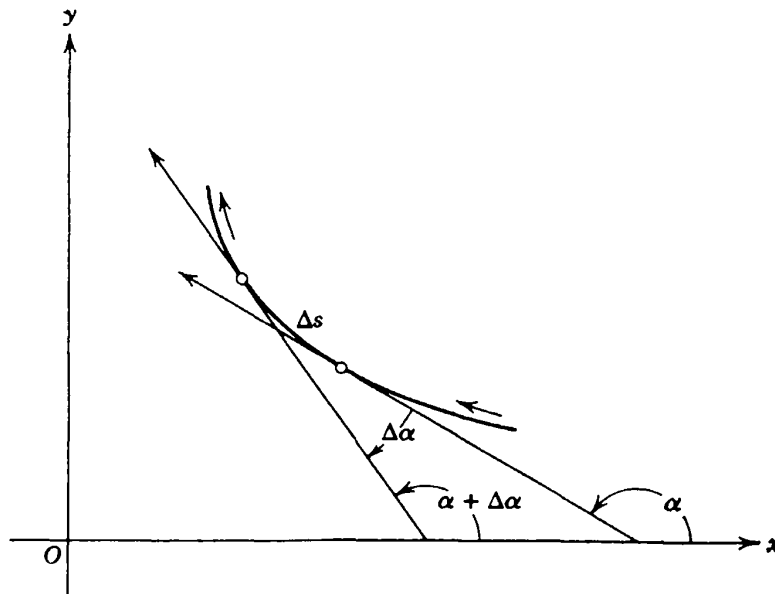


Figura 4.21(a) Curvatura  $\kappa = \lim \Delta\alpha/\Delta s$  de una curva. (En el caso ilustrado se tiene  $\kappa < 0$ .)



metro, en tanto que el signo de  $\kappa$  depende del sentido sobre la curva que corresponde a  $t$  creciente. Obviamente,  $\kappa > 0$  significa que  $\alpha$  crece con  $s$ , esto es, que la tangente gira contra reloj conforme se recorre la curva con  $s$  o  $t$  crecientes (ver Fig. 4.21a). En este caso la orientación de la curva  $C$  es tal que el lado positivo de ella también es su lado "interno", esto es, el lado hacia el cual  $C$  se dobla.

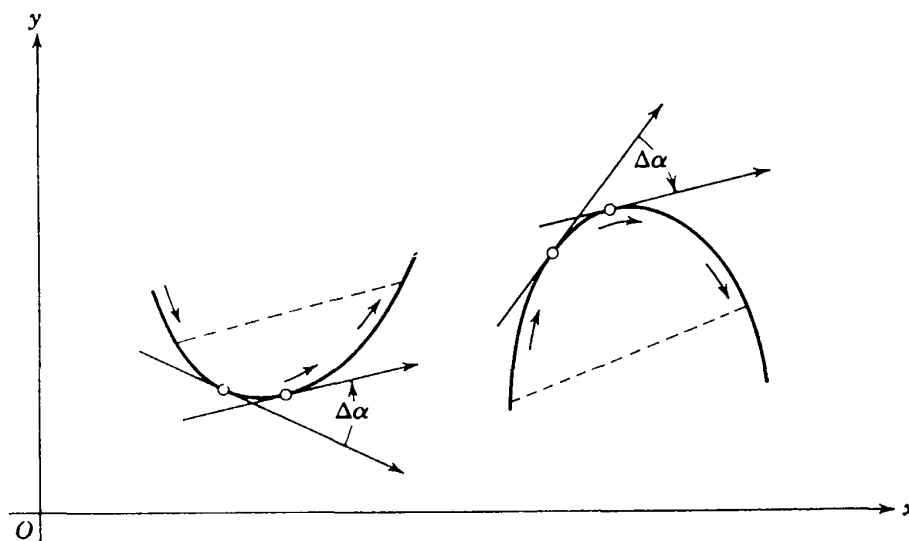


Figura 4.22 Gráfica de una función  $f(x)$  convexa (izquierda) y cóncava (derecha).

Si la curva está dada mediante una ecuación  $y = f(x)$ , se tiene, usando  $x$  como parámetro,

$$(16) \quad \kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

donde  $y'$  e  $y''$  son las derivadas de  $y$  con respecto a la variable  $x$ . Aquí el signo de la curvatura es el que corresponde a las  $x$  crecientes. Obviamente,  $\kappa$  es positiva para  $y'' > 0$ ; en este caso la tangente gira contra reloj conforme  $x$  crece; y la función  $f(x)$  se llama *convexa*. La porción de la curva que une dos puntos cualesquiera está por debajo de la línea recta que une los mismos puntos. Para  $y'' < 0$  la tangente gira en el sentido del reloj para  $x$  creciente, y la función  $f$  se llama *cóncava*. (Fig. 4.22.) Aquí la curva está por encima de la cuerda que une dos de sus puntos. El caso intermedio en que la curvatura tiene el valor cero corresponde (en términos generales) a un *punto de inflexión*, en el cual  $y'' = 0$  (ver p. 258).

*Ejemplos.* Para la curvatura de la circunferencia de radio  $a$  dada por  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$  se encuentra el valor constante  $1/a$  a partir de la fórmula general (15). Así, la curvatura de una circunferencia recorrida en el sentido contra reloj es la recíproca del radio. Este resultado nos asegura que nuestra definición de curvatura es realmente adecuada; pues en

el caso de una circunferencia pensamos como cosa natural que la recíproca del radio sea una medida de su curvatura.

Un segundo ejemplo es la curva definida mediante la función  $y = x^3$ . La curvatura es

$$\kappa = \frac{6x}{(1 + 9x^4)^{3/2}}.$$

Para  $x < 0$  la función  $y = x^3$  es cóncava puesto que  $\kappa < 0$ , y la tangente gira en el sentido del reloj, en tanto que para  $x = 0$  se tiene un punto de inflexión, y para  $x > 0$  la función se vuelve convexa.

Una función cuya curvatura es idénticamente igual a cero es una línea recta, como puede verse fácilmente por nuestra definición, y la línea recta es la única curva que satisface esa condición.

### *Circunferencia de curvatura y centro de curvatura*

Introducimos  $\rho = 1/\kappa$ . La cantidad  $|\rho| = 1/|\kappa|$  se llama *radio de curvatura* en el punto en cuestión. (Es infinito en un punto de inflexión, en el que  $\kappa = 0$ .) Para una circunferencia el radio de curvatura en cualquier punto es justamente el radio de la circunferencia.

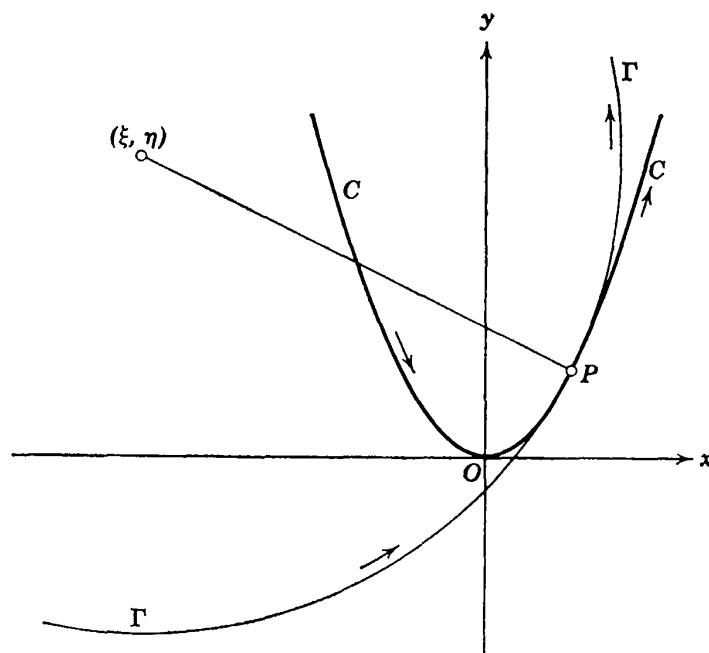
A cualquier punto  $P = (x, y)$  de la curva  $C$  se le asigna una circunferencia tangente a  $C$  en  $P$  y que tiene la misma curvatura que  $C$  cuando la curva y la circunferencia se recorren en el mismo sentido en  $P$ . Esta circunferencia se llama *circunferencia de curvatura* de la curva  $C$  en el punto  $P$ .<sup>1</sup> Su centro es el *centro de curvatura* de la curva  $C$  correspondiente al punto  $P$ . (Fig. 4.23). Puesto que  $C$  y el círculo tienen el mismo radio de curvatura, el radio de la circunferencia debe ser el radio de curvatura  $|\rho|$  de  $C$ , y el centro  $(\xi, \eta)$  de la misma debe estar sobre la normal a  $C$  en el punto  $P$  y a una distancia  $|\rho|$  de este punto. Además, puesto que  $C$  y la circunferencia se curvan hacia el mismo lado, el centro está a lo largo de la dirección normal en  $P$ , sobre el lado positivo o el negativo según que la curvatura  $\kappa$  sea positiva o negativa.

La dirección que va de  $P$  al centro de curvatura forma un ángulo  $\alpha + \pi/2$  con el eje  $x$  positivo si  $\kappa > 0$ . Así, si  $\xi, \eta$  son las coordenadas del centro de curvatura y  $x, y$  las de  $P$ , se tiene [Ver Ec. (7), p. 364]:

$$\frac{\xi - x}{\rho} = \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen} \alpha = \frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

$$\frac{\eta - y}{\rho} = \operatorname{sen} \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

<sup>1</sup> Algunos dicen "círculo de curvatura", aunque es claro que se trata de una *circunferencia*. Tal lenguaje erróneo aparece en varias lenguas. (*N. del R.*)



**Figura 4.23.** Círculo de curvatura  $\Gamma$  y centro de curvatura  $(\xi, \eta)$  correspondientes a un punto  $P$  de la curva  $C$ .

Por lo tanto, para  $\kappa > 0$  resulta

$$(17) \quad \xi = x - \frac{\rho \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \eta = y + \frac{\rho \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Si el arco cuya longitud es  $s$  se toma como parámetro  $t$ , se obtienen las sencillas expresiones

$$(17a) \quad \xi = x - \rho \dot{y}, \quad \eta = y + \rho \dot{x}.$$

Las mismas fórmulas para  $\xi, \eta$  se obtienen cuando  $\kappa < 0$ , en cuyo caso el radio de curvatura es  $-\rho$  y, además, la dirección que va de  $P$  al centro forma un ángulo  $\alpha - \pi/2$  con el eje  $x$  positivo.

*La circunferencia de curvatura como circunferencia osculatrix*

Las fórmulas (17) dan una expresión para el centro de curvatura en términos del parámetro  $t$  correspondiente al punto  $P$  de la curva. Conforme  $t$  recorre todos los valores del intervalo paramétrico, el centro de curvatura describe una curva, la llamada *evoluta* de la curva dada; y, puesto que, junto con  $x$  e  $y$ , se tienen que considerar  $\dot{x}, \dot{y}$  y  $\rho$  como funciones conocidas de  $t$ , las fórmulas anteriores dan las ecuaciones paramétricas de esta evoluta. En el Apéndice I, p. 442, se encontrarán ejemplos y una discusión de las propiedades geométricas de la evoluta.

Dos curvas cualesquiera se dice que “*osculan*” en un punto  $P$ , o que tienen “*contacto de orden dos*” en  $P$ , si dichas curvas pasan por  $P$ , tienen

la misma tangente en  $P$  y tienen también la misma curvatura cuando se orientan de la misma manera. Obviamente, dos curvas osculantes tienen la misma circunferencia y el mismo centro de curvatura en  $P$ . Si las curvas están dadas mediante ecuaciones  $y = f(x)$  e  $y = g(x)$  en forma no paramétrica, es fácil expresar la condición de que ellas tengan un punto de contacto  $P$  y las mismas tangentes y curvaturas en ese punto. Si  $x$  es la abscisa del punto de contacto  $P$ , se tiene  $f(x) = g(x)$ ,  $f'(x) = g'(x)$ ; y la igualdad de las curvaturas es expresada mediante

$$\frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}} = \frac{g''(x)}{[1 + g'^2(x)]^{3/2}},$$

y, por lo tanto, también es  $f''(x) = g''(x)$ . Así, la condición para que exista un punto de contacto con curvaturas iguales es que los valores de  $f$  y  $g$ , junto con los valores de las derivadas primera y segunda, coincidan en ese punto.

Considérense una curva  $C: y = f(x)$  y su circunferencia de curvatura  $\Gamma$  en  $P$  representada mediante  $y = g(x)$  en una vecindad de  $P$ . Puesto que la circunferencia  $\Gamma$  coincide con su circunferencia de curvatura, vemos que  $C$  y  $\Gamma$  tienen la misma circunferencia de curvatura y, por lo tanto, osculan en  $P$ . Consecuentemente, en el punto de contacto es  $f(x) = g(x)$ ,  $f'(x) = g'(x)$ ,  $f''(x) = g''(x)$ . Se dice que esta circunferencia es “la circunferencia que más se aproxima” a la curva en el punto  $P$  de contacto, puesto que ninguna otra circunferencia que intersecta a la curva en el punto de contacto tiene “contacto de orden dos” con  $C$  en ese punto. La circunferencia de curvatura es la *circunferencia osculante* u *osculatriz*. (Véase también capítulo 5, p. 478.)

Por otra parte, de la misma manera que la tangente a una curva es el límite, para  $P_1 \rightarrow P$ , de una recta que pasa por dos puntos consecutivos  $P$  y  $P_1$  de  $C$ , se puede demostrar que la circunferencia de curvatura en  $P$  es el límite de las circunferencias que pasan por tres puntos  $P, P_1, P_2$ , para  $P_1 \rightarrow P$  y  $P_2 \rightarrow P$ . La demostración se deja al lector. (Ver problema 4, p. 455.)

### i. Cambio de ejes de coordenadas. Invariancia

Las propiedades inherentes a una situación geométrica o física no dependen del sistema de coordenadas específico o “marco de referencia” con respecto al cual dichas propiedades son formuladas. El carácter intrínseco de propiedades tales como distancia, longitud o ángulo debe reflejarse en enunciados que muestren que las respectivas fórmulas permanecen inalterables o son *invariantes* si se pasa de un sistema de coordenadas a otro. Algunos comentarios breves referentes a este punto son oportunos en esta sección.

Se usarán las ecuaciones generales que relacionan las coordenadas  $x, y$  de un punto  $P$  en un sistema de coordenadas con las coordenadas  $\xi, \eta$  del mismo punto  $P$  en cualquier otro sistema. La posición relativa del segundo conjunto de ejes de coordenadas respecto al primer conjunto está caracterizada mediante las coordenadas  $a, b$  que el origen del segundo sistema tiene respecto al primer sistema, y mediante el ángulo  $\gamma$  que el eje positivo  $\xi$  forma con el eje  $x$  positivo.<sup>1</sup> Las coordenadas  $(x, y)$  y  $(\xi, \eta)$  del mismo punto en los dos sistemas están relacionadas (cfr. Fig. 4.24) por medio de la transformación

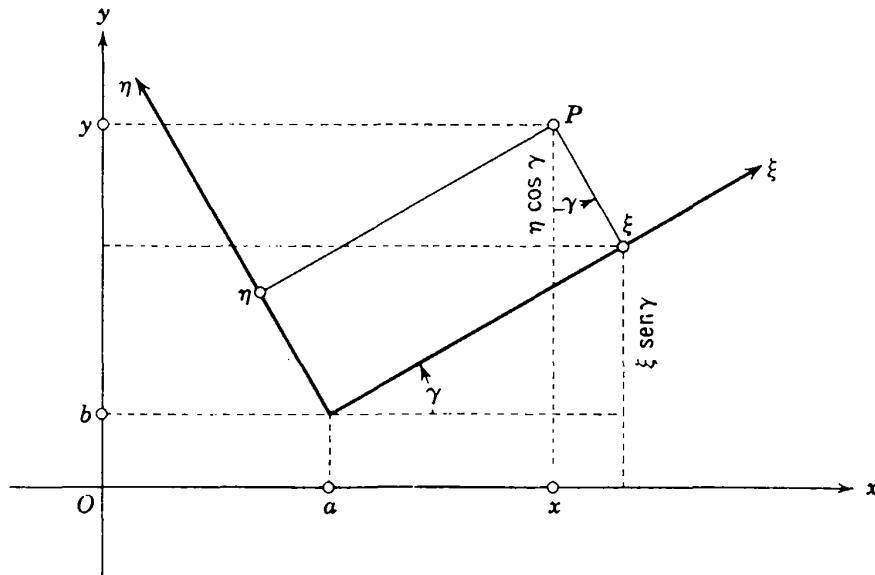


Figura 4.24 Cambio de ejes coordenados.

$$(18) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos \gamma - \eta \operatorname{sen} \gamma + a, \\ y &= \xi \operatorname{sen} \gamma + \eta \cos \gamma + b. \end{aligned}$$

Para  $\gamma = 0$  no se tiene rotación de ejes sino solamente un *desplazamiento paralelo* o *traslación*, y las fórmulas toman la forma sencilla  $x = \xi + a$ ,  $y = \eta + b$ .

Resolviendo las ecuaciones para  $\xi, \eta$  en términos de  $x, y$  se encuentra

$$(18a) \quad \begin{aligned} \xi &= (x - a) \cos \gamma + (y - b) \operatorname{sen} \gamma, \\ \eta &= -(x - a) \operatorname{sen} \gamma + (y - b) \cos \gamma. \end{aligned}$$

Si  $x$  e  $y$  son funciones de un parámetro  $t$  que define una curva, a partir de estas fórmulas se obtienen inmediatamente expresiones para  $\xi$  y  $\eta$  como funciones de  $t$ , dando la representación paramétrica de la misma curva

<sup>1</sup> Nos restringimos a sistemas coordenados "dextrógiros", en los cuales la dirección positiva del segundo sistema de ejes se obtiene mediante una rotación de  $90^\circ$  contra reloj del primer sistema.

en el sistema  $\xi, \eta$ . Derivando con respecto a  $t$  (las cantidades  $a, b, \gamma$ , que fijan la posición relativa entre los sistemas de coordenadas, no dependen de  $t$ ) se obtiene la transformación de las “componentes de velocidad”, esto es, la transformación para las derivadas de las coordenadas con respecto a  $t$ :

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cos \gamma - \dot{\eta} \sin \gamma, \quad \dot{y} = \dot{\xi} \sin \gamma + \dot{\eta} \cos \gamma.^1$$

Se confirma que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2.$$

Entonces, la expresión  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  tiene el mismo valor en todos los sistemas de coordenadas. Esta propiedad de invariancia es, por supuesto, obvia a partir de la interpretación de esta cantidad como la medida de cambio respecto a  $t$  de la longitud a lo largo de la curva,  $ds/dt$ . El lector puede verificar mediante un cálculo sencillo que también la expresión  $\kappa = (\dot{x}\ddot{y} - x\dot{y}) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-3/2}$  para la curvatura es invariante. (Esto, por supuesto, se obtiene también directamente a partir del hecho de que los ángulos que la tangente forma con los ejes  $\xi$  y  $x$ , respectivamente, difieren sólo en el valor constante  $\gamma$ , de manera que  $\kappa = d\alpha/ds$  no puede cambiar.)

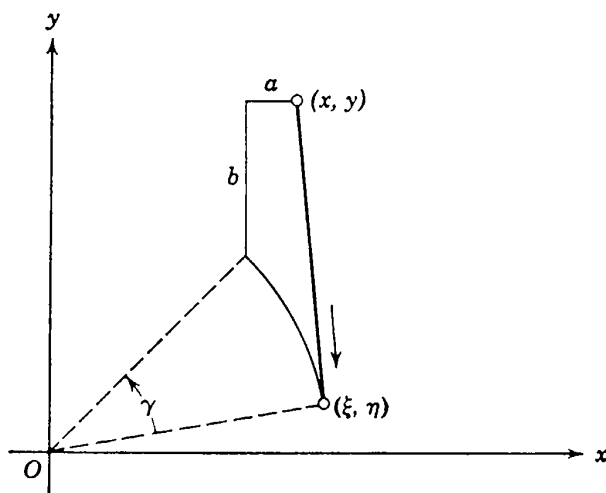


Figura 4.25 Desplazamiento del punto  $P$  de la posición  $(x, y)$  a la posición  $(\xi, \eta)$ .

Las ecuaciones (18) que relacionan las coordenadas  $x, y$  con las coordenadas  $\xi, \eta$  son a menudo interpretadas en una forma diferente que corresponde a un desplazamiento. En esta interpretación, los punto  $P$  son des-

<sup>1</sup> En algunas aplicaciones físicas, donde  $t$  representa el tiempo, la posición relativa de los dos sistemas de coordenadas también depende de  $t$ . Supóngase que  $x, y$  representan las coordenadas de una partícula en un sistema coordenado en reposo, en tanto que  $\xi, \eta$  son las coordenadas de la misma partícula respecto a un sistema móvil, por ejemplo, uno sujeto a la Tierra. Las funciones  $x(t), y(t)$  describen la trayectoria de la partícula según la ve un observador en reposo, en tanto que  $\xi(t), \eta(t)$  describen la trayectoria vista por un observador móvil. Las fórmulas que relacionan  $\dot{x}, \dot{y}$  con  $\dot{\xi}, \dot{\eta}$  tienen entonces que incluir también los términos que provienen de derivar  $a, b$  y  $\gamma$ .

plazados en vez de serlo los ejes coordenados (Fig. 4.25). Solamente se usa un sistema de coordenadas. El punto con coordenadas  $(x, y)$  en ese sistema es transformado en el punto con coordenadas  $(\xi, \eta)$  del mismo sistema. La *invariancia de la longitud* o de la *curvatura* de una curva significan ahora que esas cantidades no cambian cuando la curva completa sufre un *movimiento rígido*.

### \*j. Movimiento uniforme en la teoría especial de la relatividad

Como se señaló en la p. 255, existen profundas analogías entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas, que tienen su contraparte geométrica en la correspondencia existente entre las propiedades de las elipses y de las hipérbolas. La relación se hará clara cuando se esté en condiciones de definir las funciones trigonométricas para un argumento imaginario y verificar que  $\cos(it) = \cosh t$ ,  $\sin(it) = i \sinh t$  (sección 7.7a). Como una aplicación de esta analogía, considérense las “rotaciones hiperbólicas” del plano, que pueden ser identificadas con las *transformaciones de Lorentz* de una recta en la teoría especial de la relatividad de Einstein.

Se encontró en (18a) de p. 379 que una rotación de los ejes de coordenadas en un ángulo  $\gamma$ , en la que el origen queda fijo, puede describirse mediante las ecuaciones

$$(18b) \quad \xi = x \cos \gamma + y \sin \gamma, \quad \eta = -x \sin \gamma + y \cos \gamma,$$

que relacionan las coordenadas  $x, y$  de un punto  $P$  en el primer sistema con sus coordenadas  $\xi, \eta$  en el segundo sistema. La distancia de  $P$  al origen está dada por la misma expresión en ambos sistemas:

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Esto surge también inmediatamente a partir de las ecuaciones de transformación si se hace uso de la identidad  $\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1$ .

Se considera ahora la transformación análoga con coeficientes que son funciones hiperbólicas en lugar de funciones trigonométricas:

$$(19) \quad \xi = x \cosh \alpha - t \sinh \alpha, \quad \tau = -x \sinh \alpha + t \cosh \alpha.$$

Estas fórmulas pueden obtenerse a partir de las fórmulas (18b) para rotaciones, tomando para el ángulo de rotación  $\gamma$  y las coordenadas  $y$  y  $\eta$  cantidades imaginarias puras:

$$\gamma = i\alpha, \quad y = it, \quad \eta = i\tau.$$

Se observa que para un valor real de  $\alpha$  (que significaría un ángulo imaginario de rotación  $\gamma$  en la interpretación original) las fórmulas (19) definen  $\xi$  y  $\tau$  como funciones lineales reales de  $x$  y  $t$ . Estas funciones tienen la propiedad especial de que

$$\begin{aligned} \xi^2 - \tau^2 &= (x \cosh \alpha - t \sinh \alpha)^2 - (-x \sinh \alpha + t \cosh \alpha)^2 \\ &= x^2 - t^2, \end{aligned}$$

como una consecuencia de la identidad  $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$ . (Esto surge, por supuesto, también a partir de la observación de que  $x^2 - t^2 = x^2 + y^2$  es el cuadrado de la distancia al origen en el plano  $x, y$ .) Ahora intérpretese  $t$  como el tiempo y  $x$  como una coordenada espacial que describe la posición de un punto en un espacio unidimensional, esto es, en una línea recta. Cualquier evento ocurre en un cierto punto y en un cierto tiempo. Estas dos partes de la información las proporcionan los dos números  $x$  y  $t$  que dan respectivamente la distancia  $x$  (con su signo) del punto al origen 0 y el tiempo  $t$  que ha transcurrido a partir del instante  $t = 0$ . En la teoría de la relatividad se adopta el punto de vista de que los valores medidos de

esta distancia y los tiempos transcurridos dependen del sistema de referencia utilizado por el observador, esto es, del sistema de coordenadas especial en el continuo espacio-tiempo. Las cantidades  $\xi$ ,  $\tau$  obtenidas a partir de las fórmulas (19) describirán el mismo evento en un sistema de referencia diferente en el cual las distancias e intervalos de tiempo pueden tener valores también diferentes. La cantidad que permanece inalterable al pasar de un sistema de referencia a otro (lo que se conoce como “transformación de Lorentz”) es

$$\sqrt{x^2 - t^2} = \sqrt{\xi^2 - \tau^2},$$

la “distancia espacio-tiempo” del evento al origen. Para un observador que use el segundo sistema, la cantidad  $\xi$  es la distancia espacial medida a partir del origen  $\xi = 0$ . Ese origen es un punto para el cual

$$x \cosh \alpha - t \sinh \alpha = 0,$$

o bien  $x/t = \tanh \alpha$ . Así, el origen del segundo sistema es un punto que en el primer sistema parece moverse con velocidad uniforme  $v = dx/dt = \tanh \alpha$  relativa al origen de este sistema. Por lo tanto, la transformación de Lorentz relaciona los valores de distancias y tiempos según los registran observadores en los dos sistemas que se mueven con velocidad relativa constante  $v$ . Aquí

$$v = \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}}$$

está comprendida necesariamente entre  $-1$  y  $+1$ , de manera que las velocidades relativas de los dos sistemas están restringidas a valores numéricamente menores que 1. El valor 1 representa aquí, para una elección adecuada de unidades, la velocidad  $c$  de la luz, que no puede ser excedida por  $v$ .

Para una  $u$  constante la ecuación  $x = ut$  corresponde a un punto que en el primer sistema se mueve con velocidad  $u$ , partiendo de  $x = 0$  en el tiempo  $t = 0$ . En el segundo sistema el mismo punto tendrá la velocidad

$$\omega = \frac{d\xi}{d\tau} = \left( \frac{d\xi}{dt} \right) / \left( \frac{d\tau}{dt} \right) = \frac{u - \tanh \alpha}{1 - u \tanh \alpha} = \frac{u - v}{1 - uv}.$$

Este resultado, válido en la teoría especial de la relatividad de Einstein, difiere del que se obtendría en la cinemática clásica, donde la velocidad  $\omega$  de un punto con respecto a un sistema que se mueve con velocidad  $v$  estaría dada simplemente por  $\omega = u - v$ . La fórmula relativista muestra que  $\omega = u$  cuando  $u = +1$  o  $-1$ ; esto corresponde al hecho, sugerido por el famoso experimento de Michelson-Morley, de que la velocidad de la luz es la misma para observadores que se mueven con velocidades diferentes.

### k. Integrales que expresan áreas dentro de curvas cerradas

En el capítulo 2 el concepto de integral fue motivado por medio de referencia al “área bajo una curva”, esto es, el área de una franja de forma especial. Esta reducción al caso especial de áreas bajo curvas no es completamente satisfactoria, pues las áreas que realmente se encuentran con más frecuencia son las de dominios limitados por curvas cerradas  $C$ , los que son de una forma más general que las franjas cuyas áreas pueden representarse mediante integrales de la forma  $\int_a^b f(x) dx$ .



