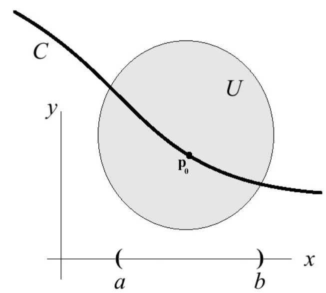
EL TEOREMA DE FUNCIÓN IMPLICITA



Definición. Una *curva continua* en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ tal que para todo $\mathbf{p}_0 \in C$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y una función continua $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $C \cap U = \{(x, g(x)) \mid x \in (a,b)\}$, o $C \cap U = \{(g(y), y) \mid y \in (a,b)\}$. La curva es *diferenciable* si la g es diferenciable, *continuamente diferenciable* si la g es continuamente diferenciable, etc.

Ejercicio 1. Demuestra que la curva dada por $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$, es suave (infinitamente diferenciable).

Ejercicio 2. Encuentra los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la curva dada por $x^\alpha + y^\alpha = 1$ es suave. Dibuja algunas de estas curvas.

Ejercicio 3. (opcional) Cierto o Falso:

1. La intersección de una curva suave en $\mathbb{R}^2$ con un abierto de $\mathbb{R}^2$ es una curva suave.
2. Existe una curva continua $C \subset \mathbb{R}^2$ que pasa por $(0,0)$ que es suave en todos sus puntos excepto en uno.
3. Una curva continua en $\mathbb{R}^2$ es un subconjunto cerrado.

El teorema de función implicita: *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $F : U \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable. Si la gradiente de F no se anula en U entonces todas las curvas de nivel de F son curvas continuamente diferenciables.*

Una reformulación del teorema: *Sea $F : U \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable y $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0) \in U$ tal que $F_y(\mathbf{p}_0) \neq 0$, $F(\mathbf{p}_0) = c$. Entonces existe una vecindad $U_0 \subset U$ de $\mathbf{p}_0$, y una función diferenciable $g : (a,b) \to \mathbb{R}$, tal que (1) $x_0 \in (a,b)$ y $g(x_0) = y_0$. (2) $F(x, g(x)) = c$ para todo $x \in (a,b)$. (3) $\{\mathbf{p} \in U_0 \mid F(\mathbf{p}) = 0\} = \{(x, g(x) \mid x \in (a,b)\}$.*

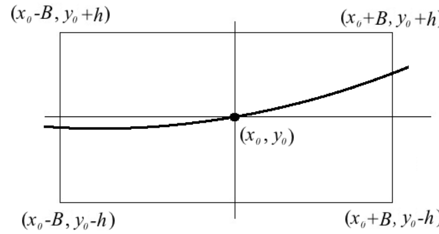
Nota. Decimos entonces que la función $y = g(x)$ está definida *implicitamente* por la ecuación $F(x,y) = 0$. Analogamente, si $F_x(\mathbf{p}_0) \neq 0$, se puede "depsejar" la x en términos de la y.

Ejercicio 4. Demuestra que las dos formulaciones del teorema son equivalentes.

Demostración del teorema. (Bosquejo) Sea $\mathbf{p}_0 \in U$ y C la curva de nivel de F que pasa por $\mathbf{p}_0$; es decir, $C := \{\mathbf{p} \in U \mid F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}_0)\}$. Como $\nabla F(\mathbf{p}_0) \neq 0$, por lo menos una de las componentes de la ∇F, F