*La fórmula fundamental*

Se derivará ahora una elegante representación integral de validez general para el área limitada por una curva cerrada  $C$  que está dada en forma paramétrica, descomponiendo simplemente el área en cuestión en áreas de franjas especiales. Esta representación será independiente de la representación paramétrica, así como también del sistema de coordenadas. Además, expresará el *área orientada* dentro de la curva de acuerdo con el sentido asignado a la frontera  $C$ ; esto es, asignará al área dentro de una curva cerrada simple  $C$  el signo negativo o el positivo según que la frontera esté orientada en el sentido del reloj o contra reloj.

Supóngase que la curva simple  $C$  cerrada y orientada se da mediante  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , donde  $t$  varía en el intervalo  $\alpha \leq t \leq \beta$  y el sentido de  $t$  creciente determina el sentido de  $C$ . Supóngase también que  $x$  e  $y$  son funciones continuas de  $t$  (con el mismo valor en  $t = \alpha$  que en  $t = \beta$ ) y que sus primeras derivadas  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  son continuas, con la posible excepción de un número finito de discontinuidades de salto en el caso de que  $C$  tenga esquinas. Con estas hipótesis se demostrará la fórmula fundamental

$$(20) \quad A = - \int_{\alpha}^{\beta} y \dot{x} dt = \int_{\alpha}^{\beta} x \dot{y} dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$

para el área orientada  $A$  encerrada por  $C$ .

Que las tres representaciones integrales en la fórmula son equivalentes se sigue de inmediato integrando por partes la primera de ellas y usando las condiciones de periodicidad  $x(\alpha) = x(\beta)$ ,  $y(\alpha) = y(\beta)$ . La tercera representación, más simétrica, es justamente la media aritmética de las dos primeras.

La expresión (20) no depende de la posición del sistema de coordenadas en el plano. En efecto, la expresión simétrica

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$

muestra claramente que el valor de  $A$  es independiente de la elección del sistema de coordenadas. Como se vio en la p. 379, un cambio de coordenadas de un sistema  $xy$  a un sistema  $\xi\eta$  se realiza mediante una substitución de la forma

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \gamma - \eta \sin \gamma + a, \\ y &= \xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma + b, \end{aligned}$$

con  $a$ ,  $b$  y  $\gamma$  constantes. Derivando estas fórmulas respecto a  $t$  se llega a

$$\dot{x} = \xi \cos \gamma - \eta \sin \gamma, \quad \dot{y} = \xi \sin \gamma + \eta \cos \gamma$$

y, en consecuencia,

$$x \dot{y} - y \dot{x} = \xi \dot{\eta} - \eta \dot{\xi} + a \dot{y} - b \dot{x}.$$

Por tanto, la expresión  $x\dot{y} - y\dot{x}$  es invariante bajo rotaciones alrededor del origen (esto es, cuando  $a = b = 0$ ). Aún cuando  $a$  y  $b$  no se anulen, el valor de la integral para  $A$  no resulta afectado ya que

$$\int_{\alpha}^{\beta} (a\dot{y} - b\dot{x}) dt = (ay - bx) \Big|_{\alpha}^{\beta} = 0$$

para la curva cerrada  $C$ .

*Prueba de la fórmula fundamental (20). Integrales de línea sobre arcos simples.* La fórmula básica (20) se prueba con algunos pasos sencillos.

Primero, sea  $C$  un arco simple *orientado*, con punto inicial  $P_0$  y punto final  $P_1$ . Sea  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  cualquier representación paramétrica de  $C$  con  $P_0$  y  $P_1$  correspondiendo respectivamente a  $t = t_0$ , y  $t = t_1$ . (Aquí  $t_0$  puede ser mayor o menor que  $t_1$ .) Entonces la integral

$$A = - \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt$$

depende solamente de  $C$  y no de la representación paramétrica particular. Esta es una consecuencia obvia de la regla de sustitución. Si se introduce un nuevo parámetro  $\tau$  mediante la función monótona  $\tau = \chi(t)$ , donde  $\tau_0 = \chi(t_0)$ ,  $\tau_1 = \chi(t_1)$ , la integral correspondiente es <sup>1</sup>

$$- \int_{\tau_0}^{\tau_1} y \frac{dx}{d\tau} d\tau = - \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} dt = - \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt = A.$$

Queda, por consiguiente, justificado el omitir en la expresión para la integral  $A$  la referencia a cualquier parámetro especial  $t$ , pudiendo escribirse simplemente

$$A = A_C = - \int_C y dx.$$

Aquí,  $A_C$  para un arco simple y orientado  $C$  debe calcularse refiriendo el arco a un parámetro  $t$ , usando  $dx = (dx/dt) dt$  y tomando como límites para la integración sobre  $t$  los valores paramétricos correspondientes a los puntos extremos de  $C$  en el orden determinado por la orientación del arco.\*

Si  $C'$  es el arco que se obtiene de  $C$  cambiando la orientación de éste, esto es, el arco con punto inicial  $P_1$  y punto final  $P_0$ , usando la misma representación paramétrica para  $C'$  se tiene

<sup>1</sup> Suponemos continuas no sólo  $x(t)$  e  $y(t)$  sino también  $\tau(t)$  y sus derivadas, con la posible excepción, para estas últimas, de un número finito de discontinuidades de salto.

\* La integral  $\int_C y dx$  es un ejemplo de las *integrales de línea* generales  $\int_C p dx + q dy$ , que serán discutidas en el Volumen II.

$$A_{C'} = - \int_{t_1}^{t_0} y \frac{dx}{dt} dt = + \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt = - A_C.$$

Por lo tanto, cambiando la orientación del arco se cambia el signo de la integral  $A_C$ .

Si el arco simple y orientado  $C$  se divide en subarcos orientados  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , cada uno con la misma orientación que  $C$ , se tendrá obviamente

$$A_C = A_{C_1} + A_{C_2} + \dots + A_{C_n}.$$

Pues, en efecto, en una representación paramétrica de  $C$  en la que, por ejemplo, el sentido de  $C$  sea el de  $t$  creciente, esta descomposición corresponde a una subdivisión del intervalo paramétrico  $t_0 \leq t \leq t_n$  de  $C$  en subintervalos  $t_0 \leq t \leq t_1, t_1 \leq t \leq t_2, \dots, t_{n-1} \leq t \leq t_n$  correspondientes a  $C_1, \dots, C_n$ . El resultado se obtiene entonces por la aditividad de las integrales.

La aditividad de las integrales  $A_C$  facilita mucho el cálculo de  $A_C$  en casos en que  $C$  consiste de varios arcos suaves  $C_1, C_2, \dots$ , cada uno con su propia representación paramétrica. No se necesita construir artificialmente una representación paramétrica única para la curva  $C$  completa, sino calcular cada  $A_{C_i}$  separadamente a partir de su representación paramétrica y luego efectuar la suma. Además, los  $A_{C_i}$  pueden sumarse en cualquier orden; sólo se necesita asegurarse de que todos los  $C_i$  tienen la misma orientación que  $C$ .

#### *La integral de línea fundamental para curvas cerradas*

Se puede ahora definir  $A_C$  para cualquier curva simple  $C$ , cerrada y orientada, descomponiendo  $C$  en arcos simples  $C_1, \dots, C_n$  con orientaciones que coincidan con la de  $C$  y formando la suma de los  $A_{C_i}$ .<sup>1</sup> Si la curva  $C$  completa tiene la representación paramétrica  $x = x(t), y = y(t)$ , para  $\alpha \leq t \leq \beta$ , donde el sentido de las  $t$  crecientes da la orientación de  $C$  y donde  $t = \alpha$  y  $t = \beta$  corresponden al mismo punto, entonces  $A_C$  está dada nuevamente por

$$A_C = - \int_{\alpha}^{\beta} y \frac{dx}{dt} dt.$$

De la misma manera se puede definir  $A_C$  para curvas orientadas  $C$  no simples mediante la descomposición en arcos simples orientados, aún cuando  $C$  consista de varias partes ajenas pero con la condición de que cada porción de  $C$  tenga un sentido definido.

<sup>1</sup> Que el valor de  $A_C$  así obtenido no depende de la manera particular en que  $C$  es dividida en arcos simples, se demuestra fácilmente: primero, la propiedad aditiva de  $A$  para arcos simples muestra que el refinamiento de una subdivisión dada por la adición de puntos de división no cambia el valor resultante de  $A_C$ ; además, dos subdivisiones cualesquiera pueden reemplazarse por aquélla que es un refinamiento de ambas, sin que cambie el valor de  $A_C$ .

*La integral fundamental como un área*

Regresamos ahora al punto principal; esto es, identificamos las expresiones  $A_C$  para una curva cerrada con la intuitiva cantidad geométrica que representa el área orientada que  $C$  encierra.

Consideramos primero un dominio  $G$  limitado en su parte superior por un arco  $C_1$ :  $y = g(x)$  para  $a \leq x \leq b$ ; en su parte inferior por un arco  $C_3$ :  $y = f(x)$  para  $a \leq x \leq b$ ; y a los lados por los segmentos de recta  $C_2$ ,

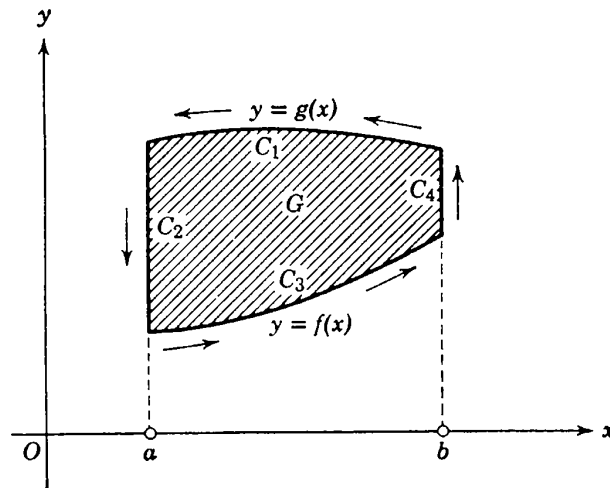


Figura 4.25(a) Área de una "celda".

$C_4$  dados por  $x = a$  y  $x = b$  (Fig. 4.25a). Aquí se permite que  $C_2$  y  $C_4$  se reduzcan a puntos. Si damos a  $C$  la orientación contra reloj, el arco  $C_1$  será recorrido en el sentido de las  $x$  decrecientes y el arco  $C_3$  en el de las  $x$  crecientes. Al formar  $A_C$  como la suma de las cuatro  $A_{C_i}$ , las porciones  $C_2$  y  $C_4$  a lo largo de las cuales  $x$  es constante no aportan contribución alguna pues  $dx/dt = 0$ . Usando  $x$  como parámetro sobre los arcos  $C_1$  y  $C_3$  encontramos

$$\begin{aligned} A_C &= A_{C_1} + A_{C_3} = - \int_b^a g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Esto es, claramente, el área positiva del dominio  $G$  en el caso en que  $G$  quede completamente por encima del eje  $x$ , siendo igual a la diferencia entre las áreas que están respectivamente por debajo de las curvas  $C_1$  y  $C_3$ . Podemos siempre garantizar que  $G$  queda por encima del eje  $x$  reemplazando simplemente  $y$  por  $y + c$ , donde  $c$  es una constante adecuada, esto es, mediante una traslación en la dirección  $y$ . Esto no altera las áreas y tampoco afecta el valor  $A_C = - \int_C y dx$  para una curva cerrada  $C$ ,

como vimos antes. Por lo tanto, para dominios  $G$  del tipo descrito que tengan fronteras  $C$  intersectadas a lo más en dos puntos por paralelas al eje  $y$ , la integral  $A_C$  representa el área, tomada positiva si  $C$  está orientada contra reloj y negativa para la orientación opuesta. El mismo resultado se obtiene para áreas limitadas por curvas  $C$  que sean intersectadas a lo más en dos puntos por paralelas al eje  $x$ . Lo único que se necesita es escribir

$A_C$  en la forma  $\int_C x dy$  e intercambiar  $x$  e  $y$  en el argumento anterior.

A los dominios  $G$  pertenecientes a uno de estos dos tipos los llamaremos “celdas”. Hablaremos de “celdas orientadas” cuando las curvas de frontera correspondientes tengan una orientación o la otra.

Consideremos ahora un dominio  $G$  con la frontera orientada  $C$  y que esté compuesto por cierto número de celdas simples  $G_1, G_2, \dots, G_n$  con fronteras  $C_1, \dots, C_n$  respectivamente; y se supone que todas estas celdas tienen la misma orientación, digamos contra reloj. Entonces, como se indica en la Fig. 4.26, las partes de las fronteras que son comunes a dos celdas adyacentes se recorren en sentidos diferentes al considerar sucesivamente dichas partes como arcos de frontera de una celda y de la celda vecina.

Por consiguiente, si sumamos las integrales  $A_{C_i} = - \int_{C_i} y dx$  que se tienen para las diferentes celdas las contribuciones de todas las fronteras interiores de las celdas se anulan, y así obtenemos

$$A = \sum_{i=1}^n A_{C_i} = \sum_{i=1}^n \left( - \int_{C_i} y dx \right) = - \int_C y dx = A_C,$$

donde  $A$  es el área orientada del dominio total  $G$ .

Así, las fórmulas (20) para el área  $A$  de un dominio orientado  $G$  interior a una curva cerrada quedan demostradas para todos los dominios que puedan descomponerse en celdas simples, por ejemplo, trazando paralelas a los ejes coordenados.

Para todos los dominios que encontraremos, esta hipótesis se satisfará obviamente; como ocurre, por ejemplo, para dominios poligonales.

### *Comentarios adicionales*

Finalmente, podría agregarse que de la misma manera se demuestra la validez de la fórmula para el área aún en el caso de dominios múltiplemente conexos, tales como los dominios en forma de anillo, que puedan descomponerse en un número finito de celdas simples. En estos casos todas las curvas de frontera tienen que ser recorridas sistemáticamente en un sentido tal que el interior de  $G$  esté siempre en el lado “izquierdo” o siempre en el lado “derecho”.

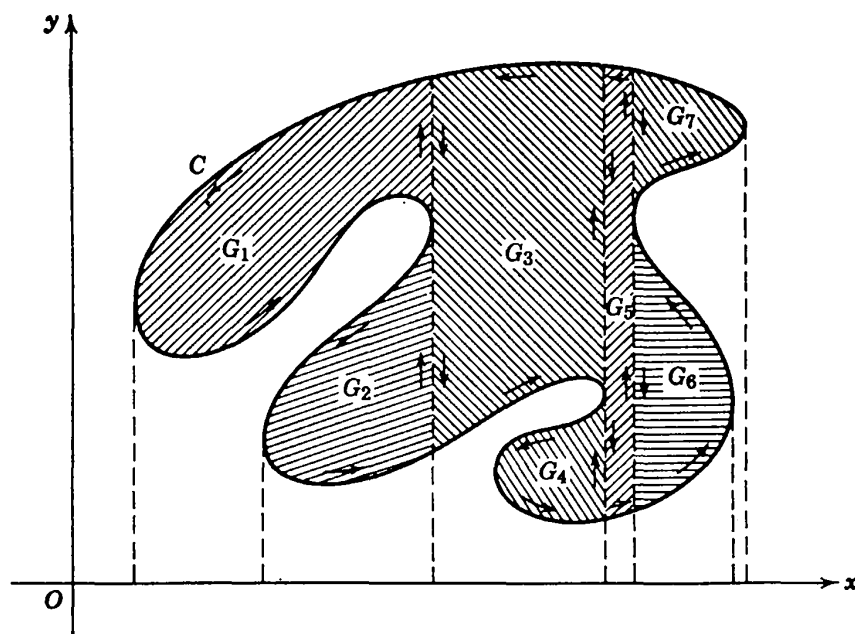


Figura 4.26 Descomposición de un dominio orientado en celdas orientadas.

Las fórmulas para  $A$  conservan su validez aún cuando  $C$  no sea una curva simple sino una que se intersecta a sí misma dividiendo el plano en más de dos regiones. En este caso podemos considerar la fórmula como una guía para interpretar adecuadamente el área como una combinación aditiva de las áreas orientadas que corresponden a las diferentes partes conexas del plano limitadas por  $C$ . Este asunto se discutirá en el Apéndice II de este capítulo.

*Ejemplos.* Como un ejemplo, podemos encontrar el *área encerrada por la elipse*  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ . Usando la orientación contra reloj para la elipse y a partir de la representación paramétrica

$$x = a \cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t, \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

encontramos que

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

*Área en coordenadas polares.* Para expresar el área en coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  consideremos primero el área  $A$  de la región limitada por un segmento de curva  $r = f(\theta)$  y los radios  $\theta = \alpha$  y  $\theta = \beta$ . Suponemos que  $\alpha < \beta$  y que  $\theta$  puede usarse como parámetro a lo largo de la curva (esto es, que puntos diferentes tienen ángulos polares diferentes). Usamos para  $A$  la expresión

$$A = \frac{1}{2} \int (x dy - y dx) = \frac{1}{2} \int (xy' - yx') dt.$$

la cual tiene entonces que ser extendida sobre la parte curva de la frontera y sobre los dos radios. Sobre los radios  $\theta = \alpha$  y  $\theta = \beta$  podemos usar  $r$  como parámetro y, a partir de  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  y  $\theta = \text{constante}$ , encontrar que  $\dot{x} = -\sin \theta$ ,  $\dot{y} = \cos \theta$ , de manera que  $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2$ . Sobre la parte curva usamos  $\theta$  como parámetro. Entonces,

$$\dot{x} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta, \quad \dot{y} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta,$$

y así  $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2$ . En consecuencia,

$$(21) \quad A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Para una curva cerrada simple  $C$  que contenga el origen en su interior y sea intersectada por cada rayo que parta del origen en exactamente un punto, podemos usar  $\theta$  como parámetro, con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , y encontrar así para el área encerrada

$$(22) \quad A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta.$$

La fórmula (21) para el área en coordenadas polares puede también derivarse directamente a partir de la definición de integral. Para ello se divide el dominio en sectores trazando radios desde el origen (Fig. 4.27). Cada sector queda descrito por las desigualdades

$$\theta_{i-1} < \theta < \theta_i, \quad 0 < r < f(\theta).$$

Obviamente, el área del sector queda entre las áreas de los sectores circulares inscripto y circunscripto; el área de un sector del dominio es entonces igual a  $\frac{1}{2}r^2(\theta_i - \theta_{i-1})$ , donde  $r$  está comprendido entre el valor más grande y el más pequeño de  $f(\theta)$  para el intervalo  $\theta_{i-1} < \theta < \theta_i$ . Conforme se refina la subdivisión la suma de las áreas de los sectores del dominio evidentemente converge a la integral  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ .

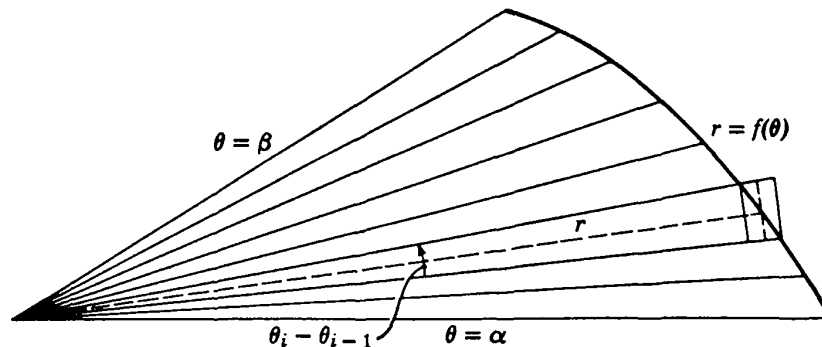


Figura 4.27 Área en coordenadas polares.

*Área en un lemniscato*

Como un ejemplo de la Ec. (21), consideremos el área limitada por una espira de una lemniscata. La ecuación de la lemniscata (cfr. pp. 125-126) es  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ ; y una espira es obtenida haciendo variar  $\theta$  de  $-\pi/4$  a  $+\pi/4$ . Esto da la expresión

$$a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = a^2$$

para el área. Por supuesto, la otra espira tiene un área del mismo valor absoluto pero de signo negativo.

*Área limitada por una hipérbola*

Consideremos ahora el área de un sector limitado por la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ , la cual hemos calculado ya en la p. 255 de una manera más bien complicada (véase Fig. 3.12). Para la hipérbola (más bien, para su rama derecha) se tiene la representación paramétrica  $x = \cosh t$ ,  $y = \sinh t$ . Para el doble del área limitada por la hipérbola y los radios que van a los puntos con parámetros 0 y  $t$  se encuentra el valor

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^t (x\dot{y} - y\dot{x}) \, d\tau = \int_0^t (\cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau) \, d\tau \\ &= \int_0^t d\tau = t. \end{aligned}$$

(Nuevamente, no hay contribución a la integral por parte de los radios.)

**1. Centro de masa y momento de una curva**

Veamos ahora algunas ideas que surgen en la mecánica. Consideramos un sistema de  $n$  partículas en un plano cuyas masas son  $m_1, m_2, \dots, m_n$  y las respectivas ordenadas  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Entonces llamamos a

$$T = \sum_{v=1}^n m_v y_v = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n$$

el *momento del sistema de partículas con respecto al eje  $x$* . La expresión  $\eta = T/M$ , donde  $M$  denota la masa total  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  del sistema, define la *altura del centro de masa* del sistema de partículas sobre el eje  $x$ , o sea su ordenada. Es, justamente, la *media pesada* de  $y_1, y_2, \dots, y_n$  usando los “factores peso”  $m_1, m_2, \dots, m_n$  (ver. p. 164). Por lo tanto,  $\eta$  es la *altura promedio* de las masas. Análogamente definimos el momento con respecto al eje  $y$  y la abscisa del centro de masa.

Podemos extender ahora fácilmente estas definiciones de momento al caso de una curva a lo largo de la cual hay una masa distribuida unifor-



mamente, y definir así las coordenadas  $\xi$  y  $\eta$  del centro de masa de tal curva. (La hipótesis de una densidad constante, digamos  $\mu$ , a lo largo de la curva no es esencial: cualquier distribución continua podría discutirse igualmente.)

En un procedimiento típico en la mecánica se comienza con un sistema de un número finito  $n$  de partículas y se pasa luego a un límite para  $n \rightarrow \infty$ . Para hacer esto, introducimos la longitud de arco  $s$  como un parámetro sobre la curva y subdividimos ésta en arcos de longitudes  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ , usando  $(n - 1)$  puntos de división. Representamos la masa  $\mu \Delta s_i$  de cada arco  $\Delta s_i$  como si estuviese concentrada en un punto arbitrario del arco, por ejemplo, el punto con ordenada  $y_i$ .

Por definición, el momento con respecto al eje  $x$  de este sistema de partículas es

$$T = \mu \sum y_i \Delta s_i.$$

Si ahora la mayor de las cantidades  $\Delta s_i$  tiende a cero, esta suma tiende a un límite dado por la integral

$$(23) \quad T = \mu \int_{s_0}^{s_1} y ds = \mu \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

la cual es, por consiguiente, aceptada en forma natural como la definición del momento de la curva con respecto al eje  $x$ . Puesto que la masa total de la curva es igual a su longitud multiplicada por  $\mu$ , es decir,

$$\mu \int_{s_0}^{s_1} ds = \mu (s_1 - s_0),$$

llegamos inmediatamente a las siguientes expresiones para las coordenadas del centro de masa de la curva:

$$(24) \quad \xi = \frac{\int_{s_0}^{s_1} x ds}{s_1 - s_0}, \quad \eta = \frac{\int_{s_0}^{s_1} y ds}{s_1 - s_0}.$$

Estos asertos son realmente *definiciones* del momento y del centro de masa de una curva; pero son extensiones tan directas del caso más simple de un número finito de partículas, que uno naturalmente espera —como es, precisamente, el caso— que cualquier afirmación en mecánica sobre el centro de masa o el momento de un sistema de partículas sea válida también para distribuciones continuas de masa a lo largo de curvas.

### m. Area y volumen de una superficie de revolución

#### *Regla de Guldin*

Si se hace girar una curva  $y = f(x)$ , para la cual  $f(x) \geq 0$ , alrededor del eje  $x$ , se describe una superficie llamada *superficie de revolución*. El

área de esta superficie, cuyas abscisas suponemos comprendidas entre las cotas  $x_0$  y  $x_1 > x_0$ , se obtiene mediante una discusión análoga a la anterior. En efecto, si reemplazamos la curva por un polígono inscrito, en vez de una superficie curva tendremos una figura compuesta por un cierto número de conos truncados. La intuición sugiere que podríamos definir el área de la superficie de revolución como el límite de las áreas de estas superficies cónicas cuando la longitud del lado mayor del polígono inscrito tiende a cero. De la geometría elemental sabemos que el área de cada cono truncado es igual a la longitud de la generatriz multiplicada por el perímetro de la sección circular de radio medio. (Fig. 4.28.) Si sumamos estas expresiones y después realizamos el paso al límite obtenemos para el área la expresión

$$(25) \quad A = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} y \, ds = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} \, dx = 2\pi \eta (s_1 - s_0).$$

Expresado en palabras, este resultado dice que el área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generadora multiplicada por la distancia recorrida por el centro de masa (*regla de Guldin*).

Del mismo modo encontramos que el volumen interior a la superficie de revolución, limitado en los extremos por los planos  $x = x_0$  y  $x = x_1 > x_0$ , está dado por la expresión

$$(26) \quad V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2 \, dx.$$

Esta fórmula se obtiene siguiendo la idea intuitiva de que el volumen en cuestión es el límite de los volúmenes de las figuras antes mencionadas consistentes en conos truncados. El resto de la demostración se deja al lector.

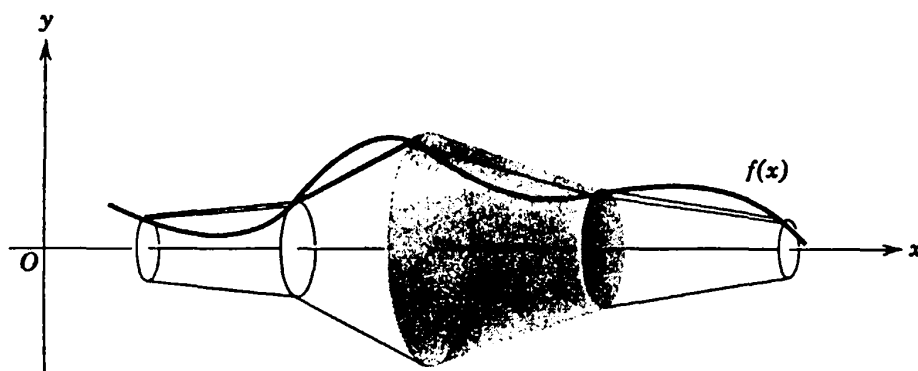


Figura 4.28 Área de una superficie de revolución.

#### n. Momento de inercia

En el estudio de la rotación de un objeto juegan un papel importante ciertas cantidades llamadas *momentos de inercia*. Estas serán mencionadas aquí brevemente.

Supongamos que una partícula de masa  $m$  a una distancia  $y$  del eje  $x$  gira uniformemente alrededor de ese eje con velocidad angular  $\omega$  (esto es, en la unidad de tiempo gira un ángulo  $\omega$ ). La *energía cinética* de la partícula, expresada como la mitad del producto de la masa por el cuadrado de la velocidad, es obviamente

$$\frac{m}{2} (y\omega)^2:$$

Al coeficiente de  $\frac{1}{2}\omega^2$ , esto es, a la cantidad  $my^2$  le llamamos el *momento de inercia de la partícula alrededor del eje  $x$* .

Análogamente, si tenemos  $n$  partículas con masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  y ordenadas  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , llamamos a la expresión

$$T = \sum_i m_i y_i^2$$

el *momento de inercia del sistema de masas* alrededor del eje  $x$ . El momento de inercia es una cantidad que pertenece al propio sistema de masas, sin referencia a su estado de movimiento. Su importancia radica en el hecho de que en la rotación rígida del sistema alrededor de un eje, sin que cambie la distancia mutua entre pares de partículas, la energía cinética se obtiene multiplicando el momento de inercia alrededor de ese eje por la mitad del cuadrado de la velocidad angular. Así, el momento de inercia alrededor de un eje juega el mismo papel en la rotación alrededor de ese eje que la masa en el movimiento rectilíneo.

Supóngase que se tiene ahora una curva arbitraria  $y = f(x)$  comprendida entre las abscisas  $x_0$  y  $x_1 > x_0$ , a lo largo de la cual una masa está distribuida uniformemente con densidad unitaria. Para definir el momento de inercia de esta curva se procede justamente como en la sección anterior, llegándose a la siguiente expresión para el momento de inercia alrededor del eje  $x$

$$(27) \quad T_x = \int_{s_2}^{s_1} y^2 ds = \int_{x_0}^{x_1} y^2 \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Para el momento de inercia alrededor del eje  $y$  se tiene, en forma semejante,

$$(28) \quad T_y = \int_{s_0}^{s_1} x^2 ds = \int_{x_0}^{x_1} x^2 \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

## 4.2 Ejemplos

De la gran variedad de curvas planas escogemos unos pocos ejemplos típicos para ilustrar los conceptos discutidos.

**a. La cicloide común**

De las ecuaciones  $x = a(t - \operatorname{sen} t)$ ,  $y = a(1 - \operatorname{cost} t)$  (cfr. (1), p. 347) se obtiene  $\dot{x} = a(1 - \operatorname{cost} t)$ ,  $\dot{y} = a \operatorname{sen} t$ , y para la longitud de arcos se tiene

$$s = \int_0^\alpha \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^\alpha \sqrt{2a^2(1 - \operatorname{cost} t)} dt.$$

Puesto que  $1 - \operatorname{cost} t = 2 \operatorname{sen}^2 t/2$ , el integrando es igual a  $2a \operatorname{sen} t/2$  y, por consiguiente, con  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , se obtiene

$$s = 2a \int_0^\alpha \operatorname{sen} (t/2) dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\alpha = 4a \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 8a \operatorname{sen} \frac{\alpha}{4}.$$

Si, en particular, se considera la longitud de arco entre dos cúspides sucesivas, debe tomarse  $\alpha = 2\pi$  ya que el intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$  de los valores del parámetro corresponde a una revolución del círculo giratorio. Así se obtiene el valor  $8a$ ; esto es, la longitud de arco de la cicloide entre dos cúspides sucesivas es igual a *cuatro* veces el diámetro del círculo giratorio.

De manera análoga se calcula el área limitada por un arco de la cicloide y el eje  $x$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} y \dot{x} dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{cost} t)^2 dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \operatorname{cost} t + \operatorname{cos}^2 t) dt \\ &= a^2 \left( t - 2 \operatorname{sen} t + \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 3a^2\pi. \end{aligned}$$

Esta área es, por consiguiente, tres veces el área del círculo giratorio.

Para el radio de curvatura  $|\rho| = 1/|\kappa|$  se tiene, por la Ec. (15) de p. 373,

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}} = -2a \sqrt{2(1 - \operatorname{cost} t)} = -4a \left| \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right|.$$

En los puntos  $t = 0$ ,  $t = \pm 2\pi, \dots$  esta expresión tiene el valor cero. Estos puntos son las cúspides; en ellos la cicloide interseca el eje  $x$  en ángulo recto.

El área de la superficie de revolución que se forma al hacer girar un arco de la cicloide alrededor del eje  $x$  está dado, según nuestra fórmula (25), p. 392, por

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{s\alpha} y ds = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \operatorname{cost} t) \cdot 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt \\ &= 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \frac{t}{2} dt = 16a^2\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 u du \end{aligned}$$

$$= 16a^2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 u) \operatorname{sen} u \, du.$$

La última integral puede evaluarse mediante la substitución  $\cos u = v$ ; y se encuentra que

$$A = 16a^2\pi \left( -\cos u + \frac{1}{3} \cos^3 u \right) \Big|_0^\pi = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

Como ejercicio, el lector puede calcular la altura por encima del eje  $x$ ,  $\eta$ , del centro de masa de la cicloide, y también el momento de inercia  $T_x$ . Los resultados son

$$\eta = \frac{4}{3}a = \frac{A}{2\pi s} \quad \text{y} \quad T_x = \frac{256}{15}a^3.$$

### b. La catenaria

La catenaria<sup>1</sup> es la curva definida por la ecuación  $y = \cosh x$ . La longitud de la catenaria entre las abscisas  $x = a$  y  $x = b$  es

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 x} \, dx = \int_a^b \cosh x \, dx = \operatorname{senh} b - \operatorname{senh} a.$$

Para el área de la superficie de revolución obtenida haciendo girar la catenaria alrededor del eje  $x$ , la llamada superficie *catenoide*, se encuentra

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b \cosh^2 x \, dx = 2\pi \int_a^b \frac{1 + \cosh 2x}{2} \, dx \\ &= \pi(b - a + \frac{1}{2} \operatorname{senh} 2b - \frac{1}{2} \operatorname{senh} 2a). \end{aligned}$$

A partir de aquí se obtiene a continuación la altura del centro de masa del arco de  $a$  a  $b$ :

$$\eta = \frac{A}{2\pi s} = \frac{b - a + \frac{1}{2} \operatorname{senh} 2b - \frac{1}{2} \operatorname{senh} 2a}{2(\operatorname{senh} b - \operatorname{senh} a)}.$$

Finalmente, para la curvatura se tiene

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\cosh x}{\cosh^3 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

<sup>1</sup> El nombre proviene del hecho de que una cadena suspendida de sus extremos adopta la forma de esta curva. Es curioso que la misma curva surja en una aplicación física completamente diferente. Una película de jabón, limitada por dos círculos en el espacio que están en planos paralelos y con sus centros sobre la misma perpendicular a los planos, tiene la forma de una superficie de revolución obtenida al hacer girar la catenaria alrededor del eje  $x$ .

### c. La elipse y la lemniscata

Las longitudes de arco de estas dos curvas no pueden reducirse a funciones elementales, sino que pertenecen a la clase de "integrales elípticas" mencionadas en la p. 318.

Para la elipse  $y = (b/a) \sqrt{a^2 - x^2}$  se obtiene

$$s = \frac{1}{a} \int \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx = a \int \sqrt{\frac{1 - \eta^2 \xi^2}{1 - \xi^2}} d\xi,$$

donde se ha hecho  $x/a = \xi$ ,  $1 - b^2/a^2 = \eta^2$ . Mediante la substitución  $\xi = \text{sen } \phi$  esta integral puede escribirse en la forma

$$s = a \int \sqrt{1 - \eta^2 \text{sen}^2 \phi} d\phi.$$

Aquí, para obtener el semiperímetro de la elipse debe hacerse que  $x$  recorra el intervalo de  $-a$  a  $+a$ , que corresponde al intervalo

$$-1 \leq \xi \leq +1 \quad \text{o} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq +\frac{\pi}{2}.$$

Para la lemniscata, cuya ecuación en coordenadas polares  $r, t$  es  $r^2 = 2a^2 \cos 2t$ , de manera análoga se obtiene

$$\begin{aligned} s &= \int \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} dt = \int \sqrt{2a^2 \cos 2t + 2a^2 \frac{\text{sen}^2 2t}{\cos 2t}} dt \\ &= a\sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{\cos 2t}} = a\sqrt{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - 2 \text{sen}^2 t}} \end{aligned}$$

Si se introduce  $u = \tan t$  como variable independiente en la última integral, se tiene

$$\text{sen}^2 t = \frac{u^2}{1 + u^2}, \quad dt = \frac{du}{1 + u^2},$$

y, en consecuencia,

$$s = a\sqrt{2} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}.$$

En una espira completa de la lemniscata,  $u$  corre de  $-1$  a  $+1$ , y la longitud de arco es entonces igual a

$$a\sqrt{2} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}$$

una integral elíptica especial que jugó un papel importante en las investigaciones de Gauss.

### 4.3 Vectores en dos dimensiones

Para las discusiones de curvas planas y muchos otros tópicos en geometría, mecánica y física, la notación vectorial constituye una herramienta conveniente y casi indispensable. En este capítulo desarrollaremos y aplicaremos el concepto de vector en dos dimensiones, dejando para el Volumen II las extensiones a dimensiones superiores.

#### *Explicación intuitiva*

Muchos entes matemáticos y físicos quedan caracterizados por un solo número, llamado “escalar”, ya que mide el ente con relación a una escala. Como ejemplos tenemos ángulos, longitudes, áreas, tiempos, masas y temperaturas. Sin embargo, existen otros entes para los cuales tal caracterización no es posible; por ejemplo, la forma de un triángulo, la posición de un punto en el espacio, la aceleración o la dirección del movimiento de una partícula y el estado de tensión de un cuerpo. Para identificar cada una de estas entidades se requieren varios números. Gradualmente se han ido desarrollando conceptos matemáticos que van más allá del continuo de números reales y que permiten representar tales entidades con un solo símbolo.<sup>1</sup> Los *vectores* en un plano son objetos matemáticos cuya descripción requiere dos componentes de información: una *longitud* y una *dirección*. A este tipo pertenecen, por ejemplo, la posición relativa y orden de dos puntos, la velocidad y la aceleración de una partícula, la fuerza que actúa sobre una partícula, etc.<sup>2</sup>

Geométrica o intuitivamente, un vector es esencialmente un segmento de recta *dirigido*, del plano o del espacio, caracterizado por su longitud o magnitud y por su dirección. Ordinariamente los vectores se indican con *flechas* de la longitud dada y apuntando en la dirección que se especifica. A menos que explícitamente se imponga una restricción, el *vector es “libre”*, esto es, la localización del extremo inicial del segmento dirigido (o flecha) no es parte inherente de las especificaciones que se dan para el vector.

A pesar de que conceptos físicos tales como velocidad, aceleración y fuerza son ejemplos primarios de vectores en las aplicaciones, definiremos los vectores geoméricamente mediante “traslaciones” o “desplazamientos paralelos”.

El análisis vectorial comienza simplemente dando un nombre, “vector”, a tales segmentos de recta dirigidos o desplazamientos paralelos. Sin em-

<sup>1</sup> Por supuesto, los números complejos  $a + ib = z$  son entes de este tipo, siendo símbolos que representan pares de números reales  $a, b$ . Es, sin duda, conveniente algunas veces usar números complejos en vez de vectores.

<sup>2</sup> Los vectores son insuficientes para algunos propósitos; por ejemplo, para describir tensiones o curvaturas de espacios se usan entes más generales llamados “tensores”.

bargo, la característica decisiva de los vectores no consiste en tener un nombre que los unifique sino en que (de la misma manera que los números complejos) pueden combinarse entre ellos o con escalares (esto es, números ordinarios) mediante un conjunto de reglas, dando origen al álgebra o análisis vectorial, de manera tal que tienen interpretaciones naturales en las diferentes aplicaciones, como, por ejemplo, la superposición de dos velocidades o el trabajo realizado en un desplazamiento venciendo una fuerza. En el lenguaje vectorial que surge intuitivamente, muchas relaciones matemáticas y físicas pueden expresarse en forma concisa y clara.

### a. Definición de vectores mediante traslaciones. Notaciones

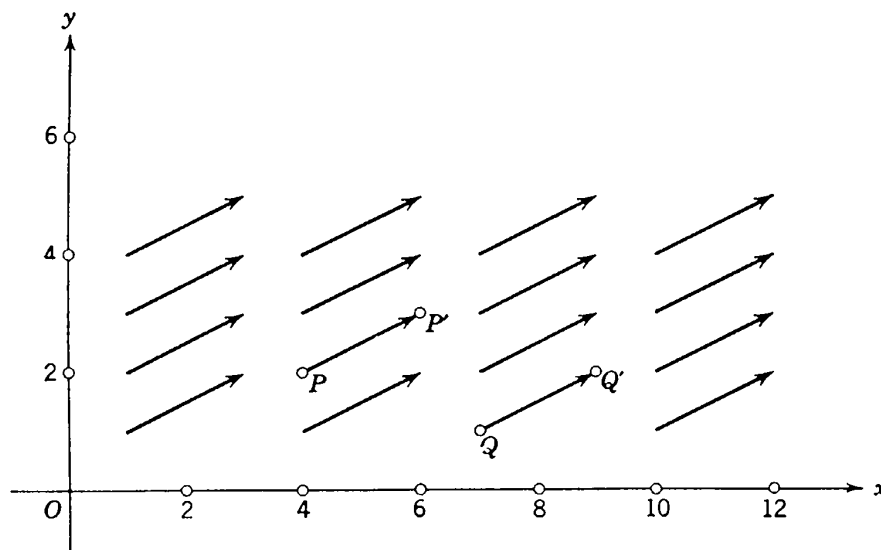
El tipo más simple de transformación en el plano es una *traslación* o *desplazamiento paralelo*. Una traslación desplaza o transforma cualquier punto  $P = (x, y)$  en el punto  $P' = (x', y')$  de coordenadas

$$x' = x + a, \quad y' = y + b,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. La traslación está completamente determinada por las constantes  $a$  y  $b$ , que llamaremos *componentes* de la traslación. Usaremos el término “vector” como otro nombre para “traslación”. Usando negritas para denotar vectores o traslaciones, escribimos  $\mathbf{R} = (a, b)$  para el vector con componentes  $a, b$  (Fig. 4.29).

Las componentes del vector  $\mathbf{R}$  están determinadas por un par de puntos correspondientes  $P = (x, y)$  y  $P' = (x', y')$ , ya que entonces

$$a = x' - x, \quad b = y' - y.$$



**Figura 4.29** La traslación  $x' = x + 2$ ,  $y' = y + 1$  correspondiente al vector  $\mathbf{R} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} = (2, 1)$ .



Claramente, para puntos  $P$  y  $P'$  cualesquiera siempre es posible encontrar una traslación  $\mathbf{R}$  que transforme  $P$  en  $P'$ . A este vector lo denotamos por  $\mathbf{R} = \overrightarrow{PP'}$ . Cualquier par ordenado de puntos  $P = (x, y)$ ,  $P' = (x', y')$ , esto es, cualquier segmento orientado determina así el vector  $\mathbf{R} = \overrightarrow{PP'} = (x' - x, y' - y)$ . Obsérvese que un segundo par de punto  $Q = (\xi, \eta)$ ,  $Q' = (\xi', \eta')$  define el mismo vector si  $\xi' - \xi = x' - x$  y  $\eta' - \eta = y' - y$ ; la misma traslación  $\mathbf{R}$  transforma entonces  $P$  en  $P'$  y  $Q$  en  $Q'$ . Los vectores  $\mathbf{R}$  están determinados por dos números, sus *componentes*, de la misma manera que los puntos de un plano lo están por sus dos coordenadas. La diferencia básica consiste en que un vector está representado geoméricamente por un *par* de puntos. En la representación  $\mathbf{R} = \overrightarrow{PP'}$  llamamos a  $P$  el *punto inicial* y a  $P'$  el *punto final*. Para un  $\mathbf{R}$  dado, uno de los puntos, digamos, el punto inicial  $P = (x, y)$ , puede escogerse arbitrariamente; entonces el punto final  $P' = (x', y')$  queda determinado en forma única por las relaciones  $x' = x + a$ ,  $y' = y + b$ . Intercambiando los puntos inicial y final se obtiene el vector *opuesto*  $\overrightarrow{P'P} = (-a, -b)$ .

Si escogemos como punto inicial el origen  $O = (0, 0)$ , podemos asociar unívocamente un vector  $\mathbf{R}$  con todo punto  $Q = (x, y)$  tomando simplemente  $\mathbf{R} = \overrightarrow{OQ}$ . El vector  $\mathbf{R}$  con punto inicial fijo  $O$  se llama entonces *vector de posición* de  $Q$ . Las componentes de la posición del punto  $Q$  son simplemente las coordenadas  $x, y$  de ese punto.

El vector  $\mathbf{R}$  de componentes  $a = 0$ ,  $b = 0$  se llama *vector nulo* y se denota por  $\mathbf{O}$ . Corresponde a una traslación que deja fijo cualquier punto:

$$\mathbf{O} = (0, 0) = \overrightarrow{PP'}$$

La distancia  $r$  entre dos puntos  $P = (x, y)$  y  $P' = (x', y')$  después sólo del vector  $\mathbf{R} = (a, b) = \overrightarrow{PP'}$ , puesto que

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

A esta distancia le llamamos la *longitud del vector*  $\mathbf{R}$ , y escribimos  $r = |\mathbf{R}|$ . La longitud de  $\mathbf{R}$  es siempre un número positivo a menos que  $\mathbf{R} = \mathbf{O}$  (ver Fig. 4.30).

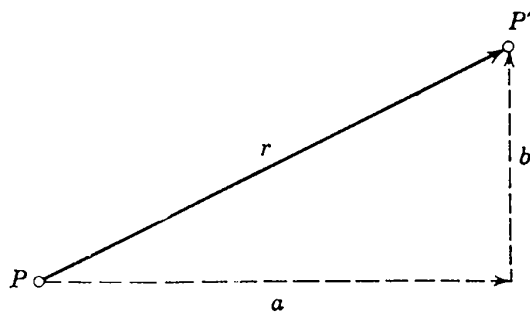


Figura 4.30 Componentes  $a, b$  y longitud  $r$  de un vector  $\mathbf{R} = \overrightarrow{PP'}$ .

Definimos el *producto* de un vector  $\mathbf{R} = (a, b)$  por un número o “es-  
 calar”  $\lambda$  como el vector

$$\mathbf{R}^* = \lambda\mathbf{R} = (\lambda a, \lambda b).$$

Con  $\lambda = -1$  tenemos en  $\mathbf{R}^* = (-a, -b)$  el vector *opuesto* a  $\mathbf{R}$  (Fig.  
 4.31).

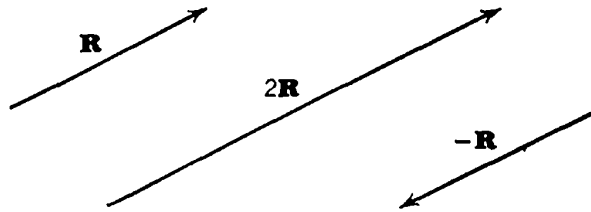


Figura 4.31 Múltiplos escalares de un vector  $R$ .

Si  $\mathbf{R} = \overrightarrow{PP'}$   $= (a, b)$ , con  $P = (x, y)$ ,  $P' = (x', y')$ , podemos represen-  
 tar  $\mathbf{R}^* = \lambda\mathbf{R}$  como  $\overrightarrow{PP''}$ , donde  $P'' = (x'', y'') = (x + \lambda a, y + \lambda b)$  (ver  
 Fig. 4.32). Para  $a = b = 0$  se tiene, por supuesto,  $P'' = P' = P$ . Para  $a$  y  $b$   
 no simultáneamente nulos, el punto  $P'' = (x'', y'') = (x + \lambda a, y + \lambda b)$  re-  
 corre completamente, para  $\lambda$  variable, la recta

$$x''b - y''a = xb - ya.$$

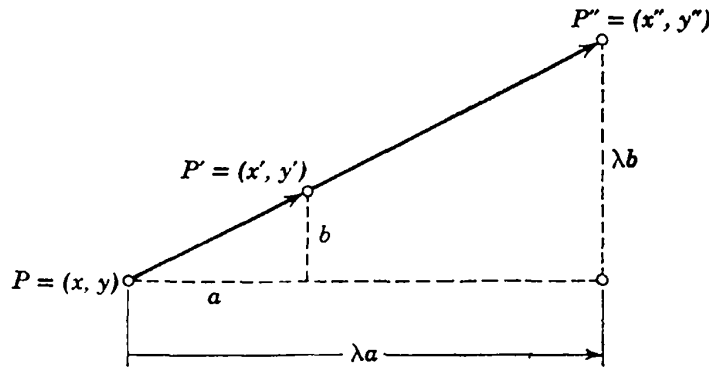


Figura 4.32 La relación vectorial  $\mathbf{R}^* = \overrightarrow{PP''} = \lambda \overrightarrow{PP'}$  para  $\lambda = \frac{2}{3}$ .

El valor  $\lambda = 0$  da  $P'' = P$ , en tanto que  $\lambda = 1$  da  $P'' = P'$ . Así,  $P''$  está  
 sobre la recta que pasa por  $P$  y  $P'$ . Para  $\lambda > 0$  los puntos  $P''$  y  $P'$  están  
 sobre el *mismo lado* de  $P$ ; para  $\lambda < 0$ , están en *lados opuestos*.

Los dos vectores  $\mathbf{R} = (a, b)$  y  $\mathbf{R}^* = (a^*, b^*)$  se dice que tienen el *mis-  
 mo sentido* si  $\mathbf{R}^* = \lambda\mathbf{R}$  con  $\lambda$  positivo, y sentidos opuestos si  $\lambda < 0$ . Si  
 $\mathbf{R} = \mathbf{O}$ , esto significa que también  $\mathbf{R}^* = \mathbf{O}$ . Si  $\mathbf{R} \neq \mathbf{O}$ , la condición neces-  
 aria y suficiente para que  $\mathbf{R}^*$  tenga el mismo sentido que  $\mathbf{R}$  es que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^*}{\sqrt{a^{*2} + b^{*2}}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^*}{\sqrt{a^{*2} + b^{*2}}}.$$

A las cantidades

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{|\mathbf{R}|} = \frac{a}{r}, \quad \eta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{|\mathbf{R}|} = \frac{b}{r},$$

que determinan la dirección del vector,  $\mathbf{R}$  les llamamos *cosenos directores* de  $\mathbf{R}$ . No están definidos, por supuesto, para  $\mathbf{R} = \mathbf{O}$ . Puesto que  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ , podemos siempre encontrar un ángulo  $\alpha$  y un correspondiente ángulo  $\beta = \pi/2 - \alpha$  tales que

$$\xi = \cos \alpha, \quad \eta = \sin \alpha = \cos \beta.$$

El ángulo  $\alpha$  se llama *ángulo de dirección* de  $\mathbf{R}$  (Fig. 4.33). Está determinado sólo a menos de un múltiplo par de  $\pi$ . Para  $\mathbf{R} = \vec{PP'}$  tenemos

$$\cos \alpha = \frac{x' - x}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{y' - y}{r}.$$

Obviamente,  $\alpha$  es el ángulo entre el eje  $x$  positivo y la recta que va de  $P$  a  $P'$ . Más precisamente, una rotación del eje  $x$  positivo alrededor del origen en un ángulo  $\alpha$  (considerado positivo si la rotación es contra reloj, negativo en el caso opuesto) dará a dicho eje la dirección de  $P$  a  $P'$ . El vector opuesto  $-\mathbf{R} = (-a, -b)$  tiene cosenos directores  $-\xi$  y  $-\eta$ , y ángulos de dirección que difieren de  $\alpha$  en múltiplos impares de  $\pi$ . Si el punto inicial  $P$  del vector  $\mathbf{R} = \vec{PP'}$  es el origen, el ángulo de dirección  $\alpha$  de  $\mathbf{R}$  es simplemente el ángulo polar  $\theta$  de  $P'$ .

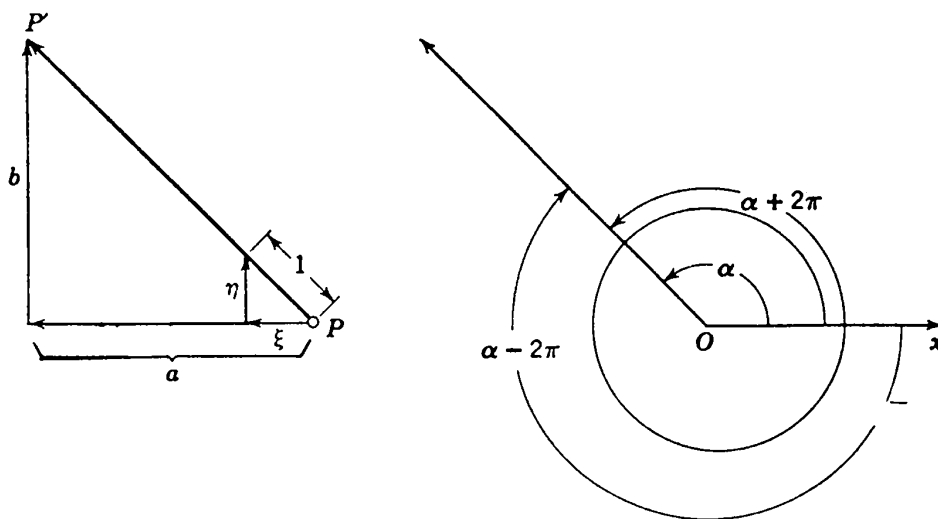


Figura 4.33 Cosenos directores  $\xi$ ,  $\eta$  y ángulos de dirección para un vector  $\vec{PP'}$ .

## b. Adición y multiplicación de vectores

*Suma de vectores*

Los vectores se han definido mediante traslaciones, esto es, como ciertas transformaciones de puntos en el plano. Existe una manera perfectamente general de combinar dos transformaciones cualesquiera aplicándolas *sucesivamente*.

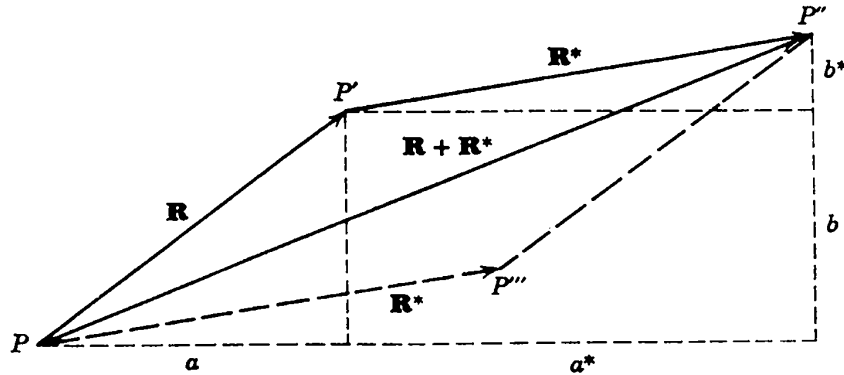


Figura 4.34 Adición de los vectores  $\overrightarrow{PP'} = (a, b)$  y  $\overrightarrow{P'P''} = (a^*, b^*)$ .

*sivamente*. Si la primera transformación lleva el punto  $P$  al punto  $P'$  y la segunda lleva  $P'$  a  $P''$ , la transformación combinada es aquella que lleva  $P$  a  $P''$ . En el caso de dos vectores  $\mathbf{R} = (a, b)$  y  $\mathbf{R}^* = (a^*, b^*)$ , el vector  $\mathbf{R}$  transformará el punto  $P = (x, y)$  en el punto  $P' = (x + a, y + b)$  y  $\mathbf{R}^*$  transformará  $P'$  en  $P'' = (x + a + a^*, y + b + b^*)$ . La transformación de  $P$  en  $P''$  resultante es también una traslación; la llamaremos la *suma* o la *resultante de los vectores*  $\mathbf{R} = \overrightarrow{PP'}$  y  $\mathbf{R}^* = \overrightarrow{P'P''}$ , y la denotaremos por  $\mathbf{R} + \mathbf{R}^*$  (Fig. 4.34).<sup>1</sup> Las componentes de la suma son  $a + a^*$  y  $b + b^*$ . Así, nuestra definición de suma de dos vectores es

$$\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P''} = \overrightarrow{PP''},$$

o bien, si describimos los vectores por sus componentes,

$$(a, b) + (a^*, b^*) = (a + a^*, b + b^*).$$

Si  $\mathbf{R}^*$  se toma con el mismo punto inicial que  $\mathbf{R}$ , digamos  $\mathbf{R}^* = \overrightarrow{PP''}$ , los puntos  $P, P''', P''$  y  $P'$  constituyen los vértices de un paralelogramo. Los dos lados que parten de  $P$  representan los vectores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}^*$ . La suma  $\mathbf{R} + \mathbf{R}^*$  está representada por la *diagonal* que parte de  $P$  (“*construcción del paralelogramo*” para la suma de vectores).

<sup>1</sup> Esta “suma” es realmente el “producto simbólico” de las dos transformaciones, como se define en la p. 76. La notación de suma es aquí más natural debido a que corresponde a la adición de las componentes.

Las sumas vectoriales obedecen las leyes conmutativa y asociativa de la aritmética, ya que la adición de vectores se reduce a la adición de las componentes correspondientes (Fig. 4.35). Dichas sumas obedecen además las *leyes distributivas para la multiplicación de una suma de dos vectores por un número  $\lambda$  y de un vector por la suma de dos números  $\lambda, \mu$* :

$$\lambda(\mathbf{R} + \mathbf{R}^*) = \lambda\mathbf{R} + \lambda\mathbf{R}^*, \quad (\lambda + \mu)\mathbf{R} = \lambda\mathbf{R} + \mu\mathbf{R}.$$

Estas reglas nos permiten expresar un vector  $\overrightarrow{PP'}$  en términos de los vectores de posición  $\overrightarrow{OP}$  y  $\overrightarrow{OP'}$  de los puntos  $P$  y  $P'$  (Fig. 4.36):

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}.$$

Es importante darse cuenta de que, generalmente, si se va de un punto  $P$  a un punto  $Q$  pasando por los puntos  $A, B, C, \dots, E, F$ , entonces el vector  $\overrightarrow{PQ}$  es la suma de los vectores  $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \dots, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FQ}$  (Fig. 4.37).

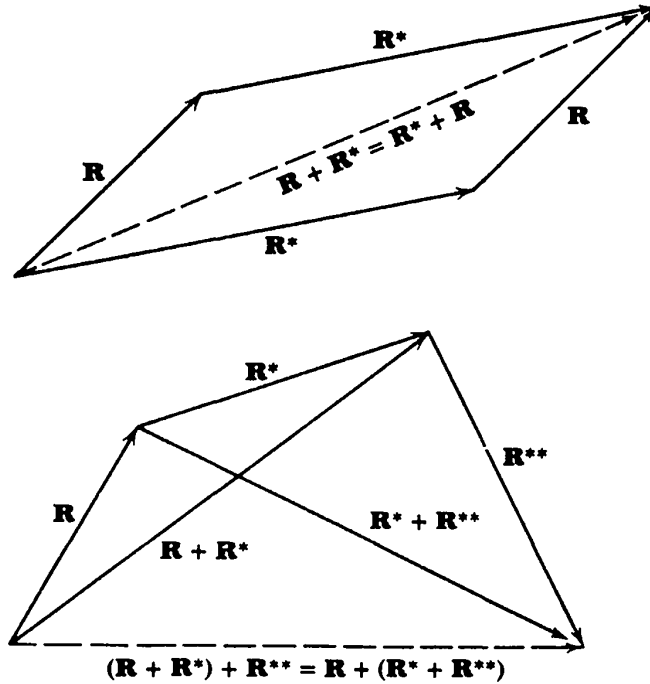


Figura 4.35 Leyes conmutativa y asociativa de la adición vectorial.

*Angulo entre vectores*

El ángulo  $\theta$  formado por un vector  $\mathbf{R}^* = (a^*, b^*)$  con el vector  $\mathbf{R} = (a, b)$  se define como la diferencia entre sus ángulos de dirección:

<sup>2</sup> Para distinguir entre vectores y números en una ecuación, siempre ponemos el número antes del vector al escribir productos. La combinación  $\mathbf{R}\lambda$  no se usará, aunque podría definirse por  $\lambda\mathbf{R} = \mathbf{R}\lambda$ .

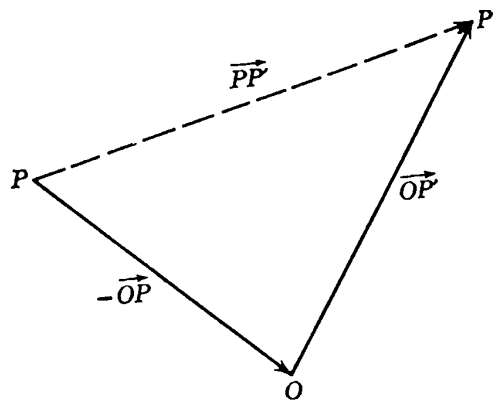


Figura 4.36  $\vec{PP'} = \vec{OP'} - \vec{OP}$ .

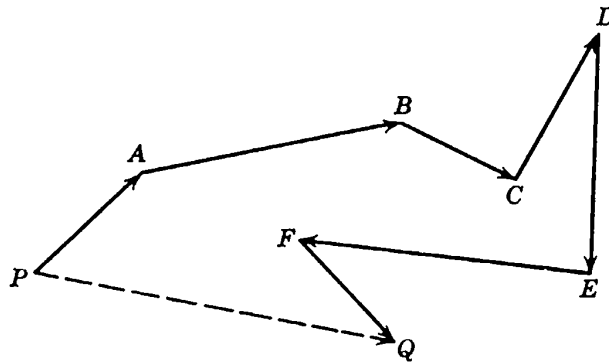


Figura 4.37  $\vec{PQ} = \vec{PA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{FQ}$ .

$\theta = \alpha^* - \alpha$ . (Aquí se supone que ninguno de los vectores  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}^*$  es el vector cero.) Nuevamente, el ángulo  $\theta$  está determinado solamente a menos de múltiplos enteros de  $2\pi$  (Fig. 4.38). Una rotación de ángulo  $\theta$  (con el signo de  $\theta$  indicando el sentido de la rotación) transformará la dirección de  $\mathbf{R}$  en la de  $\mathbf{R}^*$ . Las cantidades  $\cos \theta$  y  $\sin \theta$ , que están determinadas unívocamente, pueden inmediatamente expresarse en términos de los cosenos directores de  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}^*$ :

$$\cos \theta = \cos (\alpha^* - \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha^* + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha^*$$

$$= \frac{aa^* + bb^*}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^{*2} + b^{*2}}}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} (\alpha^* - \alpha) = \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha^* - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha^*$$

$$= \frac{ab^* - a^*b}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^{*2} + b^{*2}}}$$

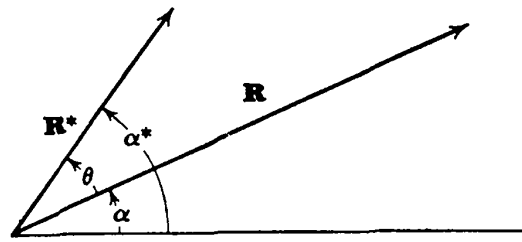


Figura 4.38. Angulo  $\theta$  que el vector  $\mathbf{R}^*$  forma con  $\mathbf{R}$ .

El denominador de cada expresión es justamente el producto  $rr^*$  de las longitudes de los vectores. Las expresiones que aparecen en los numeradores se introducen como “productos” de los dos vectores.

*Producto interior y producto exterior de dos vectores*

Se define el producto “escalar”, producto ‘interno’ o producto “punto” de dos vectores,  $\mathbf{R} = (a, b)$  y  $\mathbf{R}^* = (a^*, b^*)$ , mediante la expresión

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^* = aa^* + bb^* = rr^* \cos \theta,$$

y el producto “exterior” o producto “cruz”, por la expresión

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^* = ab^* - a^*b = rr^* \sin \theta.^1$$

Como puede fácilmente verificarse, *los productos interior y exterior obedecen las leyes distributiva y asociativa:*

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R}^* + \mathbf{R}^{**}) &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^* + \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{**}, \\ \mathbf{R} \times (\mathbf{R}^* + \mathbf{R}^{**}) &= \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* + \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{**}, \\ \lambda(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*) &= (\lambda\mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cdot (\lambda\mathbf{R}^*), \\ \lambda(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*) &= (\lambda\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \times (\lambda\mathbf{R}^*). \end{aligned}$$

*La ley conmutativa de la multiplicación también se cumple para productos interiores:*

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}.$$

Sin embargo, para productos exteriores el intercambio de los factores cambia el signo:

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^* = -\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}.$$

Dados  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{R}^*$  con el mismo punto inicial,  $\mathbf{R} = \overrightarrow{PQ}$ ,  $\mathbf{R}^* = \overrightarrow{PQ'}$ , podemos interpretar  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*$  como el producto de la proyección  $r^* \cos \theta$  del seg-

<sup>1</sup> Con nuestra definición, tanto el producto interior como el exterior son realmente “escalares”. El término “producto escalar” se reserva para el producto interior debido a que en tres dimensiones el análogo del producto exterior es un vector (en este caso, el producto exterior también se llama “*producto vectorial*”).

mento  $PQ^*$  sobre el segmento  $PQ$  y la longitud  $r$  de este segmento. El producto exterior  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$  es simplemente el doble del área del triángulo orientado  $PQQ^*$ , tomada con signo positivo si los vértices  $PQQ^*$  están ordenados contra reloj y con signo negativo para el orden inverso (Fig. 4.39).

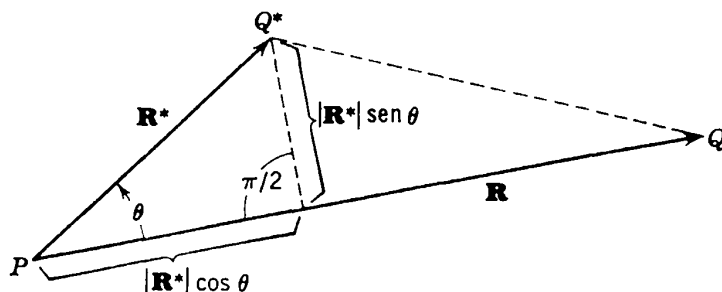


Figura 4.39 El producto vectorial  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^* = |\mathbf{R}| |\mathbf{R}^*| \sin \theta$  como el doble del área del triángulo  $PQQ^*$ .

Para cualquier vector  $\mathbf{R} = (a, b)$ ,

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = a^2 + b^2 = |\mathbf{R}|^2$$

es el cuadrado de la longitud del vector. Así,  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$  es positivo a menos que  $\mathbf{R} = \mathbf{O}$ . Por otra parte,  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  es siempre cero. La condición para que dos vectores no nulos sean mutuamente ortogonales es que  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^* = 0$ , y serán paralelos (esto es, tendrán la misma dirección y sentidos iguales u opuestos) si  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^* = 0$ .

#### *Ecuación de la recta*

Usando la notación vectorial podemos escribir fácilmente la ecuación de una recta que pasa por dos puntos. Si  $P = (x, y)$ ,  $P_0 = (x_0, y_0)$  y  $P_1 = (x_1, y_1)$  son tres puntos tales que  $P_0 \neq P_1$ , entonces  $P$  estará sobre la recta que pasa por  $P_0$  y  $P_1$  si los vectores  $\overrightarrow{P_0P}$  y  $\overrightarrow{P_0P_1}$  son paralelos, esto es, si

$$\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0P_1} = \mathbf{0}.$$

Si  $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP}$ ,  $\mathbf{R}_0 = \overrightarrow{OP_0}$  y  $\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{OP_1}$  son los vectores de posición de los tres puntos, la condición toma la forma

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) = \mathbf{0}$$

o bien

$$(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_0.$$

Substituyendo los vectores de posición por las coordenadas de los puntos se obtiene la ecuación de la recta en la forma usual (Fig. 4.40):

$$(x_1 - x_0)y - (y_1 - y_0)x = x_1y_0 - y_1x_0.$$



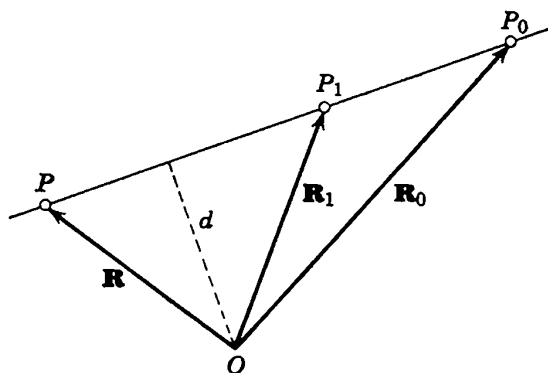


Figura 4.40 La recta en notación vectorial.

En vez de especificar dos puntos de la recta, podemos especificar sólo uno,  $P_0$ , y requerir que la recta sea paralela al vector  $\mathbf{S} = (a, b)$ . Evidentemente, la ecuación de la recta es entonces

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{S} = 0,$$

o bien

$$(x - x_0)b - (y - y_0)a = 0.$$

Para  $\mathbf{S} = \overrightarrow{P_0P_1}$  se obtiene la ecuación primera.

La distancia  $d$  de la recta al origen puede también expresarse en notación vectorial. Es claro que el producto de  $d$  y la longitud del vector  $\overrightarrow{P_0P_1}$  es el doble del área del triángulo  $OP_0P_1$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{|P_0P_1|} (\overrightarrow{OP_0} \times \overrightarrow{OP_1}) = \frac{\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0|} \\ &= \frac{x_0y_1 - x_1y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} \end{aligned}$$

Aquí se toma  $d$  con signo positivo si los puntos  $O$ ,  $P_0$  y  $P_1$  se suceden uno al otro en el sentido contra reloj.

*Vectores coordenados.* Un vector  $\mathbf{R} = (a, b)$  puede representarse en la forma

$$(29) \quad \mathbf{R} = ai + bj,$$

donde se denotan por  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  los “vectores coordenados”

$$(30) \quad \mathbf{i} = (1, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1).$$

De esta manera se divide  $\mathbf{R}$  en dos vectores  $ai$  y  $bj$  que apuntan respectivamente en las direcciones positivas de los ejes  $x$  e  $y$ . Las componentes  $a$  y  $b$  de  $\mathbf{R}$  son justamente las longitudes (con sus signos) de estos dos vectores.

En las aplicaciones se tiene a menudo necesidad de representar un vector  $\mathbf{R}$  como la resultante de vectores con dos direcciones ortogonales (esto es, mutuamente perpendiculares) dadas. Con este fin, lo mejor es introducir dos *vectores unitarios* (o sea, vectores de longitud 1)  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$  con las direcciones prescritas. La descomposición de  $\mathbf{R}$  requerida se realiza si puede representarse  $\mathbf{R}$  en la forma

$$(31) \quad \mathbf{R} = A\mathbf{I} + B\mathbf{J}$$

con escalares adecuados  $A, B$  (cfr. Fig. 4.40). Es fácil encontrar los valores de  $A$  y  $B$  en el caso en que tal representación de  $\mathbf{R}$  exista. Pues, en efecto, por hipótesis, los vectores  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$  son vectores unitarios de longitud 1, de manera que

$$(32) \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} = 1, \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = 0.$$

Formando el producto escalar de la Ec. (31) con  $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ , respectivamente, se encuentra de inmediato que  $A$  y  $B$  deben tener los valores

$$(33) \quad A = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}, \quad B = \mathbf{R} \cdot \mathbf{J};$$

es decir,  $A$  y  $B$  son las longitudes (con sus signos respectivos) de las proyecciones en las direcciones dadas del segmento que representa a  $\mathbf{R}$ .

La posibilidad de expresar  $\mathbf{R}$  como una combinación lineal (31) de  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$  se deriva de la representación (29) de  $\mathbf{R}$  en términos de  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ , siempre que pueda demostrarse que  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  mismos pueden ser expresados en términos de  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$ . Sin embargo,  $\mathbf{I} = (\alpha, \beta)$  y  $\mathbf{J} = (\gamma, \delta)$  pueden escribirse de la manera siguiente

$$(34) \quad \mathbf{I} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}, \quad \mathbf{J} = \gamma\mathbf{i} + \delta\mathbf{j}.$$

Como consecuencia de (32), las cantidades  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  deben satisfacer las llamadas relaciones de ortogonalidad

$$(35) \quad \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 + \delta^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \beta\delta = 0.$$

Si se multiplica la primera de las ecuaciones (34) por  $\delta$ , la segunda por  $\beta$ , y se restan, se obtiene

$$(36) \quad (\alpha\delta - \beta\gamma)\mathbf{i} = \delta\mathbf{I} - \beta\mathbf{J};$$

y, en forma análoga,

$$(37) \quad (\alpha\delta - \beta\gamma)\mathbf{j} = -\gamma\mathbf{I} + \alpha\mathbf{J}.$$

Aquí se tiene para los vectores unitarios mutuamente perpendiculares  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$  que

$$(38) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \mathbf{I} \times \mathbf{J} = \pm 1,$$

donde se escoge un signo u otro dependiendo de que el sentido de la rotación en  $90^\circ$  que transforme  $\mathbf{I}$  en  $\mathbf{J}$  sea contra reloj o en el sentido del reloj. En uno u otro caso las fórmulas (36) y (37) expresan  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  en términos de  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$ . Substituyendo estas expresiones en (29) se obtiene la justificación de la fórmula de representación (31) para un vector arbitrario  $\mathbf{R}$ .

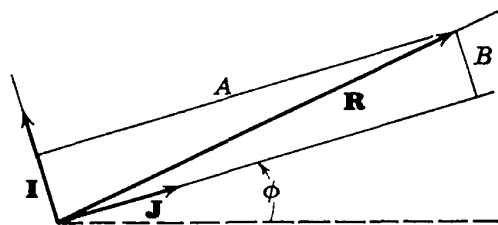
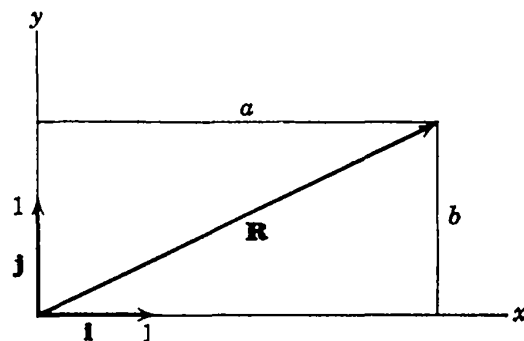


Figura 4.40

La fórmula (31) puede también interpretarse como la representación del vector  $\mathbf{R}$  en un nuevo sistema de coordenadas cuyos ejes apuntan respectivamente en las direcciones de  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$ . Las componentes de un vector unitario son al mismo tiempo los cosenos directores del ángulo de dirección  $\phi$  y  $\psi$ , respectivamente. Entonces,

$$\alpha = \cos \phi, \quad \beta = \sin \phi, \quad \gamma = \cos \psi, \quad \delta = \sin \psi.$$

Aquí se tiene  $\psi = \phi + \frac{1}{2}\pi$ , o bien  $\psi = \phi - \frac{1}{2}\pi$ . En el primer caso (que corresponde a un sistema dextrógiro con vectores coordenados  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$ ) se tiene  $\gamma = -\beta$ ,  $\delta = \alpha$ ,  $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ ; de manera que

$$(39) \quad \mathbf{I} = (\cos \phi, \sin \phi), \quad \mathbf{J} = (-\sin \phi, \cos \phi).$$

Las fórmulas (33) que dan las componentes de  $\mathbf{R}$  referidas a los vectores coordenados  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}$  toman entonces la forma

$$(40) \quad A = a \cos \phi + b \sin \phi, \quad B = -a \sin \phi + b \cos \phi.$$

Estas fórmulas expresan las relaciones entre las componentes de uno y el mismo vector  $\mathbf{R}$  en dos sistemas de coordenadas dextrógiros que se obtienen uno del otro mediante una rotación de ejes en un ángulo  $\phi$ . Si se supone que los sistemas de coordenadas tienen el mismo origen  $O$  y que  $\mathbf{R}$  es el vector de posición  $\vec{OP}$  de un punto arbitrario  $P$ , las fórmulas (40) expresan la transformación de los sistemas de coordenadas obtenidas ya en la p. 379, ecuación (18). Las componentes  $a, b$  y  $A, B$  son entonces respectivamente las coordenadas de  $P$  en los dos sistemas.

### c. Vectores variables, sus derivadas e integrales

Es natural considerar vectores  $\mathbf{R} = (a, b)$  cuyas componentes  $a, b$  sean funciones de una variable  $t$ , digamos  $a = a(t)$ ,  $b = b(t)$ . Para cualquier  $t$  se tiene entonces un vector

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = (a(t), b(t))$$

y se dice que  $\mathbf{R}(t)$  es una *función vectorial* de  $t$ . Un ejemplo lo proporciona el vector de posición de un punto que se mueve al variar el tiempo  $t$ .

Se dice que  $\mathbf{R}(t)$  tiene el límite  $\mathbf{R}^* = (a^*, b^*)$  para  $t \rightarrow t_0$  si  $a(t)$  tiene el límite  $a^*$  y  $b(t)$  el límite  $b^*$  para  $t \rightarrow t_0$ . En ese caso la longitud de  $\mathbf{R}(t)$  tiende hacia la de  $\mathbf{R}^*$  y, si  $\mathbf{R}^* \neq \mathbf{0}$ , la dirección de  $\mathbf{R}(t)$  tiende hacia la de  $\mathbf{R}^*$  (esto significa que los cosenos directores de  $\mathbf{R}$  tienden hacia los de  $\mathbf{R}^*$ ). Se dice que el vector  $\mathbf{R}(t)$  depende continuamente de  $t$  si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0),$$

esto es, si las componentes de  $\mathbf{R}$  son funciones continuas de  $t$ . La longitud y, si  $\mathbf{R}(t_0) \neq \mathbf{0}$ , también la dirección de un vector continuo varían continuamente con  $t$ .

Para introducir la *derivada de un vector* se forma para dos valores  $t$  y  $t + h$  del parámetro el cociente incremental

$$\frac{1}{h}[\mathbf{R}(t + h) - \mathbf{R}(t)] = \left[ \frac{a(t + h) - a(t)}{h}, \frac{b(t + h) - b(t)}{h} \right],$$

y se define la derivada de  $\mathbf{R}$  como el límite del cociente incremental para  $h \rightarrow 0$ :

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}[\mathbf{R}(t + h) - \mathbf{R}(t)] = \left( \frac{da}{dt}, \frac{db}{dt} \right) = (\dot{a}, \dot{b}).$$

La derivada de un vector se forma derivando sus componentes.

Las derivadas de productos de vectores, como se ve fácilmente, obedecen las reglas ordinarias de las derivadas de productos de funciones reales o "escalares":

$$(\mathbf{RS})' = \frac{d\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{S} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{S}}$$

$$(\mathbf{R} \times \mathbf{S})' = \frac{d\mathbf{R} \times \mathbf{S}}{dt} = \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{S} + \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{S}},$$

donde para los productos exteriores es necesario conservar el orden original de los factores.

En forma análoga se define la integral del vector  $\mathbf{R}(t)$  en términos de las integrales de sus componentes:

$$\int_a^b \mathbf{R}(t) dt = \left( \int_a^b a(t) dt, \int_a^b b(t) dt \right).$$

El teorema fundamental del cálculo implica que

$$\frac{d}{dt} \int_a^t \mathbf{R}(s) ds = \mathbf{R}(t).$$

#### d. Aplicación a curvas planas. Dirección, “rapidez” y aceleración

##### *Vector velocidad*

En la Sección 4.1 se representó una curva  $C$  mediante dos funciones  $x = \phi(t)$  e  $y = \psi(t)$ . Cada valor de  $t$  en el dominio de estas funciones determina un punto  $P = (x, y)$  sobre  $C$ ; en este caso  $t$  puede considerarse como el tiempo y  $P$  como un punto móvil cuya posición en el tiempo  $t$  está dada por  $x(t)$  e  $y(t)$ . Si se identifican  $x$  e  $y$  con las componentes del vector de posición  $\mathbf{R} = \overrightarrow{OP}$  de  $P$ , entonces  $C$  queda descrita por el punto final del vector de posición

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = (x(t), y(t))$$

(Fig. 4.41). Para dos puntos  $P$  y  $P'$  de  $C$  correspondientes a los valores paramétricos  $t$  y  $t + \Delta t$ , la expresión

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = \mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t) = \Delta \mathbf{R}$$

da el vector representado por la secante dirigida de  $C$  con puntos extremos  $P, P'$ . Aquí  $\Delta t$  es positivo, esto es, si el punto  $P'$  sigue a  $P$  sobre  $C$  en el sentido de las  $t$  crecientes, entonces el vector

$$\frac{t}{\Delta t} (\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t))$$

tiene la misma dirección que el vector  $\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t) = \overrightarrow{PP'}$ ; su longitud es la distancia entre los puntos  $P$  y  $P'$  dividida por  $\Delta t$ . Cuando  $\Delta t$  tiende a cero se obtiene en el límite el vector

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)),$$

donde, nuevamente, el punto se usa para denotar derivación con respecto al parámetro  $t$ . La dirección de  $\dot{\mathbf{R}}$  es el límite de las direcciones de las secantes  $PP'$ , y, por lo tanto, es la dirección de la tangente en el punto  $P$ . Más precisamente,  $\dot{\mathbf{R}}$  apunta en aquella dirección de la tangente que co-

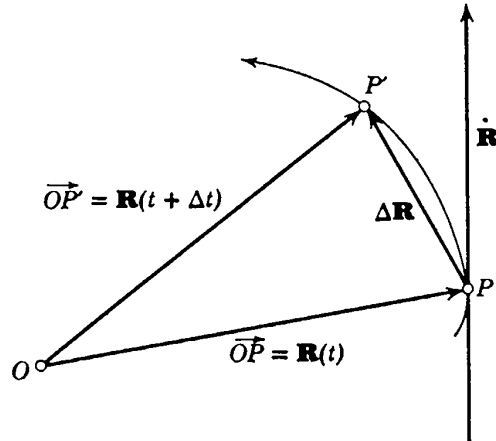


Figura 4.41 Derivada del vector de posición para una curva.

responde a valores crecientes de  $t$  sobre  $C$ , suponiendo que  $\mathbf{R} \neq \mathbf{O}$ . Los cosenos directores de  $\dot{\mathbf{R}}$  son las cantidades

$$\cos \alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \text{sen } \alpha = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

introducidas en la p. 364 como cosenos directores de la tangente. La longitud de  $\dot{\mathbf{R}}$ ,

$$|\dot{\mathbf{R}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

puede interpretarse como  $ds/dt$ , esto es, la medida de cambio, con respecto al parámetro  $t$ , de la longitud  $s$  a lo largo de la curva. Si  $t$  representa el tiempo,  $|\dot{\mathbf{R}}|$  representa entonces la velocidad con la que el punto se mueve a lo largo de la curva.

En Mecánica uno debe considerar la velocidad de una partícula no sólo como algo que tiene una cierta magnitud (la “rapidez”) sino también una cierta *dirección*. La *velocidad* está entonces representada por el *vector*  $\dot{\mathbf{R}} = (\dot{x}, \dot{y})$ , cuya longitud es la velocidad (escalar) y cuya dirección es la dirección instantánea de movimiento, esto es, la dirección de la tangente en el sentido de las  $t$  crecientes.

*Aceleración*

Análogamente, la *aceleración* de la partícula se define como el vector  $\ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{x}, \ddot{y})$ . Si la aceleración se anula, esto significa que  $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ ; si  $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{O}$  a lo largo de un intervalo  $t$  completo, las componentes de la velocidad tienen valores constantes  $\dot{x} = a$ ,  $\dot{y} = b$ ; y las componentes del vector de posición mismo son entonces funciones lineales de  $t$ :  $x = at + c$ ,  $y = bt + d$ . En este caso la partícula se mueve con velocidad constante a lo largo de una línea recta.

Todos nuestros resultados anteriores relativos a curvas son fácilmente expresables en notación vectorial si se describe la curva por el vector de posición  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = (x(t), y(t))$ , con  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Se encuentra para la longitud [cfr. Ec. (8), p. 367] la expresión

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\mathbf{R}}| dt,$$

en tanto que para que el área, con su signo, encerrada por una curva [cfr. Ec. (20), p. 383]:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} dt$$

(el signo de esta cantidad depende de la orientación de la curva). Finalmente, para la curva  $\kappa$  se tiene la fórmula [cfr. Ec. (15), p. 373]

$$\kappa = \frac{\dot{\mathbf{R}} \times \ddot{\mathbf{R}}}{|\dot{\mathbf{R}}|^3}.$$

*Componentes tangencial y normal de la aceleración*

Las fórmulas anteriores tienen implicaciones interesantes si nuevamente se interpreta  $t$  como el tiempo. Sea  $\gamma$  el ángulo formado por el vector  $\ddot{\mathbf{R}}$  con el vector  $\dot{\mathbf{R}}$ , esto es, con la dirección instantánea de movimiento. La cantidad  $|\ddot{\mathbf{R}}| \cos \gamma$  representa la proyección de  $\ddot{\mathbf{R}}$  en la dirección de  $\dot{\mathbf{R}}$ ; la llamamos *componente tangencial* de la aceleración. Análogamente,  $|\ddot{\mathbf{R}}| \sin \gamma$  es la proyección de  $\ddot{\mathbf{R}}$  sobre la normal (más precisamente, sobre la normal que se obtiene a partir de  $\dot{\mathbf{R}}$  mediante una rotación contra reloj de  $90^\circ$ ); ésta es la *componente normal* de la aceleración (ver Fig. 4.42). Por definición de productos interior y exterior,

$$|\ddot{\mathbf{R}}| \cos \gamma = \frac{\dot{\mathbf{R}} \cdot \ddot{\mathbf{R}}}{|\dot{\mathbf{R}}|} \quad |\ddot{\mathbf{R}}| \sin \gamma = \frac{\dot{\mathbf{R}} \times \ddot{\mathbf{R}}}{|\dot{\mathbf{R}}|}.$$

Ahora bien,

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \ddot{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{R}} \cdot \ddot{\mathbf{R}} + \ddot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = v \frac{dv}{dt},$$

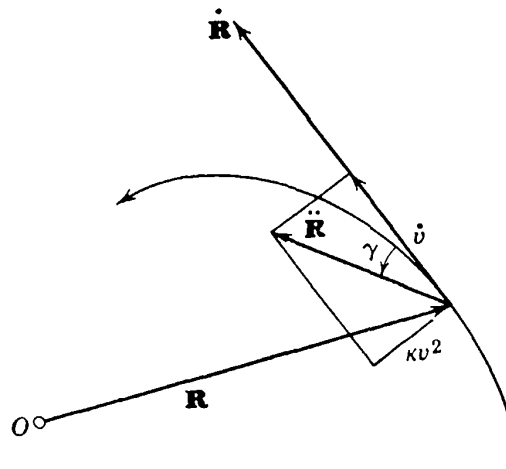


Figura 4.42 Aceleración tangencial y aceleración normal.

donde  $v = ds/dt = |\dot{\mathbf{R}}| = \sqrt{\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}}$  es la *velocidad* (escalar) del punto. Por lo tanto

$$(41) \quad |\ddot{\mathbf{R}}| \cos \gamma = \frac{dv}{dt} = \dot{v};$$

De esta manera, la componente tangencial de la aceleración es idéntica a la medida de cambio, o sea, la derivada, con respecto al tiempo, de la velocidad. Para la aceleración normal la fórmula de la curvatura conduce a

$$(42) \quad |\ddot{\mathbf{R}}| \sin \gamma = \kappa |\dot{\mathbf{R}}|^2 = \kappa v^2,$$

esto es, el producto del cuadrado de la velocidad por la curvatura.

Para una partícula que se mueve con velocidad *constante*  $v$  a lo largo de una curva, la aceleración tangencial  $\dot{v}$  se anula. El vector aceleración es entonces perpendicular a la curva. Más precisamente, dicho vector apunta hacia el lado “interno” de la curva, o sea, el lado hacia el cual la curva se dobla (esto se ve, por ejemplo, del hecho de que  $\sin \gamma > 0$  cuando  $\kappa > 0$ , o, lo que es lo mismo, cuando la tangente gira contra reloj). Al moverse a lo largo de una curva con rapidez constante un punto experimenta, por lo tanto, una aceleración hacia el interior de la curva, que es proporcional a la curvatura y también al cuadrado de la velocidad. Este hecho es de obvia significación debido a que, como resultado de la ley de Newton (discutida más adelante), se necesita una fuerza proporcional a la aceleración para mantener el punto  $P$  sobre la curva.

#### 4.4 Movimiento de una partícula bajo la acción de fuerzas especificadas

Los primeros desarrollos del cálculo fueron estimulados en forma decisiva no solamente por la geometría sino también en una gran medida por



los conceptos de la Mecánica. Esta ciencia descansa sobre ciertos principios básicos que fueron establecidos primeramente por Newton. El establecimiento de estos principios involucra el concepto de derivada, y su aplicación requiere de la teoría de la integración. Sin analizar en detalle los principios de Newton, ilustraremos con algunos ejemplos sencillos cómo el cálculo se aplica en Mecánica.

a. Ley de movimiento de Newton

Nos restringiremos a la consideración de una única partícula, esto es, un punto en el cual se supone concentrada una masa  $m$ . Supondremos además que el movimiento se efectúa en el plano  $x, y$ , en el cual la posición de la partícula en el tiempo  $t$  está especificada por sus coordenadas  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , o, equivalentemente, por su "vector de posición"  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t) = (x(t), y(t))$ . Un punto sobre una cantidad indica derivación con respecto al tiempo  $t$ . La *velocidad* y la *aceleración* de la partícula quedan entonces representadas por los vectores

$$\dot{\mathbf{R}} = (\dot{x}, \dot{y}) \quad \text{y} \quad \ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{x}, \ddot{y}).$$

En Mecánica se relaciona el movimiento de un punto con el concepto de *fuerzas* de dirección y magnitud definida que actúan sobre este punto. También puede describirse una fuerza mediante un vector  $\mathbf{F} = (\rho, \sigma)$ . El efecto de varias fuerzas  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$  que actúan sobre la misma partícula es el mismo que el de una única fuerza  $\mathbf{F}$ , la *fuerza resultante*, que es simplemente la suma vectorial  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$  de las fuerzas individuales.

La ley fundamental de Newton establece que: *la masa  $m$  multiplicada por la aceleración es igual a la fuerza que actúa sobre la partícula*; en símbolos,

$$(43) \quad m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}.$$

Si escribimos esta ecuación vectorial, que expresa la ley fundamental, en términos de las componentes de esos vectores, obtenemos el par equivalente de ecuaciones

$$(44) \quad m\ddot{x} = \rho, \quad m\ddot{y} = \sigma.$$

Puesto que aceleración y fuerza difieren solamente en el factor positivo  $m$ , *la dirección de la aceleración es la misma que la de la fuerza*. Si ninguna fuerza actúa, esto es,  $\mathbf{F} = \mathbf{O}$ , la aceleración se anula, la velocidad es constante y  $x, y$  se vuelven funciones lineales de  $t$ . Esta es la *primera ley de Newton*: una partícula sobre la que no actúan fuerzas se mueve con velocidad constante a lo largo de una línea recta.

La ley de Newton  $m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}$ , en el primer ejemplo, no es más que la definición cuantitativa del concepto de fuerza. El lado izquierdo de esta

relación puede determinarse observando el movimiento, mediante lo cual se obtiene entonces la fuerza.

Sin embargo, la ley de Newton tiene un significado más profundo debido al hecho de que en muchos casos podemos determinar la fuerza actuante a partir de otras consideraciones físicas, sin conocer el movimiento correspondiente. Esta ley fundamental no es entonces una *definición de fuerza* sino una relación a partir de la cual podemos esperar la determinación del movimiento. Esta manera de considerar las cosas al usar la ley de Newton muestra su utilidad en los numerosos casos en los que consideraciones físicas permiten expresar la fuerza  $\mathbf{F}$  o sus componentes  $\rho, \sigma$  de manera explícita como funciones de la posición y la velocidad de la partícula y del tiempo  $t$ . La ley de movimiento no es entonces una tautología sino que proporciona dos ecuaciones que expresan  $m\ddot{x}, m\ddot{y}$  en términos de  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$  y  $t$ , las llamadas *ecuaciones de movimiento*. Son éstas *ecuaciones diferenciales*, esto es, relaciones entre funciones y sus derivadas. La solución de estas ecuaciones diferenciales, o sea, el encontrar todas los pares de funciones  $x(t), y(t)$  para las cuales las ecuaciones de movimiento son válidas, dan todos los movimientos posibles de una partícula bajo la acción de la fuerza prescrita.

### b. Movimiento de cuerpos en caída

El ejemplo más sencillo de una fuerza conocida es el de la *gravedad* que actúa sobre una partícula cercana a la superficie de la Tierra. Se sabe por observación directa que (despreciando los efectos de la resistencia del aire) todo cuerpo que cae tiene una aceleración dirigida verticalmente hacia abajo y que tiene la misma magnitud  $g$  para todos los cuerpos. Medida en metros por segundo ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ),  $g$  tiene aproximadamente el valor  $9.80$ .<sup>1</sup> Si escogemos un sistema de coordenadas  $x, y$  en el cual el eje  $y$  apunte verticalmente hacia arriba en tanto que el eje  $x$  es horizontal, la aceleración  $\ddot{\mathbf{R}} = (\ddot{x}, \ddot{y})$  tiene las componentes

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

Por la ley fundamental de Newton, el vector  $\mathbf{F}$  que representa la fuerza de gravedad que actúa sobre una partícula de masa  $m$  debe entonces ser

$$\mathbf{F} = (0, -mg).$$

Este vector fuerza está de la misma manera dirigido verticalmente hacia abajo; su magnitud, el *peso* del cuerpo cerca de la superficie de la Tierra, es  $mg$ .

<sup>1</sup> El valor preciso de  $g$ , que además de la atracción gravitacional incluye los efectos de la rotación de la Tierra, depende de la posición sobre ésta.

Cuando se cancela el factor  $m$ , las ecuaciones de movimiento de una partícula bajo la acción de la gravedad toman la forma

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

A partir de estas ecuaciones podemos obtener fácilmente una descripción del movimiento más general posible para un cuerpo que cae. Integrando con respecto a  $t$  se obtiene

$$\dot{x} = a, \quad \dot{y} = -gt + b,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. Una integración posterior muestra entonces que

$$x = at + c, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + bt + d,$$

donde  $c$  y  $d$  son también constantes. Así, la solución general de nuestras ecuaciones de movimiento depende de cuatro constantes no especificadas,  $a, b, c, d$ . Podemos relacionar inmediatamente los valores de estas constantes para un movimiento particular con las *condiciones iniciales* de este movimiento. Si al tiempo inicial  $t = 0$  la partícula está en el punto  $(x_0, y_0)$ , entonces, haciendo  $t = 0$ , se encuentra

$$c = x_0, \quad d = y_0.$$

La velocidad  $\dot{\mathbf{R}} = (\dot{x}, \dot{y}) = (a, -gt + b)$  se reduce a  $(a, b)$  para  $t = 0$ . Así  $(c, d)$  y  $(a, b)$  representan respectivamente la posición y la velocidad iniciales de la partícula. Cualquier elección de estas condiciones iniciales origina en forma unívoca un movimiento.

En el caso  $a \neq 0$ , esto es, el caso en que la velocidad inicial no es vertical, podemos eliminar  $t$  y obtener una representación no paramétrica para la órbita de la partícula. Despejando  $t$  de la primera ecuación y substituyendo el resultado en la segunda, se llega a

$$y = -\frac{g}{2a^2}(x - c)^2 + \frac{b}{a}(x - c) + d.$$

Por lo tanto, la trayectoria es una parábola. Para  $a = 0$  tenemos  $x = c =$  constante, y todo el movimiento se efectúa a lo largo de una recta vertical.

### c. Movimiento de una partícula restringido a una curva dada

En la mayoría de los problemas de mecánica las fuerzas que actúan sobre una partícula dependen de la posición y de la velocidad de dicha partícula. En general, las ecuaciones de movimiento son demasiado complicadas para permitirnos determinar todos los movimientos posibles. Una simplificación grande se logra si puede considerarse como conocida la curva  $C$  descrita por la partícula, de manera que sólo tenga que determinarse el

movimiento a lo largo de la curva. En una variedad muy grande de problemas mecánicos la partícula está *restringida* (mediante algún artificio mecánico) a moverse sobre una curva dada  $C$ . El ejemplo más simple lo constituye el péndulo plano, en el que una masa  $m$  está sujeta a un punto  $P_0$  por medio de un hilo inextensible de longitud  $L$  y se mueve bajo la acción de la gravedad sobre una circunferencia de radio  $L$  con centro en  $P_0$ .

Usando el arco de longitud  $s$  como parámetro a lo largo de la curva  $C$ , ésta queda determinada por las ecuaciones  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ . Encontrar el movimiento de la partícula a lo largo de  $C$  equivale entonces a encontrar  $s$  como función de  $t$ . Una ecuación de movimiento válida a lo largo de la curva se encuentra de la manera siguiente.

Multiplíquense escalarmente ambos lados de la fórmula de Newton  $m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}$  por un vector  $\xi$ :

$$m\ddot{\mathbf{R}} \cdot \xi = \mathbf{F} \cdot \xi.$$

Si se escoge  $\xi$  igual al vector de longitud 1 cuya dirección es la de la tangente a  $C$  en el sentido de las  $s$  crecientes, esto es,  $\xi = d\mathbf{R}/ds$ , la expresión  $\mathbf{F} \cdot \xi = f$  dará la *componente tangencial* de la fuerza, o *fuerza que actúa en la dirección del movimiento*. De acuerdo con la ecuación (41) de la p. 414, la componente tangencial  $\ddot{\mathbf{R}} \cdot \xi$  de la aceleración es justamente  $dv/dt = d^2s/dt^2$ , esto es, la aceleración de la partícula a lo largo de la curva. La ley de Newton conduce entonces a la fórmula

$$(45) \quad m\ddot{s} = f,$$

o sea, *la masa de la partícula multiplicada por su aceleración a lo largo de la trayectoria es igual a la fuerza que actúa en la dirección del movimiento*.

Al aplicar esta ecuación a una partícula *restringida* a moverse sobre una curva  $C$ , suponemos que las restricciones no contribuyen a la fuerza  $f$ .<sup>1</sup> Para una fuerza  $\mathbf{F} = (\rho, \sigma)$  la ecuación (44) de la p. 415 conduce a

$$(46) \quad f = \rho \frac{dx}{ds} + \sigma \frac{dy}{ds};$$

puesto que el vector  $\xi$  tiene como componentes  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$  (ver p. 412). Para una curva  $C$  conocida los cosenos directores  $\frac{dx}{ds}$  y  $\frac{dy}{ds}$  de la tangente pueden considerarse como funciones conocidas de  $s$ . De la misma manera, si la fuerza  $\mathbf{F} = 2(\rho, \sigma)$  depende solamente de la posición de la partícula,  $f$  será una función conocida de  $s$ . El movimiento de la partícula a lo largo de  $C$

<sup>1</sup> Realmente, el mecanismo de restricción tiene que proporcionar una fuerza que mantenga a la partícula sobre  $C$  (en el péndulo simple la proporciona la tensión del hilo). Suponemos que esta fuerza de "reacción" es perpendicular a la curva y así no tiene componente tangencial; y éste es el caso cuando la partícula se desliza sin fricción sobre la curva.

tiene entonces que ser determinado a partir de la ecuación diferencial relativamente sencilla  $m\ddot{s} = f(s)$ .

Específicamente, para la fuerza gravitacional  $\mathbf{F} = (0, -mg)$  se tiene

$$(46a) \quad f = -mg \frac{dy}{ds}.$$

Así, la ecuación de movimiento de una partícula restringida a moverse bajo la acción de la gravedad sobre una curva  $C$  se transforma en

$$(47) \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g \frac{dy}{ds}.$$

Si  $\alpha$  denota el ángulo de inclinación de la curva, tenemos  $dy/ds = \text{sen } \alpha$  (ver Fig. 4.43), y la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \text{sen } \alpha$$

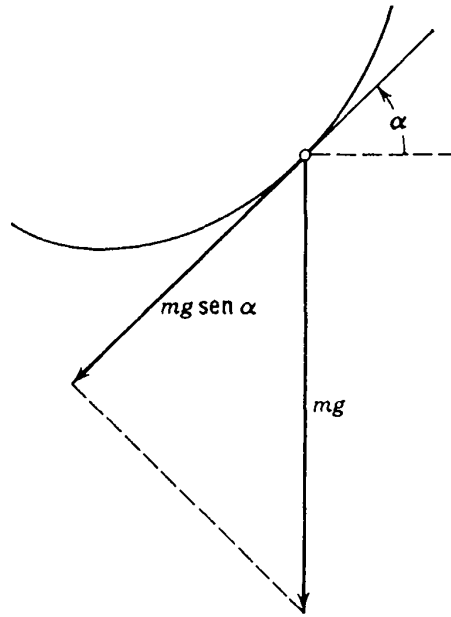


Figura 4.43 Movimiento sobre una curva dada, bajo la acción de la gravedad.

Para una partícula restringida a moverse sobre una circunferencia de radio  $L$  con centro en el origen (“péndulo simple”), es

$$x = L \text{sen } \theta, \quad y = -L \text{cos } \theta,$$

donde  $\theta = s/L$  es el ángulo polar medido a partir de la vertical que apunta hacia abajo. En este caso (ver Fig. 4.44) es  $\alpha = \theta$ , por lo que

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = -g \text{sen } \theta,$$

o bien

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \text{sen } \theta.$$

#### 4.5 Caída libre de un cuerpo venciendo la resistencia del aire

Comenzaremos con dos ejemplos relativos al movimiento de una partícula a lo largo de una recta. Consideraremos solamente los casos en que la fuerza actúa en la dirección de la recta, de manera que no es necesario un mecanismo de restricción.

La trayectoria de un cuerpo que cae libremente hacia abajo puede describirse mediante las expresiones  $x = \text{constante}$ ,  $y = s$ . Si la única fuerza presente es la de gravedad, se tiene la ecuación de movimiento

$$m\ddot{s} = -mg.$$

Para una partícula que se suelta en el tiempo  $t = 0$  desde la altura  $y_0 = s_0$  con velocidad inicial  $v_0$  (considerada positiva si es hacia arriba), se encuentra por integración que

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

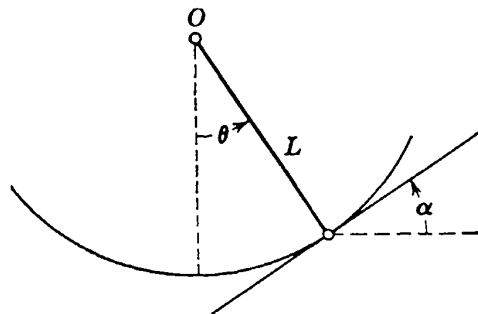


Figura 4.44 El péndulo simple.

Si se desea tomar en cuenta el efecto de la *fricción o resistencia del aire* que actúa sobre la partícula, se la tendrá que considerar como una fuerza de sentido opuesto al del movimiento y respecto a la cual pueden hacerse ciertas consideraciones de tipo físico.<sup>1</sup> Se obtendrán resultados para diferentes hipótesis físicas: *a*) la resistencia es proporcional a la velocidad y está dada por una expresión de la forma  $-r\dot{s}$ , donde  $r$  es una constante positiva; *b*) la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad y es de la forma  $-r\dot{s}^2$  para  $\dot{s}$  positiva, y de la forma  $r\dot{s}^2$  para  $\dot{s}$  negativa. De acuerdo con la ley de Newton se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$(a) \quad m\ddot{s} = -mg - r\dot{s},$$

$$(b) \quad m\ddot{s} = -mg + r\dot{s}^2,$$

<sup>1</sup> Estas hipótesis deben escogerse adecuadas al sistema físico particular que se esté considerando; por ejemplo, la ley de resistencia para bajas velocidades no es la misma que para velocidades altas (tales como velocidades de bala).

donde se ha supuesto para (b) que el cuerpo está cayendo ( $\dot{s} < 0$ ). Si se considera, en primer lugar,  $\dot{s} = v(t)$  como la función buscada, se tiene

$$(a) \quad m\dot{v} = -mg - rv,$$

$$(b) \quad m\dot{v} = -mg + rv^2.$$

En vez de usar estas ecuaciones para determinar  $v$  como función de  $t$ , se determina  $t$  como función de  $v$  escribiendo dichas ecuaciones diferenciales en la forma

$$(a) \quad \frac{dt}{dv} = -\frac{1}{g(1 + k^2v)},$$

$$(b) \quad \frac{dt}{dv} = -\frac{1}{g(1 - k^2v^2)}$$

donde se ha hecho  $\sqrt{r/mg} = k$ . Con la ayuda de los métodos dados en el capítulo 3 pueden realizarse inmediatamente las integraciones, obteniéndose

$$(a) \quad t = -\frac{1}{gk^2} \log(1 + k^2v) + t_0,$$

$$(b) \quad t = \frac{1}{2gk} \log \frac{1 - kv}{1 + kv} + t_0.$$

Resolviendo para  $v$  estas ecuaciones se tiene

$$(a) \quad v = -\frac{1}{k^2} (1 - e^{-gk^2(t-t_0)}).$$

$$(b) \quad v = -\frac{1}{k} \frac{1 - e^{-2gk(t-t_0)}}{1 + e^{-2gk(t-t_0)}} = -\frac{1}{k} \tanh [gk(t - t_0)]$$

Estas ecuaciones revelan ya una propiedad importante del movimiento. La velocidad no crece con el tiempo más allá de toda cota, sino que tiende a un límite definido que depende de la masa  $m$  y de la constante  $r$  (la que, a su vez, depende de la forma del cuerpo que cae y de la densidad del aire). En efecto,

$$(a) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\frac{1}{k^2} = -\frac{mg}{r},$$

$$(b) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = -\frac{1}{k} = -\sqrt{\frac{mg}{r}}$$

La resistencia de fricción para la velocidad límite contrarresta justamente al atracción gravitacional. Una segunda integración realizada en las expresiones para  $v(t) = \dot{s}$ , nuevamente con la ayuda de los métodos del capítulo 3, conduce a los resultados (que pueden verificarse por derivación)

$$(a) \quad s(t) = -\frac{1}{k^2} (t - t_0) - \frac{1}{gk^4} (e^{-gk^2(t-t_0)} - 1) + c$$

$$(b) \quad s(t) = -\frac{1}{gk^2} \log [\cosh kg(t - t_0)] + c,$$

donde  $c$  es una constante de integración. Aquí  $t_0$  es el instante para el cual la velocidad de la partícula tendría que ser 0, y  $c$  es la altura correspondiente. Las dos constantes  $c$  y  $t_0$  pueden también ser fácilmente relacionadas con la velocidad y la posición en cualquier otro instante  $t_1$  si se consideran aquellas cantidades como condiciones iniciales.

#### 4.6 El tipo más simple de vibración elástica: movimiento de un resorte

Como un segundo ejemplo —de mayor significación— considérese el caso de una partícula que se mueve sobre el eje  $x$  bajo la acción de una fuerza elástica que la atrae hacia el origen. Por lo que respecta a la fuerza elástica se considerará que su magnitud es proporcional a la distancia desde el origen y que está siempre dirigida hacia ese punto. En otras palabras, se tomará la fuerza igual a  $-kx$ , donde el coeficiente  $k$  es una medida de la rigidez de la conexión elástica. Puesto que  $k$  es positiva, la fuerza es negativa cuando  $x$  es positiva y positiva cuando  $x$  es negativa. La ley de Newton en este caso establece que

$$(48) \quad m\ddot{x} = -kx.$$

Esta ecuación diferencial por sí sola no determina completamente el movimiento, sino que para un instante dado, por ejemplo  $t = 0$ , pueden fijarse arbitrariamente la posición  $x(0) = x_0$  y la velocidad  $\dot{x}(0) = v_0$  iniciales; esto es, en lenguaje físico, que la partícula puede iniciar su movimiento desde cualquier posición y con cualquier velocidad, quedando determinado el movimiento subsecuente por la ecuación diferencial. Matemáticamente esto queda expresado por el hecho de que la solución general de la ecuación diferencial contiene dos constantes de integración cuyos valores, al principio indeterminados, pueden encontrarse mediante las condiciones iniciales. Esto se demostrará de inmediato.

Podemos establecer fácilmente dicha solución de una manera directa. Si hacemos  $\omega = \sqrt{k/m}$ , nuestra ecuación diferencial se convierte en  $d^2x/dt^2 = -\omega^2x$ . La substitución  $\tau = \omega t$  de la variable independiente reduce esta ecuación a la forma  $d^2x/d\tau^2 = -x$ , discutida en el capítulo 3, p. 331. Así la ecuación diferencial es satisfecha por todas las funciones

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t,$$

lo cual puede también verificarse de inmediato por derivación ( $c_1$  y  $c_2$  denotan constantes arbitrariamente escogidas). En el capítulo 3, p. 332, vimos que no existen otras soluciones para dicha ecuación diferencial, y, por lo tanto, cualquier movimiento originado por la acción de la fuerza



elástica está dado por esa expresión. Esta puede fácilmente ponerse en la forma

$$x(t) = a \operatorname{sen} \omega(t - \delta) = -a \operatorname{sen} \omega \delta \cos \omega t + a \cos \omega \delta \operatorname{sen} \omega t.$$

Sólo se necesita escribir  $-a \operatorname{sen} \omega \delta = c_1$  y  $a \cos \omega \delta = c_2$ , introduciendo así las nuevas constantes  $a$  y  $\delta$  en vez de  $c_1$  y  $c_2$ . Movimientos de este tipo son llamados *sinusoidales* o *armónicos simples*. Estos movimientos son periódicos: cualquier *estado* [esto es, posición  $x(t)$  y velocidad  $\dot{x}(t)$ ] se repite después de un tiempo  $T = 2\pi/\omega$ , llamado *período*, pues las funciones  $\operatorname{sen} \omega t$  y  $\cos \omega t$  tienen período  $T$ . El número  $a$  se llama el *desplazamiento máximo* o *amplitud* de la oscilación. El número  $1/T = \omega/2\pi$  se llama la *frecuencia* de la oscilación; mide el número de oscilaciones por unidad de tiempo. En el capítulo 8 regresaremos a la teoría de las oscilaciones.

#### 4.7 Movimiento sobre una curva dada

##### a. La ecuación diferencial y su solución

Volvamos ahora a la forma general del problema relativo al movimiento a lo largo de una cierta curva bajo la acción de una fuerza  $mf(s)$  arbitraria pero prefijada. Determinaremos  $s(t)$  como función de  $t$  usando la ecuación diferencial [Ec. (45), p. 419]

$$\ddot{s} = f(s),$$

donde  $f(s)$  es una función dada.<sup>1</sup> Esta ecuación diferencial en  $s$  puede resolverse completamente mediante el siguiente artificio.

Consideremos cualquier función primitiva  $F(s)$  de  $f(s)$ , esto es  $F'(s) = f(s)$ , y multipliquemos ambos lados de la ecuación  $\ddot{s} = f(s) = F'(s)$  por  $\dot{s}$ . Podemos entonces escribir el miembro de la izquierda en la forma  $d(\dot{s}^2/2) dt$ , como se ve de inmediato derivando la expresión  $\dot{s}^2$ . Por otra parte, si en  $F(s)$  consideramos la cantidad  $s$  como una función de  $t$ , por la regla de la cadena de la derivación, el lado de la derecha,  $F'(s)\dot{s}$ , es la derivada de  $F(s)$  con respecto al tiempo  $t$ . Por lo tanto, se tiene inmediatamente

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{s}^2 \right) = \frac{d}{dt} F(s),$$

o bien, integrando,

$$\frac{1}{2} \dot{s}^2 = F(s) + c,$$

donde  $c$  denota una constante por determinar.

Hemos, en este punto, llegado a una ecuación que sólo involucra la función  $s(t)$  y su *primera* derivada. (Más adelante interpretaremos esta

<sup>1</sup> Nuestra ecuación original de movimiento sobre una curva era  $m\ddot{s} = f(s)$ ; sin embargo, podemos siempre escribir la función  $f(s)$  en la forma  $mf(s)$ , obteniendo la forma más simple usada aquí para la ecuación.

ecuación como la que expresa la conservación de la energía durante el movimiento.) Escribese esta ecuación en la forma  $ds/dt = \sqrt{2[F(s) + c]}$ . Vemos que no puede encontrarse inmediatamente por integración  $s$  como función de  $t$ . Sin embargo, obtenemos una solución del problema si primero nos concretamos a encontrar la función inversa  $t(s)$ , esto es, el tiempo que tarda la partícula en alcanzar una posición definida  $s$ . Para  $t(s)$  tenemos la ecuación

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2[F(s) + c]}}$$

y así, la derivada de la función  $t(s)$  es conocida y se tiene

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2[F(s) + c]}} + c_1,$$

donde  $c_1$  es otra constante de integración. El problema se habrá resuelto tan pronto como se realice esta última integración, pues aunque no se determine la posición  $s$  como una función de  $t$ , se encuentra, por el contrario, el tiempo  $t$  como una función de la posición  $s$ . El hecho de que todavía se disponga de dos constantes de integración,  $c$  y  $c_1$ , nos permite hacer que la solución general satisfaga condiciones iniciales específicas.

La discusión general puede ilustrarse con nuestro primer ejemplo sobre vibraciones elásticas si identificamos  $x$  con  $s$ . En este caso,  $f(s) = -\omega^2 s$  y, por ejemplo,  $F(s) = \frac{1}{2}\omega^2 s^2$ . Obtenemos entonces

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2c - \omega^2 s^2}},$$

y además,

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{2c - \omega^2 s^2}} + c_1.$$

Esta integral puede evaluarse fácilmente introduciendo  $\omega s/\sqrt{2c}$  como una nueva variable: así obtenemos

$$t = \frac{1}{\omega} \arcsen \frac{\omega s}{\sqrt{2c}} + c_1,$$

o bien, tomando la función inversa,

$$s = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \operatorname{sen} \omega(t - c_1).$$

Llegamos así a exactamente la misma fórmula obtenida anteriormente para la solución.

Este ejemplo ilustra también lo que significan las constantes de integración y cómo se determinan. Si, por ejemplo, se requiere que en el

tiempo  $t = 0$  la partícula esté en el punto  $s = 0$  y que su velocidad en ese instante sea  $\dot{s}(0) = 1$ , se obtienen las dos ecuaciones

$$0 = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \operatorname{sen} \omega c_1, \quad 1 = \sqrt{2c} \cos \omega c_1,$$

a partir de las cuales se encuentra que las constantes tienen los valores  $c_1 = 0$ ,  $c = \frac{1}{2}$ . Las constantes de integración  $c$  y  $c_1$  pueden determinarse exactamente de la misma manera cuando se prescriben arbitrariamente la posición  $s_0$  y la velocidad  $\dot{s}_0$  iniciales (en el tiempo  $t = 0$ ).

### b. Partícula que se desliza hacia abajo sobre una curva

El caso de una partícula que se desliza sin fricción sobre una curva bajo la acción de la gravedad puede tratarse en forma muy simple mediante el método descrito anteriormente. Encontramos ya en la p. 419 la ecuación de movimiento correspondiente a este caso:

$$\ddot{s} = -g \frac{dy}{ds},$$

donde los puntos indican derivación con respecto a  $t$ . El miembro derecho de esta ecuación es una función conocida de  $s$ , puesto que conocemos la curva y podemos por consiguiente considerar  $x$  e  $y$  como funciones conocidas de  $s$ .

Multipliquemos ambos miembros de esta ecuación por  $\dot{s}$ , como en la última sección. El miembro izquierdo se convierte entonces en la derivada con respecto a  $t$  de  $\frac{1}{2}\dot{s}^2$ . Si en la expresión  $y(s)$  consideramos  $s$  como una función de  $t$ , el miembro derecho de nuestra ecuación es la derivada con respecto a  $t$  de  $-gy$ . Integrando tendremos entonces

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = -gy + c,$$

donde  $c$  es una constante de integración. Para encontrar el significado de esta constante supongamos que en el tiempo  $t = 0$  nuestra partícula está en el punto de la curva con coordenadas  $x_0$  e  $y_0$ , y que en ese instante su velocidad es cero, esto es,  $\dot{s}(0) = 0$ . Entonces, haciendo  $t = 0$  tenemos inmediatamente  $-gy_0 + c = 0$ , de manera que

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 = g(y_0 - y).$$

Puesto que  $\dot{s}^2$  nunca es negativo, la altura  $y$  de la partícula jamás excede al valor  $y_0$  y sólo es igual a él cuando la velocidad es cero. Mientras más abajo se encuentre la partícula, mayor será su velocidad. Ahora, en vez de considerar  $s$  como una función de  $t$ , consideraremos la función inversa  $t(s)$ . Para esta función obtenemos inmediatamente

$$\frac{dt}{ds} = \pm \frac{1}{\sqrt{2g(y_0 - y)}}$$

que es equivalente a

$$t = c_1 \pm \int \frac{ds}{\sqrt{2g(y_0 - y)}},$$

donde  $c_1$  es una nueva constante de integración. En relación con el signo de la raíz cuadrada, que es el mismo que el de  $\dot{s}$ , observamos que si la partícula se mueve a lo largo de un arco que en todas partes está por debajo de  $y_0$  excepto en los extremos, el signo no puede cambiar. Pues el signo de  $\dot{s}$  sólo puede cambiar donde  $\dot{s} = 0$ , esto es, donde  $y - y_0 = 0$ . De esta manera, la partícula solamente puede “regresar” en puntos de la curva de máxima elevación. En vez de usar la longitud de arco  $s$  como parámetro de referencia para la curva, puede usarse cualquier otro parámetro  $\theta$  tal que  $x = \phi(\theta)$ ,  $y = \psi(\theta)$ . Introduciendo  $\theta$  como variable independiente se obtiene

$$t = c_1 \pm \int \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2g(y_0 - y)}} = c_1 \pm \int \frac{x'^2 + y'^2}{2g(y_0 - y)} d\theta,$$

donde las funciones  $x' = \phi'(\theta)$ ,  $y' = \psi'(\theta)$ , e  $y = \psi(\theta)$  son conocidas. Para determinar la constante de integración  $c_1$  observamos que para  $t = 0$  el parámetro  $\theta$  tendrá un valor  $\theta_0$ . Esto nos da inmediatamente la solución en la forma

$$(49) \quad t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{2g(y_0 - y)}} d\theta.$$

Nótese que esta función representa el tiempo que tarda la partícula para moverse del punto con valor paramétrico  $\theta_0$  al punto con valor paramétrico  $\theta$ . La función inversa  $\theta(t)$  correspondiente nos permite describir com-

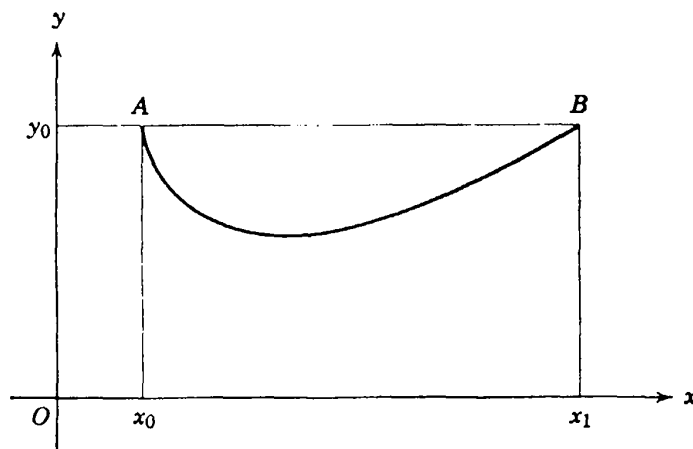


Figura 4.45

pletamente el movimiento: para cada instante  $t$  podemos determinar el punto  $x = \phi[\theta(t)]$ ,  $y = \psi[\theta(t)]$  por el que la partícula está pasando.

### c. Discusión del movimiento

De las ecuaciones recién encontradas puede deducirse, aún sin una expresión explícita para el resultado de la integración, la naturaleza general del movimiento mediante un simple razonamiento intuitivo. Supongamos que nuestra curva es del tipo mostrado en la Fig. 4.45, esto es, que consiste de un arco convexo hacia abajo; y tomemos  $s$  creciente de izquierda a derecha. Si inicialmente soltamos la partícula desde el punto  $A$  de coordenadas  $x_0 = \phi(\theta_0)$ ,  $y_0 = \psi(\theta_0)$ , correspondientes a  $\theta = \theta_0$ , la velocidad aumenta, pues la aceleración  $\ddot{s}$  es positiva. La partícula viaja de  $A$  al punto más bajo con velocidad siempre creciente. Sin embargo, después de pasar por el punto más bajo la aceleración es negativa ya que el miembro derecho,  $-g dy/ds$ , de la ecuación de movimiento es negativo. Por lo tanto, la velocidad decrece. De la ecuación  $\dot{s}^2 = 2g(y_0 - y)$  se ve de inmediato que la velocidad alcanza el valor cero cuando la partícula llega al punto  $B$  cuya altura es la misma que la de la posición inicial  $A$ . Puesto que la aceleración es todavía negativa, el movimiento debe invertirse en ese punto y la partícula oscilará de regreso hacia  $A$ ; y esta acción se repetirá indefinidamente. (El lector recordará que la fricción no se ha tomado en cuenta.) En este movimiento oscilatorio el tiempo que tarda el punto en regresar de  $B$  a  $A$  debe claramente ser el mismo que el que tarda en moverse de  $A$  a  $B$ , pues para alturas iguales se tienen valores iguales de  $|s|$ . Si denotamos con  $T$  el tiempo requerido para un viaje completo de  $A$  a  $B$  y viceversa, el movimiento obviamente será periódico con período  $T$ . Si  $\theta_0$  y  $\theta_1$  son los valores del parámetro correspondientes a los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente, el semiperíodo está dado por la expresión

$$(50) \quad \begin{aligned} \frac{T}{2} &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{x'^2 + y'^2}{y_0 - y} d\theta \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{\phi'^2(\theta) + \psi'^2(\theta)}{\psi(\theta_0) - \psi(\theta)} d\theta \right|. \end{aligned}$$

Si  $\theta_2$  es el valor del parámetro correspondiente al punto más bajo de la curva, el tiempo que la partícula tarda en caer de  $A$  hasta ese punto es

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \left| \int_{\theta_0}^{\theta_2} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{y_0 - y}} d\theta \right|.$$

**d. El péndulo ordinario**

El ejemplo más sencillo está dado por el llamado péndulo simple. En este caso la curva a considerar es una circunferencia de radio fijo  $L$ :

$$x = L \operatorname{sen} \theta, \quad y = -L \operatorname{cos} \theta,$$

donde el ángulo  $\theta$  se mide en el sentido positivo a partir de la posición de reposo. De la expresión general (50), y usando el teorema de adición para el coseno, se obtiene inmediatamente

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}},$$

donde  $\theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \pi$ ) denota la amplitud de oscilación del péndulo, esto es, la posición angular desde la que se suelta la partícula con velocidad cero en el tiempo  $t = 0$ .<sup>1</sup> Mediante la substitución

$$u = \frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\operatorname{sen}(\theta_0/2)}, \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{\operatorname{cos}(\theta/2)}{2 \operatorname{sen}(\theta_0/2)},$$

nuestra expresión para el período de oscilación del péndulo se transforma en

$$T = 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2) \left(1 - u^2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)}}.$$

Tenemos así expresado el período de oscilación del péndulo mediante una *integral elíptica* (ver p. 318).

Si se supone que la amplitud de la oscilación es pequeña, de manera que con suficiente aproximación se puede reemplazar el segundo factor del subradical por 1, se obtiene la expresión

$$2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

como una aproximación para el período de oscilación. Esta última integral puede evaluarse usando la fórmula 13 de nuestra tabla de integrales (p. 284); así se obtiene la expresión  $2\pi \sqrt{L/g}$  como un valor aproximado para  $T$ . Hasta este orden de aproximación, el período es independiente de  $\theta_0$ , o sea, de la amplitud de oscilación del péndulo. Es claro que el

<sup>1</sup> Hemos supuesto aquí que la velocidad se hace cero en algún momento durante el movimiento. Esto excluye el tipo de movimiento de salto del péndulo, para el cual  $\theta$  no es periódica y varía monótonamente para todo  $t$ .

período exacto es mayor y aumenta con  $\theta_0$ . Puesto que en el intervalo de integración

$$1 \geq 1 - u^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} \geq 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} = \cos^2 \frac{\theta_0}{2},$$

se encuentran las siguientes estimaciones para el período

$$2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \leq T \leq \frac{1}{\cos(\theta_0/2)} 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Para ángulos  $\theta_0 < 10^\circ$  se tiene  $1/(\cos \theta_0/2) \leq \operatorname{seg} 5^\circ < 1.004$ , de manera que el período estará dado por la fórmula  $2\pi\sqrt{L/g}$  con un error relativo menor que el  $\frac{1}{2}\%$ . Para una aproximación más fina de la integral elíptica que expresa  $T$  véase la sección 7.6f.

### e. El péndulo cicloidal

El hecho de que el período de oscilación de un péndulo ordinario no es estrictamente independiente de la amplitud de oscilación hizo que Christian Huygens, en sus constantes esfuerzos por construir relojes precisos, buscase una curva  $C$  para la cual el período de oscilación fuese independiente de la posición sobre  $C$  desde la cual la partícula oscilante inicia su movimiento.<sup>1</sup> Huygens reconoció que la cicloide es tal curva.

Para que una partícula sea realmente capaz de oscilar sobre una cicloide, las cúspides de esta curva deben apuntar en dirección opuesta a la de la gravedad; esto es, la cicloide considerada anteriormente (p. 347) debe ser reflejada con respecto del eje  $x$  (cfr. Fig. 4.2, p. 348). Por consiguiente, escribimos las ecuaciones de la cicloide en la forma

$$\begin{aligned} x &= a(\theta + \pi + \operatorname{sen} \theta), \\ y &= -a(1 + \cos \theta), \end{aligned}$$

la cual involucra también un cambio del parámetro  $t$  por  $\theta + \pi$  (Fig. 4.46). El tiempo que la partícula tarda en ir de un punto con altura

$$y_0 = -a(1 + \cos \theta_0) \quad (0 < \theta_0 < \pi)$$

al punto más bajo y luego subir nuevamente a la altura  $y_0$  es, por la fórmula (50) de la p. 428,

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{1}{2g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{y_0 - y}} d\theta = \sqrt{\frac{2a}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta.$$

<sup>1</sup> Las oscilaciones se dice entonces que son *isócronas*.

Usando exactamente las mismas substitutiones que para el período del péndulo simple se llega a la integral

$$\frac{T}{2} = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

y, por consiguiente,

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

El período de oscilación  $T$ , por lo tanto, es, sin duda, independiente de la amplitud  $\theta_0$ . En la p. 446 se describirá una manera sencilla de lograr, mediante un hilo, que una partícula se mueva realmente sobre una cicloide.

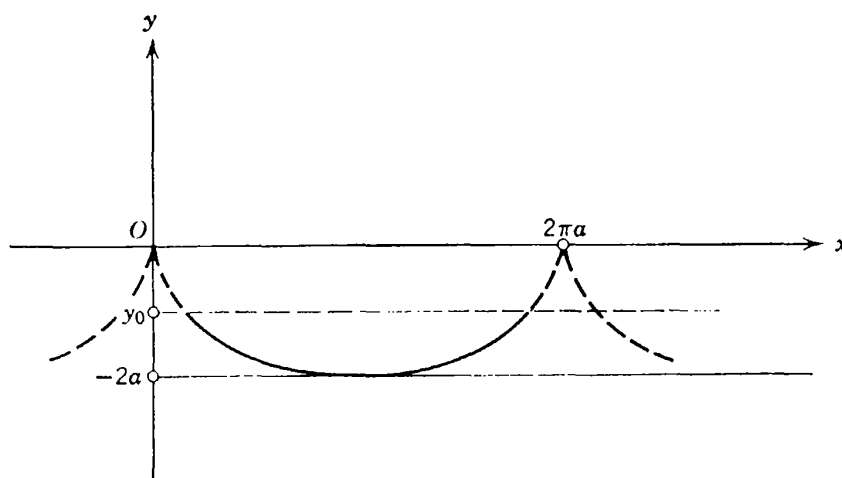


Figura 4.46 Trayectoria descrita por un péndulo cicloidal.

#### \*4.8 Movimiento de un campo gravitacional

Como un ejemplo de movimiento no restringido, consideremos una partícula que se mueve en el campo gravitacional de una masa atractiva.

##### a. Ley universal de la gravitación de Newton

La descripción del movimiento de los planetas dada por Kepler, basada en las precisas observaciones de Tycho Brahe, condujo a Newton a formular su ley general de la atracción gravitacional entre dos partículas cualesquiera. Sean  $P_0 = (x_0, y_0)$  y  $P = (x, y)$  dos partículas de masas  $m_0$  y  $m$ , respectivamente. Sea  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  la distancia entre las partículas. Entonces  $P_0$  ejerce sobre  $P$  una fuerza  $\mathbf{F}$  que tiene la dirección de  $\overrightarrow{PP_0}$  y la magnitud  $|\mathbf{F}| = \gamma m_0 m / r^2$ , donde  $\gamma$  es la "constante universal de la gravitación". Puesto que entonces  $\mathbf{F}$  solamente puede diferir en un factor positivo del vector  $\overrightarrow{PP_0}$ , cuya magnitud es  $r$ , debe tenerse



$$\mathbf{F} = \frac{\gamma m_0 m}{r^3} \vec{PP}_0 = \left( \frac{\gamma m_0 m (x_0 - x)}{r^3} \quad \frac{\gamma m_0 m (y_0 - y)}{r^3} \right).$$

Esta ley de atracción se refiere a *partículas*, esto es, a cuerpos que pueden considerarse concentrados en puntos, despreciando la extensión real de los mismos (Fig. 4.47). La validez de tal hipótesis es lo suficientemente plausible para cuerpos celestes, cuyas distancias mutuas son enormes comparadas con sus diámetros. Newton extendió considerablemente el rango de aplicación de esta ley demostrando que la misma también describe la

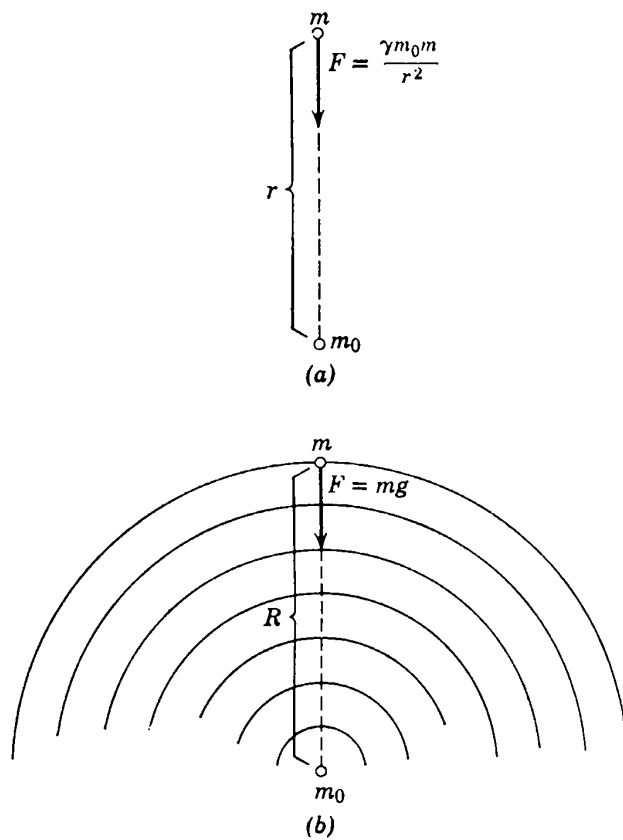


Figura 4.47 a) Atracción newtoniana entre dos partículas. b) Atracción gravitacional de la Tierra.

atracción que un cuerpo de masa  $m_0$  y extensión no nula ejerce sobre una partícula de masa  $m$ , suponiendo que el cuerpo es una esfera cuya densidad es constante o, más generalmente, suponiendo que el cuerpo está constituido por capas esféricas concéntricas de densidad constante. En este caso la atracción del cuerpo sobre una partícula  $P$  situada fuera de él es la misma que si toda la masa  $m_0$  del cuerpo estuviese concentrada en su centro  $P_0$  (Fig. 4.47). La Tierra puede, con bastante aproximación, considerarse como constituida por capas concéntricas de densidad constante, de manera que su atracción sobre una partícula de masa  $m$  situada en la super-

ficie terrestre está dirigida hacia el centro  $P_0$  de la Tierra (esto es, verticalmente hacia abajo para un observador) y tiene una magnitud igual a  $\gamma m_0 m/R^2$ , donde  $R$  es el radio de la Tierra y  $m_0$  su masa. Se puede identificar  $\gamma m_0 m/R^2$  con  $mg$ , siendo  $g$  la aceleración gravitacional (ver p. 416). En otras palabras,  $g = \gamma m_0/R^2$ .

A partir de la ley fundamental de Newton se encuentran las ecuaciones de movimiento para una partícula  $P$  de masa  $m$  que se mueve bajo la influencia de la atracción de una masa  $m_0$  situada en  $P_0$ :

$$x = \frac{\gamma m_0 (x_0 - x)}{r^3}, \quad y = \frac{\gamma m_0 (y_0 - y)}{r^3}.$$

Supóngase ahora, para simplificar, que  $m_0$  es mucho mayor que  $m$ , que los efectos de la atracción de  $P$  sobre  $P_0$  pueden despreciarse y que  $P_0$  puede considerarse en reposo. Esta podría ser, por ejemplo, la situación de una pareja de cuerpos como el Sol y un planeta, o bien la Tierra y un objeto sobre su superficie. Tomando el origen de coordenadas en  $P_0$  se tienen para  $P = (x, y)$  las ecuaciones de movimiento

$$(51) \quad \ddot{x} = -\frac{\gamma m_0 x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\gamma m_0 y}{r^3}$$

con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### b. Movimiento circular en torno al centro de atracción

No se intentará encontrar la solución más general de estas ecuaciones diferenciales (lo que correspondería, como es bien sabido, al movimiento sobre una trayectoria en forma de sección cónica con un foco en el centro de atracción). En vez de ello, se considerarán solamente los tipos más simples de movimiento compatibles con estas ecuaciones, como son los movimientos circulares uniformes en torno al origen y los movimientos a lo largo de un radio que parte de ese mismo punto. Para un movimiento circular uniforme de  $P$  sobre la circunferencia de radio  $a$  con centro en el origen, se tiene  $r = a$  y

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t,$$

donde  $\omega$  es una constante. El *período*  $T$  del movimiento, esto es, el tiempo que tarda  $P$  en regresar a la misma posición, es  $T = 2\pi/\omega$ . Para las componentes de la velocidad se encuentra

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t, \quad \dot{y} = a\omega \cos \omega t,$$

de manera que la velocidad de  $P$  sobre su órbita es

$$(52) \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a\omega = \frac{2\pi a}{T}.$$

La aceleración de  $P$  tiene por componentes

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y.$$

Es claro entonces que las ecuaciones de movimiento (51) son satisfechas si

$$\omega^2 = \frac{\gamma m_0}{a^3},$$

o bien

$$(53) \quad a^3 = \frac{\gamma m_0}{\omega^2} = \frac{\gamma m_0}{4\pi^2} T^2.$$

Esta es precisamente la *tercera ley de Kepler* para el caso especial de movimiento circular, según la cual *los cubos de las distancias de los planetas al Sol son proporcionales a los cuadrados de sus períodos*.

Pueden darse algunas ilustraciones sencillas de la ley de Kepler para el caso en que el cuerpo atractivo es la Tierra, con  $m_0$  su masa y  $R$  su radio. Observando que en este caso  $\gamma m_0 = gR^2$ , se tiene

$$a^3 = \frac{gR^2}{4\pi^2} T^2.$$

Para un satélite que circunvale la Tierra al nivel de la cima de un árbol (despreciando, por supuesto, la resistencia del aire) se tiene  $a = R \sim 3963$  millas. A partir de nuestra fórmula se encuentra para el período del satélite el valor

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \sim 1.4 \text{ horas}$$

y para su velocidad orbital

$$(54) \quad v = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{Rg} \sim 8.231 \text{ metros/seg.}$$

Se puede comparar el valor de  $T$  para el satélite que circunvale la Tierra con el período de 27.32 días de la Luna, o sea, el tiempo después del cual ésta regresa a la misma posición entre las estrellas (“mes sideral”). Por la ley de Kepler, la razón de la distancia  $a$  entre la Luna y el centro de la Tierra al radio de ésta sería igual a la potencia  $\frac{2}{3}$  de la relación de períodos. Esto da para dicha distancia el valor

$$a = \left( \frac{27.32 \times 24}{1.4} \right)^{\frac{2}{3}} R \sim 60R \sim 400,000 \text{ Km.},$$

que concuerda bien con el valor promedio real de esa distancia.

### c. Movimiento radial — Velocidad de escape

El segundo tipo de movimiento que consideraremos es el de una partícula que se mueve a lo largo de un rayo, por ejemplo, el eje  $x$ , desde el centro de atracción. Aquí  $y = 0$ ,  $x = r$ , de manera que las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\ddot{x} = -\frac{\gamma m_0}{x^2}.$$

Siguiendo el procedimiento general para ecuaciones del tipo  $\ddot{s} = f(s)$ , multiplicamos ambos miembros de esa ecuación por  $\dot{x}$  y obtenemos

$$\dot{x}\ddot{x} = -\gamma m_0 \frac{\dot{x}}{x^2}$$

o bien

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma m_0}{x} \right).$$

Así, la expresión

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{\gamma m_0}{x}$$

tiene un valor constante  $h$  durante el movimiento. (Más adelante reconoceremos este hecho como un ejemplo de la ley de la conservación de la energía.) Si introducimos  $x$ , en vez de  $t$ , como variable independiente, obtenemos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2h + (2\gamma m_0/x)}},$$

que, por integración, conduce a

$$t = t_0 \pm \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2h + (2\gamma m_0/\xi)}}.$$

No intentaremos realizar la integración, la cual puede efectuarse fácilmente con ayuda de los métodos desarrollados en el capítulo 3. Para una partícula que se suelta en el tiempo  $t_0 = 0$  desde la distancia  $x_0$  con velocidad nula, se tiene  $h = -\gamma m_0/x_0$ . El tiempo que tarda dicha partícula en caer sobre la partícula atractiva ( $x = 0$ ) es entonces

$$t = \int_0^{x_0} \frac{d\xi}{\sqrt{2\gamma m_0(1/\xi - 1/x_0)}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x_0^3}{2\gamma m_0}}.$$

Por la ley de Kepler, esto es  $\sqrt{1/32}$  veces el tiempo que necesitaría la partícula para dar una vuelta alrededor del centro de atracción a la distancia  $x_0$  [ver Ec. (53), p. 434].

La relación

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{\gamma m_0}{x} = h$$

tiene una consecuencia interesante cuando se investigan las condiciones en las que una partícula puede escapar al infinito. Puesto que  $\frac{1}{2} \dot{x}^2 \geq 0$ , se encuentra que para  $x \rightarrow \infty$  la constante  $h$  debe ser no negativa y, por lo tanto, que  $\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \gamma m_0/x \geq 0$  durante todo el movimiento. Como caso especial, una partícula que inicia su movimiento desde la distancia  $x = a$  con velocidad  $v$  puede escapar al infinito sólo si  $\frac{1}{2} v^2 - \gamma m_0/a \geq 0$ . El valor más bajo posible de la velocidad  $v$  que permitirá a la partícula escapar al infinito es entonces  $v = \sqrt{2\gamma m_0/a}$ . Esta es la *velocidad de escape*  $v_e$ . Para una masa que parte de la superficie de la Tierra para escapar al infinito, esto es, escapar de la atracción gravitacional, se tiene  $a = R$ ,  $\gamma m_0 = gR^2$ , de manera que

$$v_e = \sqrt{2gR} \sim 11,300 \text{ metros/seg.}$$

Por consiguiente [cfr. (54), p. 434], la velocidad de escape es justamente  $\sqrt{2}$  veces la velocidad requerida para mantener un satélite en órbita circular cerca de la Tierra. Un meteorito que cayese a la Tierra desde el infinito también tendría la velocidad  $v_e$  en el momento del impacto, si se desprecian la resistencia del aire y el movimiento de la Tierra en su órbita.

## 4.9 Trabajo y energía

### a. Trabajo realizado por fuerzas durante un movimiento

El *concepto de trabajo* arroja nueva luz sobre las consideraciones de la última sección y sobre muchos otros tópicos en mecánica y física.

Consideremos otra vez una partícula que se mueve sobre una curva bajo la acción de una fuerza que actúa a lo largo de dicha curva, y supongamos que la posición de la partícula está dada por la longitud de arco medida desde cualquier punto inicial fijo. En general, la fuerza que actúa en la dirección del movimiento será a su vez una función de  $s$ . Esta función tendrá valores positivos cuando el sentido de la fuerza sea el mismo que el de los valores crecientes de  $s$ , y tendrá valores negativos en el caso opuesto.

Si la magnitud de la fuerza es constante a lo largo de toda la trayectoria, entonces se llama *trabajo realizado por la fuerza* al producto de la fuerza por la distancia  $(s_1 - s_0)$  recorrida, siendo  $s_1$  el punto final del movimiento y  $s_0$  el punto inicial. Si la fuerza no es constante, definimos el trabajo mediante un proceso de límite. Subdividimos el intervalo de  $s_0$  a  $s_1$  en  $n$  subintervalos iguales o diferentes y observamos que si esos subintervalos son pequeños, la fuerza en cada uno de ellos es casi constante; si  $\sigma_v$

es un punto escogido arbitrariamente en el  $\nu$ -ésimo subintervalo, entonces en este subintervalo la fuerza será aproximadamente  $f(\sigma_\nu)$ . Si la fuerza en el  $\nu$ -ésimo subintervalo fuese exactamente  $f(\sigma_\nu)$ , el trabajo realizado por ella sería precisamente

$$\sum_{\nu=1}^n f(\sigma_\nu) \Delta s_\nu,$$

donde  $\Delta s_\nu$  denota, como es costumbre, la longitud del  $\nu$ -ésimo subintervalo. Si pasamos ahora al límite dejando que  $n$  crezca más allá de toda cota en tanto que la longitud del subintervalo mayor tiende a cero, por la definición de integral, la anterior suma tiende entonces a

$$W = \int_{s_0}^{s_1} f(s) ds,$$

cantidad que llamamos, en forma natural, el *trabajo* realizado por la fuerza.

Si la fuerza y el movimiento tienen el mismo sentido, el trabajo realizado por ella es positivo; y decimos entonces que *la fuerza efectúa trabajo*. Por otra parte, si la fuerza y el movimiento tienen sentidos opuestos, el trabajo realizado por ella es negativo; y en este caso decimos que *se efectúa trabajo contra la fuerza*.<sup>1</sup>

Si consideramos la coordenada de posición  $s$  como una función del tiempo  $t$ , de manera que la fuerza  $f(s) = p$  sea también una función de  $t$ , entonces en un plano con coordenadas rectangulares  $s$  y  $p$  podemos representar el punto de coordenadas  $s = s(t)$  y  $p = p(t)$  como una función del tiempo. Este punto describirá una curva que podemos llamar el *diagrama de trabajo* del movimiento. Si se trata de un movimiento periódico, como el de cualquier máquina, entonces después de un cierto tiempo  $T$  (un período) el punto móvil  $(s(t), p(t))$  regresará a la misma posición; esto es, el diagrama de trabajo será una curva cerrada. En este caso la curva puede consistir simplemente de uno y el mismo arco, recorrido primero hacia adelante y después hacia atrás. Esto ocurre, por ejemplo, en el caso de oscilaciones elásticas. Sin embargo, también es posible que la curva sea de un tipo más general de curva cerrada, limitando un área. Este es el caso, por ejemplo, de las máquinas en que la presión sobre un pistón no es la misma durante la carrera hacia adelante que durante la carrera hacia atrás. El trabajo realizado en un *ciclo*, esto es, en el tiempo  $T$ , estará entonces dado simplemente por el negativo del área, con signo negativo, encerrada por el diagrama de trabajo, o sea, en otras palabras, por la integral

<sup>1</sup> Obsérvese que aquí debemos caracterizar cuidadosamente la fuerza de la que hablamos. Por ejemplo, al levantar un peso el trabajo realizado por la fuerza de gravedad es negativo: Se hace trabajo contra la gravedad. Pero desde el punto de vista de la persona que levanta el peso, el trabajo realizado es positivo, pues deberá ejercer una fuerza opuesta a la de gravedad.

$$\int_{t_0}^{t_0+T} p(t) \frac{ds}{dt} dt,$$

donde el intervalo de tiempo de  $t_0$  a  $t_0 + T$  representa exactamente un período del movimiento. Si la frontera del área se recorre en el sentido positivo, el trabajo realizado es negativo; y si se recorre en el sentido negativo, el trabajo realizado será positivo. Si la curva consiste de varias espiras, algunas recorridas positivamente y otras negativamente, el trabajo realizado es la suma de las áreas de las espiras, con su signo cambiado.

Estas consideraciones son ilustradas en la práctica por el *diagrama indicador* de una máquina de vapor antigua. Mediante un dispositivo mecánico diseñado convenientemente, se hace mover un lápiz sobre una hoja de papel; el movimiento horizontal del lápiz relativo al papel es proporcional a la distancia  $s$  del pistón a su posición extrema, en tanto que el movimiento vertical es proporcional a la presión del vapor  $y$ , por consiguiente, a la fuerza total  $p$  del vapor sobre el pistón. Este describe entonces el diagrama de trabajo de la máquina sobre una escala conocida. El área de este diagrama se mide (generalmente usando un planímetro), y así se encuentra el trabajo realizado por el vapor sobre el pistón. Aquí vemos también que nuestra convención para el signo de un área, como se discutió en la p. 382, es definitivamente de interés práctico. Pues ocurre a veces, cuando la máquina funciona baja, que el vapor muy expandido en el extremo de la carrera del pistón tiene una presión menor que la requerida para su expulsión hacia el recorrido de regreso. En el diagrama esto aparece como una espira recorrida positivamente; y la máquina extrae energía del volante en vez de proporcionársela.

### b. Trabajo y energía cinética. Conservación de la energía

La ley de movimiento

$$m\ddot{s} = f$$

conduce a una relación fundamental entre los cambios en velocidad durante el movimiento de una partícula a lo largo de una curva y el trabajo realizado por la fuerza  $f$  en la dirección del movimiento. Usando el mismo artificio que en los ejemplos anteriores, multiplicamos ambos miembros de la ecuación de movimiento por  $\dot{s}$ :

$$m\dot{s}\ddot{s} = f(s)\dot{s}.$$

Ahora bien  $m\dot{s}\ddot{s} = (d/dt) \frac{1}{2}m\dot{s}^2 = (d/dt) \frac{1}{2}mv^2$ , donde  $v(t) = \dot{s}$  es la velocidad de la partícula. Integrando ambos lados de la ecuación con respecto a  $t$  entre los límites  $t_0$  y  $t_1$ , obtenemos

$$\frac{1}{2}mv^2(t_1) - \frac{1}{2}mv^2(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(s) \frac{ds}{dt} dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s) ds = W.$$

La cantidad  $\frac{1}{2}mv^2$  se llama la *energía cinética*,  $K$ , de la partícula. Por lo tanto: *El cambio en energía cinética de una partícula durante su movimiento es igual al trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre ella en la dirección del movimiento.*

La cantidad  $f$  representa la fuerza que actúa en la dirección del movimiento, o *componente tangencial* de la fuerza. Para una fuerza  $\mathbf{F} = (\rho, \sigma)$ , su componente en la dirección del movimiento es

$$f = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \rho \frac{dx}{ds} + \sigma \frac{dy}{ds}.$$

Si  $\rho$  y  $\sigma$  son funciones conocidas de  $x$  e  $y$ , y si se sabe que la partícula se mueve sobre una curva  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , entonces  $f$  también se vuelve una función conocida de  $s$ . En consecuencia, para calcular el trabajo

$$(55) \quad W = \int_{s_0}^{s_1} f(s) ds$$

cuando la partícula se mueve de una posición  $(x_0, y_0)$  a otra  $(x_1, y_1)$ , en general tiene que conocerse la trayectoria sobre la cual la partícula se mueve.

En una clase importante de casos el trabajo  $W$  depende sólo de las posiciones inicial y final, pudiendo expresarse en la forma

$$(56) \quad W = V(x_0, y_0) - V(x_1, y_1)$$

en la que  $V(x, y)$  es una función adecuada que se llama *energía potencial*. La fórmula que expresa que el cambio en energía cinética es igual al trabajo realizado por la fuerza puede entonces escribirse también en la forma

$$(57) \quad \frac{1}{2}mv^2(t_1) + V(x_1, y_1) = \frac{1}{2}mv^2(t_0) + V(x_0, y_0).$$

Así la cantidad  $K + V$ , suma de las energías mecánicas cinética y potencial, es decir, la *energía total*, no cambia durante el movimiento. Este es un ejemplo de la ley física general de la *conservación de la energía*.

Una función de energía potencial  $V$  puede fácilmente construirse para algunos de los movimientos discutidos antes. Así, para una partícula sujeta a la acción de la gravedad se tiene  $\mathbf{F} = (0, -mg)$  y  $f = -mg(dy/ds)$ . El trabajo realizado por la fuerza de gravedad cuando la partícula pasa de la posición  $(x_0, y_0)$  a la posición  $(x_1, y_1)$  es entonces

$$W = \int_{s_0}^{s_1} -mg \frac{dy}{ds} ds = \int_{y_0}^{y_1} -mg dy = mgy_0 - mgy_1.$$



Vemos que  $W$  es proporcional a la diferencia de alturas entre las posiciones inicial y final. Como función de energía potencial  $V$ , podemos escoger  $V = mgy$  (o, más generalmente,  $V = mgy + c$ , donde  $c$  es cualquier constante). La ley de la conservación de la energía establece entonces que la cantidad

$$\frac{1}{2}v^2 + gy$$

es constante durante el movimiento. Este hecho ha sido ya observado al investigar el movimiento de una partícula que se desliza hacia abajo sobre una curva (p. 426).

### c. La atracción mutua de dos masas

Otro ejemplo de una fuerza con la cual puede asociarse una función de energía potencial  $V$  lo proporciona la atracción gravitacional  $\mathbf{F}$  que una partícula  $P_0 = (x_0, y_0)$  de masa  $m_0$  ejerce sobre otra partícula  $P = (x, y)$  de masa  $m$ . Aquí es

$$\mathbf{F} = \left[ \frac{-\mu(x - x_0)}{r^3}, \frac{-\mu(y - y_0)}{r^3} \right],$$

donde  $\mu = \gamma m_0 m$  y  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . (Según la ley de Coulomb, el mismo tipo de fórmula describe la interacción de dos cargas eléctricas.)

La fuerza en la dirección del movimiento es entonces

$$f = -\frac{\mu}{r^3} \left[ (x - x_0) \frac{dx}{ds} + (y - y_0) \frac{dy}{ds} \right] = -\frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{\mu}{r},$$

puesto que

$$\begin{aligned} (x - x_0) \frac{dx}{ds} + (y - y_0) \frac{dy}{ds} &= \frac{1}{2} \frac{d}{ds} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \\ &= \frac{1}{2} \frac{dr^2}{ds} = r \frac{dr}{ds}. \end{aligned}$$

El trabajo realizado por la fuerza de atracción cuando la partícula  $P$  se mueve de la posición  $(x_1, y_1)$  a la posición  $(x_2, y_2)$  es

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \left( \frac{d}{ds} \frac{\mu}{r} \right) ds = \frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu}{r_1} = V(x_1, y_1) - V(x_2, y_2),$$

donde  $V(x, y) = -\mu/r = -\mu/\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  es la energía potencial.

Si la partícula se mueve de la posición  $(x_1, y_1)$  hasta el infinito (lo que correspondería a  $r_2 = \infty$ ), el trabajo realizado por la fuerza de atracción

es  $-\mu/r_1$ . El trabajo realizado por una fuerza opuesta que mueva la partícula hasta el infinito tiene el mismo valor numérico pero signo contrario. Por lo tanto,  $\mu/r_1 = -V(x_1, y_1)$  es el trabajo que tiene que hacerse *contra* la fuerza de atracción para mover la partícula de la posición  $(x_1, y_1)$  hasta el infinito. Esta importante expresión se llama *potencial mutuo* de las dos partículas. Aquí, por consiguiente, el potencial se define como el trabajo requerido para separar completamente las dos masas atractivas, por ejemplo, el trabajo requerido para arrancar por completo un electrón de un átomo (potencial de ionización).

Si la masa atractiva  $P_0$  se considera fija, la ley de la conservación de la energía implica que la partícula atraída  $P$  se mueve de manera tal que la expresión

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\gamma m_0}{r} = h$$

(la energía total por unidad de masa  $m$ ) tenga un valor constante durante el movimiento. Este hecho ha sido derivado ya para el caso especial de un movimiento puramente radial; y ahora vemos que se cumple para cualquier tipo de movimiento bajo la influencia de la atracción gravitacional. Nuevamente podemos concluir que  $h \geq 0$  para una partícula que escapa al infinito; su órbita es entonces no acotada (parábola o hipérbola) en vez de acotada (elipse). La velocidad de escape es

$$v_e = \sqrt{\frac{2\gamma m_0}{r}}$$

la cual corresponde a  $h = 0$ ; es la mínima velocidad que hará que la partícula escape al infinito desde una distancia dada  $r$ . No depende de la *dirección* en la cual se suelte la partícula sino sólo de la distancia  $r$  al centro de atracción.

#### d. El estiramiento de un resorte

Como un tercer ejemplo, considérese el trabajo que se hace al estirar un resorte. Con las hipótesis relativas a las propiedades elásticas del resorte que se hicieron en la p. 423, la fuerza actuante es  $f = -kx$ , donde  $k$  es constante. El trabajo que debe hacerse contra esta fuerza para estirar el resorte desde la posición sin deformación  $x = 0$  a la posición final  $x = x_1$  está dado, en consecuencia, por la integral

$$\int_0^{x_1} kx \, dx = \frac{1}{2} kx_1^2.$$

**\*e. La carga de un condensador**

El concepto de trabajo en otras ramas de la física puede tratarse de manera análoga. Por ejemplo, considérese el problema de cargar un condensador. Si se denota por  $Q$  la cantidad de electricidad en el condensador, por  $C$  su capacidad y por  $V$  la diferencia de potencial (voltaje) entre sus placas, entonces por la física se sabe que  $Q = CV$ . Además, el trabajo hecho al mover una carga  $Q$  a través de una diferencia de potencial  $V$  es igual a  $QV$ . Puesto que durante el proceso de carga del condensador la diferencia de potencial  $V$  no es constante sino que crece con  $Q$ , se efectúa un paso al límite de manera análoga a como se hizo en la p. 436, y así se obtiene como expresión para el trabajo realizado al cargar el condensador

$$\int_0^{Q_1} V dQ = \frac{1}{C} \int_0^{Q_1} Q dQ = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C} = \frac{1}{2} Q_1 V_1,$$

donde  $Q_1$  es la cantidad total de electricidad que pasa al condensador y  $V_1$  es la diferencia de potencial entre sus placas al final del proceso de carga.

*Apéndice***\*A.1 Propiedades de la evoluta**

En la p. 377 se definió la evoluta  $E$  de una curva  $C$  como el lugar geométrico de los centros de curvatura de  $C$ . Si  $C$  está representada por:  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ , usando como parámetro la longitud de arco  $s$ , entonces el centro de curvatura  $(\xi, \eta)$  del punto de  $C$  con parámetro  $s$  está dado por [cfr. (17a), p. 377]

$$(58) \quad \xi = x - \rho \dot{y}, \quad \eta = y + \rho \dot{x},$$

donde

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}.$$

Las cantidades  $\kappa$  y  $|\rho|$  son, respectivamente, la *curvatura* y el *radio de curvatura* de  $C$ .

A partir de estas fórmulas pueden deducirse algunas propiedades geométricas interesantes de la evoluta.

Derivando la relación  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$  se llega a  $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0$ . Puesto que también  $\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = 1/\rho$ , se tiene

$$(59) \quad \ddot{x} = -\frac{1}{\rho} \dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{1}{\rho} \dot{x}.$$

Derivando con respecto a  $s$  las fórmulas (58), resulta

$$\dot{\xi} = \dot{x} - \rho\ddot{y} - \dot{\rho}\dot{y} = -\dot{\rho}\dot{y}, \quad \dot{\eta} = \dot{y} + \rho\ddot{x} + \dot{\rho}\dot{x} = \dot{\rho}\dot{x},$$

y, en consecuencia,

$$\dot{\xi}\dot{x} + \dot{\eta}\dot{y} = 0.$$

Puesto que los cosenos directores de la normal a la curva están dados por  $-\dot{y}$  y  $\dot{x}$ , la normal a la curva  $C$  es tangente a la evoluta  $E$  en el centro de curvatura; o bien, la tangente a la evoluta es la normal a la curva dada; o, lo que es lo mismo, la evoluta es la "envolvente" de las normales (cfr. Fig. A.1).

Además, si se denota por  $\sigma$  la longitud de arco de la evoluta medida desde un punto fijo arbitrario, usando  $s$  como parámetro se tendrá

$$\dot{\sigma}^2 = \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2.$$

Y como  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ , de las fórmulas (59) se obtiene

$$\dot{\sigma}^2 = \dot{\rho}^2.$$

Si el sentido en que se mide  $\sigma$  se escoge adecuadamente, se sigue que

$$\dot{\sigma} = \dot{\rho},$$

siempre  $\rho \neq 0$ . La integración da

$$\sigma_1 - \sigma_0 = \rho_1 - \rho_0.$$

Esto es, la longitud de arco entre dos puntos de la evoluta es igual a la diferencia entre los correspondientes radios de curvatura, suponiendo que  $\dot{\rho}$  permanece diferente de cero para el arco en cuestión.

Esta última condición no es superflua. Pues si  $\dot{\rho}$  cambia de signo entonces la fórmula  $\dot{\sigma} = \dot{\rho}$  muestra que al pasar al correspondiente punto de la evoluta la longitud de arco  $\sigma$  tiene un máximo o un mínimo; o sea, al pasar a este punto no se continúa considerando  $\sigma$  hacia adelante sino que debe invertirse el sentido en que se mide. Si se desea evitar esta inversión debe cambiarse el signo en la fórmula anterior, esto es, poner  $\dot{\sigma} = -\dot{\rho}$  al pasar a tal punto.

También puede notarse que los centros de curvatura que corresponden a máximos o mínimos del radio de curvatura son *cúspides de la evoluta*. [La prueba no se da aquí.] (Ver Figs. A.4, A.6.)

La relación geométrica recién encontrada puede expresarse aún en otra forma: Imaginemos un hilo flexible e inextensible colocado a lo largo de un arco de la evoluta  $E$  y estirado de manera que una parte de él se extienda tangencialmente fuera de la curva; si, además, el punto extremo  $Q$  del hilo queda inicialmente sobre la curva original  $C$ , entonces al desenrollarlo

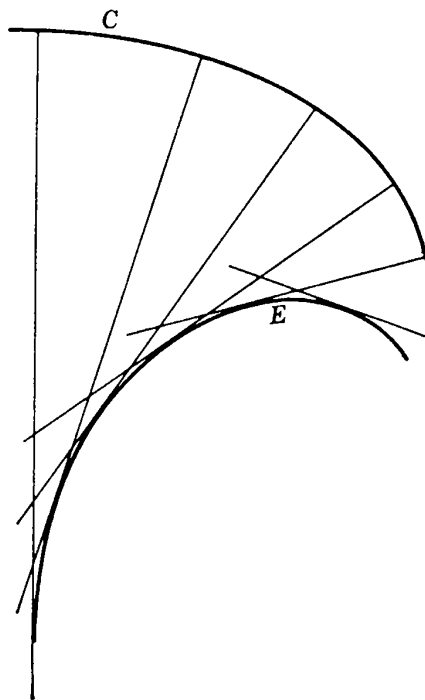


Figura A.1 Evoluta ( $E$ ).

$Q$  describirá dicha curva  $C$ . De aquí proviene el nombre de evoluta (*evol-vere*, desenrollar). La curva  $C$  se llama una *involuta* de la evoluta  $E$ . Por otra parte, podemos comenzar con una curva arbitraria  $E$ , y mediante este proceso de desenrollado construir su involuta  $C$ . Entonces, en forma inversa se ve que  $E$  será la evoluta de  $C$  (Fig. A.2).

Para la demostración, considérese la curva  $E$ , que ahora es la curva dada, descrita en la forma  $\xi = \xi(\sigma), \eta = \eta(\sigma)$ , donde las coordenadas rectangulares corrientes se denotan por  $\xi$  y  $\eta$  y el parámetro  $\sigma$  es la lon-

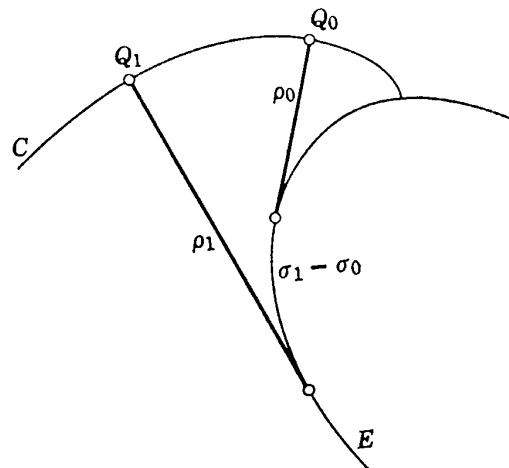


Figura A.2 Construcción de la involuta  $C$  de una curva  $E$ :  $\rho_1 = \rho_0 + \sigma_1 - \sigma_0$ , mediante un hilo.

gitud de arco sobre  $E$ . El enrollado se hace según lo indica la Fig. A.3. Cuando el hilo está completamente enrollado sobre la evoluta  $E$ , el extremo  $Q$  de aquél coincide con el punto  $A$  de  $E$  que corresponde a un arco de longitud  $a$ . Si ahora se desenrolla el hilo hasta que sea tangente a la evoluta en el punto  $P$ , correspondiente a la longitud de arco  $\sigma > a$ , la longitud del segmento  $PQ$  será  $(\sigma - a)$  y sus cosenos directores  $-\dot{\xi}$  y  $-\dot{\eta}$ , donde el punto denota ahora derivación con respecto a  $\sigma$ . Así se obtienen para las coordenadas  $x, y$  del punto  $Q$  las expresiones

$$(60) \quad x = \xi - (\sigma - a)\dot{\xi}, \quad y = \eta - (\sigma - a)\dot{\eta},$$

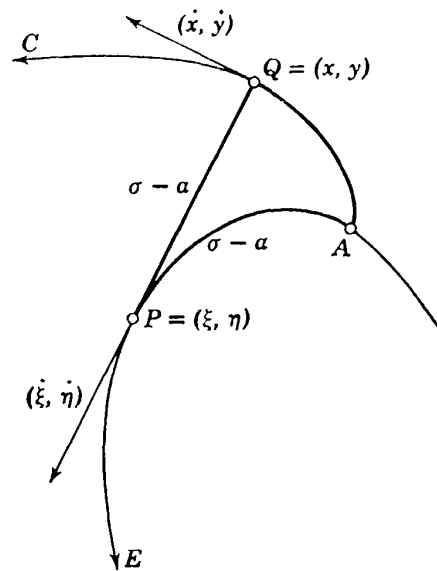


Figura A.3

que son las ecuaciones de la involuta descrita por  $Q$ , en términos del parámetro  $\sigma$ . Derivando con respecto a  $\sigma$  resulta

$$(61) \quad \dot{x} = \dot{\xi} - \dot{\xi} + (a - \sigma)\ddot{\xi} = (a - \sigma)\ddot{\xi},$$

$$\dot{y} = \dot{\eta} - \dot{\eta} + (a - \sigma)\ddot{\eta} = (a - \sigma)\ddot{\eta}.$$

Puesto que  $\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} = 0$ , se encuentra de inmediato que

$$\dot{\xi}\dot{x} + \dot{\eta}\dot{y} = 0,$$

lo cual muestra que la recta  $PQ$  es normal a la involuta  $C$ . Por consiguiente, puede afirmarse que las normales a la curva  $C$  son tangentes a la curva  $E$ . Los cosenos directores de la tangente a  $E$  son  $\dot{\xi}$  y  $\dot{\eta}$ , por lo que para los cosenos directores de la tangente a  $C$  se encuentran las expresiones

$$(62) \quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \dot{\eta}, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\dot{\xi}.$$

Derivando con respecto a  $\sigma$  la relación  $\dot{\xi}\dot{x} + \dot{\eta}\dot{y} = 0$  y substituyendo para  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$ ,  $\ddot{\xi}$ ,  $\ddot{\eta}$  las expresiones que resultan de las ecuaciones (61), (62) anteriores, se llega a

$$0 = \ddot{\xi}\dot{x} + \ddot{\eta}\dot{y} + \dot{\xi}\ddot{x} + \dot{\eta}\ddot{y} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{a - \sigma} + \frac{-\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

Por lo tanto, el radio de curvatura de la curva  $C$  correspondiente al punto  $Q = (x, y)$  vuelve a ser [ver fórmula (15), p. 373]

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \sigma - a.$$

Esto representa también la distancia de  $Q$  al punto  $P = (\xi, \eta)$ . Debido a que  $P$  también está sobre la normal a  $C$  en  $Q$ ,  $P$  resulta ser el centro de curvatura de  $C$  correspondiente al punto  $Q$ . Así, *cualquier curva  $E$  es la evoluta de todas sus involutas.*

*Ejemplos. Consideremos la evoluta de la cicloide*

$$x = \pi + t + \text{sen } t, \quad y = -1 - \text{cos } t.$$

Por la Ec. (17) de p. 377, el centro de curvatura  $(\xi, \eta)$  de una curva referida a un parámetro  $t$  arbitrario es

$$\xi = x - y \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}, \quad \eta = y + x \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

Un breve cálculo da el siguiente resultado para la evoluta de la cicloide

$$\xi = \pi + t - \text{sen } t, \quad \eta = 1 + \text{cos } t.$$

Si se pone  $t = \tau - \pi$ , entonces

$$\xi + \pi = \pi + \tau + \text{sen } \tau, \quad \eta - 2 = -1 - \text{cos } \tau;$$

y estas ecuaciones muestran que la evoluta es a su vez una cicloide similar a la curva original, pudiendo obtenerse a partir de ésta por traslación, como lo indica la Fig. A.4.

Lo anterior nos proporciona un método simple para construir un *péndulo cicloidal* (ver p. 430). Si una masa  $P$  se sujeta mediante una cuerda de longitud  $4$  a una de las cúspides de la evoluta, por efecto de la tensión, parte de la cuerda coincidirá con la evoluta y la parte restante estará a lo largo de una tangente. La masa  $P$  es entonces forzada a caer sobre la involuta, o sea, sobre la cicloide original. Bajo la acción de la gravedad  $P$  debe efectuar sobre alguna porción de la cicloide un movimiento isócrono, con un período que no depende de la posición en la que  $P$  indica su movimiento. (El parámetro  $t$  al cual es referida la cicloide *no* corresponde al

tiempo en el movimiento isócrona.) La longitud de la porción recta de la cuerda en un péndulo de este tipo varía durante el movimiento (ver Fig. A.4).

Como un ejemplo adicional se obtiene la ecuación para la involuta de una circunferencia. Se comienza con la circunferencia  $\xi = \cos \sigma$ ,  $\eta = -\sin \sigma$  y se desenrolla la tangente como lo indica la Fig. A.5. La involuta de esta curva queda entonces dada en la forma

$$x = \cos \sigma + \sigma \sin \sigma, \quad y = -\sin \sigma + \sigma \cos \sigma.$$

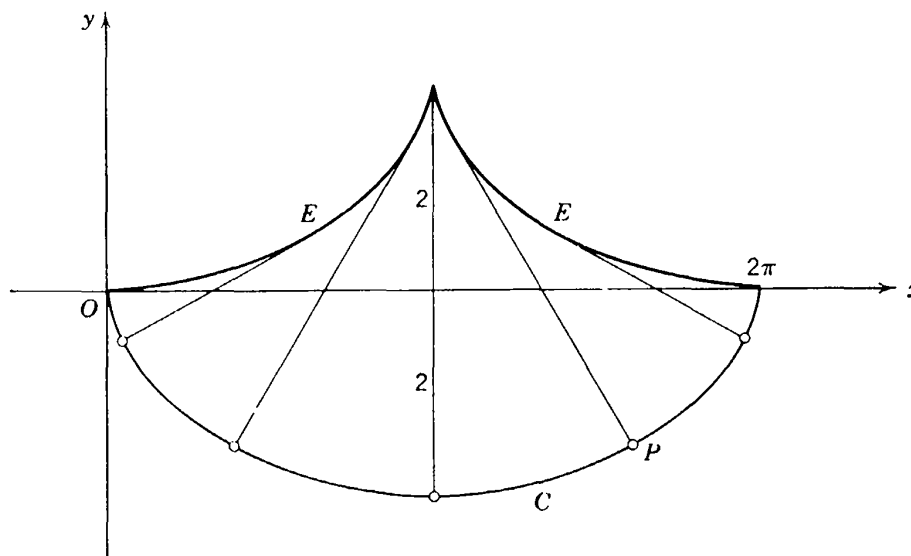


Figura A.4 El péndulo cicloidal.

(usando la ecuación (60) de la p. 445 con  $a = 0$ ).

Por último, se determina la evoluta de la elipse  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ . De inmediato resulta

$$\xi = x - y \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t.$$

y

$$\eta = y + x \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}} = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 t,$$

como representación paramétrica de la evoluta. Si de estas ecuaciones se elimina  $t$  de la manera usual, se llega a la ecuación de la evoluta en forma no paramétrica:

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Esta curva es una *astroide*. Su gráfica se da en la Fig. A.6. Por medio de las ecuaciones paramétricas podemos fácilmente cerciorarnos de que los centros de curvatura que corresponden a los vértices de la elipse son efectivamente las cúspides de la astroide.



**\*A.2 Áreas limitadas por curvas cerradas. Índices**

En la sección 4.2 se representó el área limitada por una curva cerrada  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , la cual en ninguna parte se intersecta a sí misma (*curva cerrada simple*), por medio de la integral

$$A = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \dot{x}(t) dt;$$

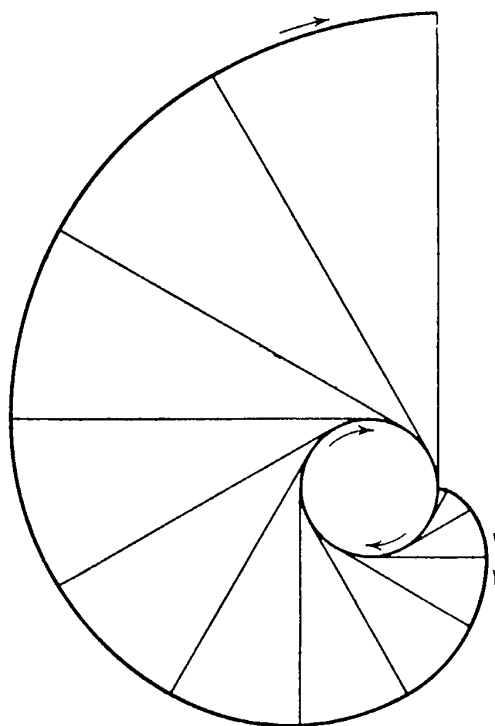
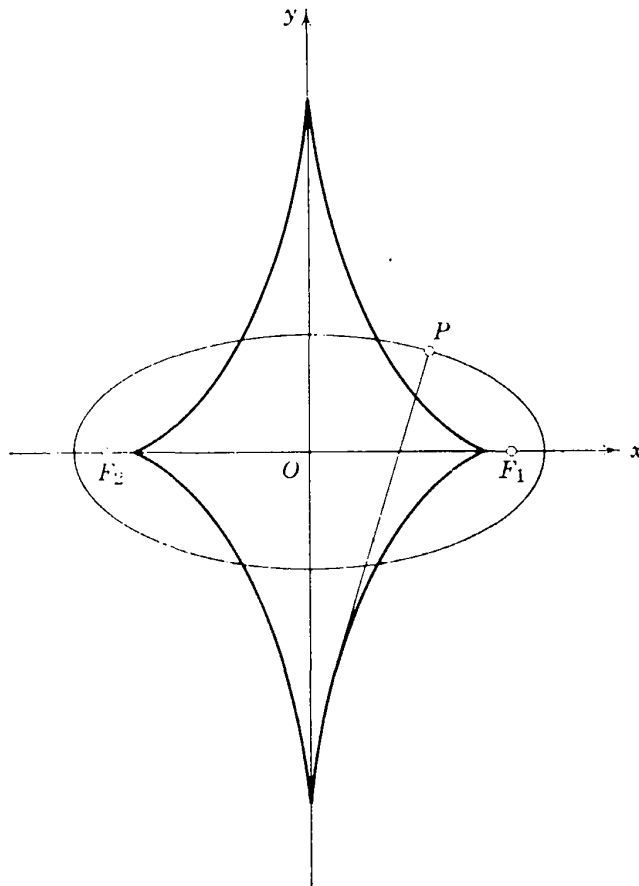


Figura A.5 Involuta de la circunferencia.

el valor que se obtiene es positivo o negativo dependiendo de que la frontera se recorra en el sentido contra reloj o en el opuesto. Esta fórmula sigue siendo válida como definición de  $A$  aun para curvas que presentan autointersecciones. Falta, sin embargo, ver cómo  $A$  se relaciona con las áreas en tales casos. Supóngase que la curva  $C$ , dada por las ecuaciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , se corta a sí misma en un número finito de puntos y de esta manera divide el plano en un número finito de porciones  $R_1, R_2, \dots$ . Supóngase además que las derivadas son continuas y que  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ , excepto quizá para un número finito de discontinuidades de salto (que pueden corresponder a esquinas o no). Por último, supóngase que la curva tiene un número finito de *rectas de apoyo*  $x = \text{constante}$ , es decir, rectas verticales que son tangentes a dicha curva o pasan por uno de sus puntos de autointersección.

A cada región  $R_i$  se le asigna entonces un entero, el *índice*  $\mu_i$ , definido de la siguiente manera: Se escoge un punto arbitrario  $Q$  de  $R_i$  que no esté sobre una recta de apoyo y se traza la semirrecta que se extiende desde  $Q$  hacia arriba en la dirección del eje  $y$  positivo. Se cuenta el número de veces que la curva  $C$  orientada según las  $t$  crecientes cruza la semirrecta de derecha a izquierda y se resta del número de veces en que el cruce se



**Figura A.6.** Evoluta de la elipse.

efectúa de izquierda a derecha; la diferencia es el índice  $\mu_i$ . Por ejemplo, el interior de la curva representada en la Fig. 4.17, p. 361, tiene el índice  $\mu = +1$ ; y en la Fig. A.7 las regiones  $R_1, \dots, R_5, R_6$  tienen los índices  $\mu_1 = -1, \mu_2 = -2, \mu_3 = -1, \mu_4 = 0, \mu_5 = 1$  y  $\mu_6 = 0$ . Este número  $\mu_i$  efectivamente depende sólo de las regiones  $R_i$  y no del punto particular  $Q$  escogido en  $R_i$ , como puede verse fácilmente de la siguiente manera: Escójase cualquier otro punto  $Q'$  en  $R_i$  que no esté sobre una recta de apoyo y únase  $Q$  con  $Q'$  por medio de una línea quebrada contenida completamente en  $R_i$  (Fig. A.8). Conforme esta línea se recorre de  $Q$  a  $Q'$ , la diferencia entre el número de cruces de derecha a izquierda y el número de cruces de izquierda a derecha es constante. Esto es así porque entre dos

rectas de apoyo el número de cruces de cada tipo no cambia, mientras que al atravesar la curva una recta de apoyo el número de cruces de ambos tipos sigue siendo el mismo, o bien ambos se incrementan en uno, o bien decrecen en uno; y así, de cualquier manera, la diferencia no se altera. En este proceso una recta de apoyo que encuentra a la curva en varios puntos, digamos  $A, B, \dots, H$ , se considera como varias rectas de apoyo diferentes,  $FA, FB, \dots, FH$ , donde  $F$  es un punto situado verticalmente

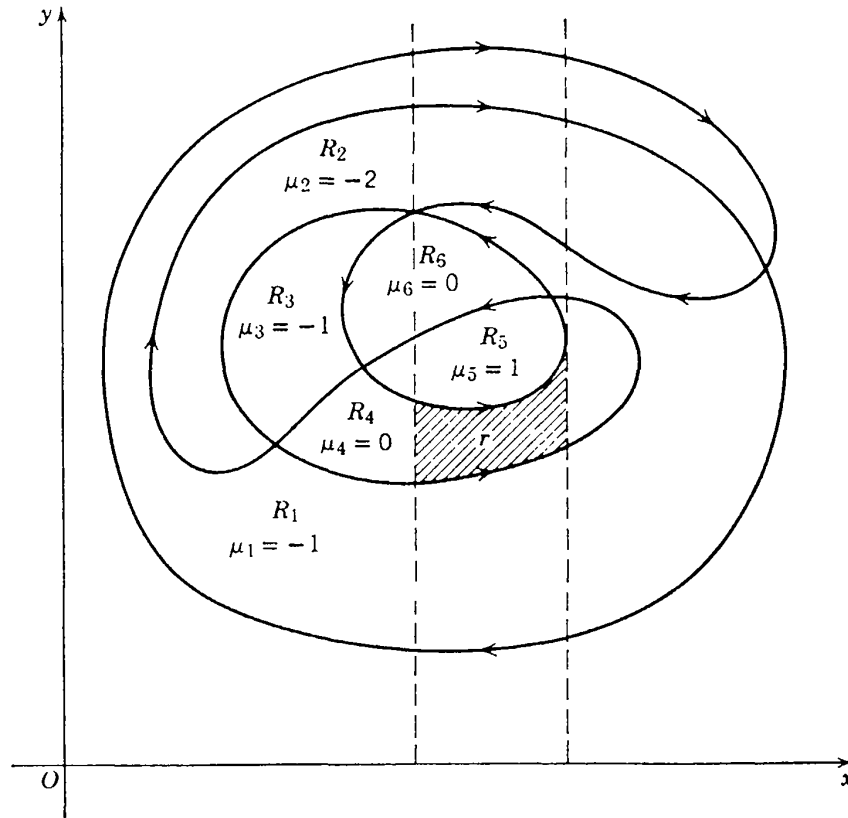


Figura A.7 Índices  $\mu_i$  de las regiones  $R_i$  que forman las curvas cerradas y orientadas. Figura A.8.

por encima de todos los puntos  $A, B, \dots, H$ . Nuestro argumento se aplica entonces a cada una de estas rectas. Por lo tanto, el número  $\mu_i$  tiene el mismo valor independientemente de que para determinarlo se use  $Q$  o  $Q'$ .

En particular, si la curva no se corta a sí misma, su interior consiste de una única región  $R$  cuyo índice es  $+1$  o  $-1$  según que la frontera se recorra en el sentido contra reloj o en el opuesto. Para hacer esto evidente, trácese una recta vertical (no de apoyo) que intersecte a la curva; y sobre ella determínese el punto más alto de intersección  $P$  con la curva, y escójase un punto  $Q$  en  $R$  situado debajo de  $P$  y tan cercano a él que entre  $P$  y  $Q$  ningún otro punto de intersección exista. Entonces, por encima de  $Q$  se tiene un cruce de la curva que, si ésta se recorre en el sentido contra

reloj, es un cruce de derecha a izquierda, de manera que  $\mu = +1$ ; y en caso contrario  $\mu = -1$ . Según lo que se vio antes, este mismo valor de  $\mu$  resulta para cualquier otro punto de  $R$ . Para una curva como la considerada y, de hecho, para todas las curvas cerradas, una de las regiones, la “exterior” a la curva, se extiende sin límite en todas direcciones; y vemos de inmediato que esta región tiene índice 0, y será ignorada en lo que sigue. Por lo anterior, la relación entre la integral  $A$  y las áreas de las regiones  $R_i$  está dada por el siguiente teorema:

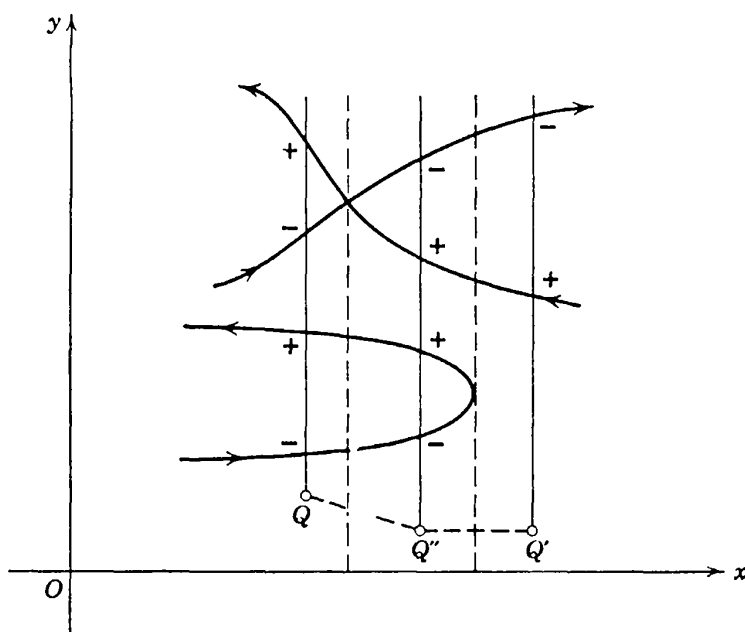


Figura A.8.

**TEOREMA.** *El valor de la integral  $-\int_a^b y \dot{x} dt$  es igual a la suma de las áreas absolutas de las regiones  $R_i$ , donde cada área  $R_i$  se cuenta  $\mu_i$  veces. En símbolos:*

$$-\int_a^b y \dot{x} dt = \sum \mu_i |\text{área } R_i|.$$

**DEMOSTRACIÓN.** La demostración es sencilla. Supongamos, como tenemos derecho a hacerlo, que la curva completa está por encima del eje  $x$ . (Agregando una constante a  $y$  no se altera el valor de la integral  $A$  para una curva cerrada.) Las rectas de apoyo cortan  $R_i$  en un número finito de porciones. Sea  $r$  una de estas porciones. Entonces, al tomar la integral  $-\int y \dot{x} dt = -\int y dx$  para cada rama univaluada de la función  $y = y(x)$  e interpretarla como el área entre la curva y el eje  $x$ , encontramos que el valor absoluto del área de  $r$  es contada  $+1$  veces por cada rama de derecha a izquierda encima de  $r$ , y  $-1$  veces por cada rama de izquierda a derecha

encima de  $r$ ; en total,  $\mu_i$  veces. Lo mismo es cierto para cada una de las demás porciones de  $R_i$ ; por lo tanto,  $R_i$  se cuenta  $\mu_i$  veces. Así, la integral sobre la curva completa tiene el valor  $\sum \mu_i |\text{área } R_i|$ , como se estableció (Ver Fig. A.7). Esta fórmula concuerda con la que se encontró para curvas simples, como se ve a partir de la discusión sobre los valores de  $\mu$  para tales curvas.

La definición dada para el índice  $\mu_i$  tiene la desventaja de haber sido formulada en términos de un sistema coordenado particular. De hecho, no obstante, puede demostrarse que el valor de  $\mu_i$  asignado a cada región  $R_i$  es independiente del sistema de coordenadas y depende solamente de la curva. Esto puede verse fácilmente identificando  $\mu_i$  con el número total  $\nu_i$  de veces que una porción de la curva, para  $t$  creciente de  $\alpha$  a  $\beta$ , rodea cualquier punto fijo  $Q_i$  de  $R_i$  en el sentido contra reloj; esto es, el número de veces que  $C$  se *enrolla* alrededor de  $Q$ . Probaremos la identidad de  $\mu_i$  con  $\nu_i$ .

Sea  $C$  dada paramétricamente por  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  donde  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Sea  $Q = (\xi, \eta)$  un punto que no está sobre una recta de apoyo de  $C$ . Tomemos  $Q$  como el origen de un sistema de coordenadas polares  $r, \theta$ , en el cual

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad \cos \theta = \frac{x - \xi}{r}, \quad \text{sen } \theta = \frac{y - \eta}{r}.$$

El ángulo polar  $\theta$  está determinado solamente a menos de múltiplos enteros de  $2\pi$ ; y, sin embargo,  $\theta$  está determinado unívocamente como una función de  $t$ , por su valor  $\theta_0$  para  $t = \alpha$ , si pedimos que  $\theta = \theta(t)$  varíe continuamente con  $t$  a lo largo de  $C$ . En  $t = \beta$  el ángulo  $\theta$  tendrá el valor  $\theta(\beta) = \theta_0 + 2\nu\pi$ , donde  $\nu$  es un entero. El número

$$\nu = \frac{1}{2\pi} [\theta(\beta) - \theta(\alpha)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} d\theta$$

representa el número de veces que la curva orientada  $C$  rodea a  $Q$ .

Así, la curva  $C$  cruza la semirrecta vertical que pasa por  $Q$ , para aquellos valores de  $t$  en los que la expresión  $(1/2\pi)[\theta(t) - \pi/2]$  tiene un valor entero  $n$ . Considérense para un  $n$  fijo los valores  $t$  en el intervalo paramétrico para los cuales  $(1/2\pi)(\theta - \pi/2) = n$ . Sean  $\sigma_n$  y  $\tau_n$  los números de tales valores  $t$  para los cuales  $d\theta/dt > 0$  y  $d\theta/dt < 0$ , respectivamente. Es obvio que el *índice* en el punto  $Q$  es

$$\mu = \sum_n \sigma_n - \sum_n \tau_n = \sum_n (\sigma_n - \tau_n).$$

Por otra parte,  $\sigma_n - \tau_n$  puede solamente tener uno de los valores 1, 0, -1, pues la gráfica de  $\theta(t)$  en el plano  $\theta, t$  debe cruzar la recta  $\theta = \pi/2 + 2n\pi$  alternadamente desde arriba y desde abajo. Precisamente, se tiene  $\sigma_n - \tau_n =$

$\text{sign} [\theta(\beta) - \theta(\alpha)]$  si  $\pi/2 + 2n\pi$  está entre  $\theta(\alpha)$  y  $\theta(\beta)$ ; de lo contrario, es  $\sigma_n - \tau_n = 0$ .

En consecuencia,  $\mu$  es igual al número de valores de la forma  $\pi/2 + 2n\pi$ , con un  $n$  entero que está entre  $\theta(\alpha)$  y  $\theta(\beta)$ , tomado con el signo de  $\theta(\beta) - \theta(\alpha)$ ; o sea,  $\mu$  es igual a  $\nu$ .

Puesto que  $\theta = \arctan [(y - \eta)/(x - \xi)]$ , se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{y}(x - \xi) - \dot{x}(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

Esto conduce a la siguiente representación integral para el índice de la curva  $C$  cerrada, orientada, con respecto al punto  $(\xi, \eta)$ :

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\dot{y}(x - \xi) - \dot{x}(y - \eta)}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} dt,$$

que puede escribirse en forma simple (ver pp. 384-385) sin referencia explícita al parámetro  $t$ , como

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{(x - \xi) dy - (y - \eta) dx}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

La característica notable de estos resultados es que el entero  $\mu$ , o el  $\nu$ , que describe una relación topológica entre el punto  $Q$  y la curva  $C$ , puede determinarse analíticamente a partir de la representación paramétrica de  $C$ , evaluando una integral.

## PROBLEMAS

### SECCION 4.1c, página 328

1. Bosquejar la hipocicloide para  $a = 4c$  (astroide) y encontrar su ecuación no paramétrica.

2. Demostrar que si  $c/a$  es racional la hipocicloide general se cierra después de que el círculo móvil ha girado un número entero de veces, en tanto que si  $c/a$  es irracional la curva encuentra a la circunferencia del círculo fijo en una infinidad de puntos y nunca se cierra.

3. Obtener la representación paramétrica

$$x = at - b \sin t, \quad y = a - b \cos t$$

para la trocoide ordinaria, esto es, para la trayectoria de un punto  $P$  sujeto a un disco de radio  $a$  que rueda a lo largo de una recta, siendo  $b$  la distancia de  $P$  al centro del disco (ver Fig. 4.7).

4. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva  $x^3 + y^3 = 3axy$  (la hoja de Descartes), escogiendo como parámetro  $t$  la tangente del ángulo entre el eje  $x$  y el rayo que va del origen al punto  $(x, y)$ .

### SECCION 4.1e, página 361

1. El ángulo  $\alpha$  entre dos curvas en un punto de intersección se define como el ángulo entre sus tangentes en ese punto. Encontrar una fórmula para  $\cos \alpha$  en términos de las representaciones paramétricas de las curvas.

2. Sean  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ . Encontrar fórmulas para  $d^2y/dx^2$  y  $d^3y/dx^3$  en términos de las derivadas con respecto al parámetro  $t$ .

3. Encontrar la fórmula en coordenadas polares para el ángulo  $\alpha$  entre dos curvas  $r = f(\theta)$  y  $r = g(\theta)$ .

4. Encontrar las ecuaciones de las curvas que en todas partes se intersectan bajo el mismo ángulo  $\alpha$  con las rectas que pasan por el origen.

5. Demostrar lo siguiente: si  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$  son continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivables en el intervalo abierto  $(a, b)$ , con  $x'^2 + y'^2 > 0$ , entonces existe al menos un punto sobre el arco abierto

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad (a < t < b),$$

en que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos extremos.

6. Sea  $P$  el punto de un círculo que describe una cicloide conforme el círculo rueda sobre una recta dada. Sea, además,  $Q$  el punto de contacto del círculo con la recta. Demostrar que en cualquier instante la normal a la cicloide en  $P$  pasa por  $Q$ . ¿Qué propiedad análoga se tiene para la tangente en  $P$ ?

7. Probar que la longitud del segmento de la tangente a la astroide

$$x = 4c \cos^3 \theta, \quad y = 4c \operatorname{sen}^3 \theta,$$

cortado por los ejes de coordenadas es constante.

\*8. Demostrar que las dos familias de elipses e hipérbolas,  $(0 < a < b)$ ,

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 1, \quad \text{para } 0 < \lambda < a,$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \tau^2} - \frac{y^2}{b^2 - \tau^2} = 1, \quad \text{para } a < \tau < b,$$

son cofocales (esto es, tienen los mismos focos) y se intersectan a ángulos rectos.

9. (a) Demostrar que para la elipse el ángulo entre los dos rayos que van de cada foco a un punto sobre la curva es bisectado por la normal en ese punto.

(b) Demostrar que para la hipérbola ese ángulo es bisectado por la tangente.

SECCION 4.1f, página 366

1. Probar que la curva definida por

$$y = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

tiene longitud finita, pero que la curva continua definida por

$$y = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

no es rectificable.

2. Probar que si la función  $f$  está definida y es monótona en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces el arco definido por

$$y = f(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

es rectificable.

## SECCION 4.1g, página 370

1. Una integral elíptica de segunda clase tiene la forma

$$\int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta.$$

(a) Demostrar que la longitud de arco de la elipse  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \operatorname{sen} \theta$  puede expresarse en términos de una integral elíptica de segunda clase,

(b) Hacer lo mismo para lo trocoide

$$x = at - b \operatorname{sen} t, \quad y = a - b \cos t.$$

\*(c) Demostrar que la longitud de arco de la hipérbola puede expresarse en términos de integrales elípticas de primera y segunda clases.

## SECCION 4.1h, página 372

1. Sea  $P$  un punto del círculo que al rodar genera una cicloide, y sea  $Q$  el punto más bajo de dicho círculo en cualquier instante dado.

● Demostrar que  $Q$  bisecta el segmento que une a  $P$  con el centro de la circunferencia oscultriz de la cicloide en  $P$ .

2. Encuéntrase el centro de curvatura para  $y = x^2$  cuando  $x = 0$ . Determinar el punto de intersección de las normales a la curva para  $x = 0$  y  $x = \epsilon$ . Calcular la distancia de la intersección al centro de curvatura. Sugerir una definición alternativa para el centro de curvatura. Demostrar que esta definición es equivalente a la definición dada en el texto.

3. Considérese la cuestión de si la circunferencia oscultriz cruza la curva en el punto de contacto.

\*4. Demostrar que la circunferencia de curvatura de la curva  $C$  en un punto  $P$  es el límite de las circunferencias que pasan por los tres puntos  $P, P_1, P_2$ , conforme  $P_1$  y  $P_2$  se acercan a  $P$ .

5. Sea  $r = f(\theta)$  la ecuación de una curva en coordenadas polares. Probar que la curvatura está dada por la fórmula

$$k = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{3/2}},$$

donde

$$r' = \frac{df}{d\theta}, \quad r'' = \frac{d^2f}{d\theta^2}.$$

6. La curva para la cual el segmento de tangente definido por el punto de contacto y la intersección con el eje  $y$  tiene longitud siempre igual a 1, se llama *tractriz*. Encontrar su ecuación. Demostrar que el radio de curvatura en cualquier punto de la curva es inversamente proporcional a la longitud del segmento de normal definido por el punto sobre la curva y la intersección con el eje  $y$ . Calcular la longitud de arco de la tractriz y encontrar las ecuaciones paramétricas en términos de la longitud de arco.

7. Sea  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  una curva cerrada. Una longitud constante  $p$  es medida sobre la normal desde el punto de su intersección con la curva. El extremo de este segmento describe una curva que se llama "curva paralela" a la original. Encontrar el área, la longitud de arco y el radio de curvatura de la "curva paralela".

8. Demostrar que las únicas curvas cuya curvatura es una constante fija  $k$  son circunferencias de radio  $1/k$ .



\*9. Si la curvatura de una curva en el plano  $xy$  es una función monótona de la longitud de arco, demostrar que la curva no es cerrada y que no tiene puntos dobles.

## SECCION 4.1i, página 378

1. Demostrar que la expresión para la curvatura de una curva  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  no es alterada por una rotación de ejes y tampoco por un cambio de parámetro dado por  $t = \phi(\tau)$ , donde  $\phi'(\tau) > 0$ .

## SECCION 4.3d, página 411

1. Demostrar que si la aceleración es siempre perpendicular a la velocidad, la velocidad (escalar) es constante.

2. El vector velocidad, considerado como un vector de posición, describe una curva conocida como odógrafa. Para una partícula que se mueve sobre una curva cerrada, investigar si la odógrafa de la partícula puede o no ser una recta.

3. Suponiendo que el círculo que rueda se mueve con velocidad constante, encontrar la velocidad y la aceleración del punto  $P$  que genera la cicloide.

4. Sea  $A$  un punto fijo en el plano y supóngase que el vector aceleración de un punto móvil  $P$  está siempre dirigido hacia  $A$  y es proporcional a  $1/|AP|^2$ . Demostrar que la odógrafa es una circunferencia (ver problema 2).

5. Sea  $A$  un punto fijo sobre un círculo. Sea  $P$  el punto del círculo móvil que se mueve de manera que el vector aceleración apunta hacia  $A$ . Probar que la aceleración es proporcional a  $|AP|^{-5}$ .

## SECCION 4.5, página 420

1. Una partícula que se mueve sobre una recta está sujeta a una resistencia que produce una retardación  $ku^3$ , donde  $u$  es la velocidad y  $k$  una constante. Encontrar expresiones para la velocidad ( $u$ ) y el tiempo ( $t$ ) en términos de  $s$ , la distancia desde la posición inicial, y  $v_0$ , la velocidad inicial.

2. Una partícula de masa unitaria se mueve sobre el eje  $x$  sujeta a una fuerza  $f(x) = -\text{sen } x$ .

(a) Determinar el movimiento de la partícula si en el tiempo  $t = 0$  se encuentra en  $x = 0$  y tiene velocidad  $v_0 = 2$ . Demostrar que cuando  $t \rightarrow \infty$  la partícula se aproxima a una posición límite, y encontrar esta posición.

(b) Si las condiciones son las mismas, excepto que  $v_0$  puede tener cualquier valor, demostrar que para  $v_0 > 2$  el punto se mueve hacia una distancia infinita cuando  $t \rightarrow \infty$ , y que para  $v_0 < 2$  el punto oscila en torno al origen.

3. Escójase un sistema de ejes con origen en el centro de la Tierra, cuyo radio se denota por  $R$ . De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, una partícula de masa unitaria que esté sobre el eje  $y$  será atraída por la Tierra con una fuerza  $-\mu M/y^2$ , donde  $\mu$  es la "constante gravitacional" y  $M$  es la masa terrestre.

(a) Determinar el movimiento de la partícula después de que ésta se suelta desde el punto  $y_0 (> R)$ ; esto es, si en el tiempo  $t = 0$  está en el punto  $y = y_0$  y tiene velocidad  $v_0 = 0$ .

(b) Encontrar la velocidad de la partícula en el momento de su impacto con la Tierra.

(c) Usando el resultado de (b), calcular la velocidad de una partícula que cae a la Tierra desde el infinito.<sup>1</sup>

\*4. Una partícula en reposo sobre el punto más alto de una circunferencia es ligeramente perturbada y se desliza hacia abajo por acción de la gravedad. ¿En qué punto dejará de moverse sobre la circunferencia?

<sup>1</sup> Esta es la misma que la mínima velocidad con la que debería dispararse un proyectil para que dejase la Tierra sin regresar jamás.

\*5. Una partícula de masa  $m$  se mueve sobre una elipse  $r = k/(1 - e \cos \theta)$ . La fuerza sobre la partícula es  $cm/r^2$ , dirigida hacia el origen. Describir el movimiento de la partícula, encontrar su período y demostrar que el radio vector de la partícula barre áreas iguales en tiempos iguales ("Ley de las Areas", de Kepler, para el movimiento planetario).

SECCION 4A.1, página 442

1. Demostrar que la evoluta de una epicloide (ejemplo, p. 348) es otra epicloide similar a la original que puede obtenerse de ésta por rotación y contracción.

2. Demostrar que la evoluta de una hipocicloide (ejemplo, p. 348) es otra hipocicloide que puede obtenerse de la primera por rotación y dilatación.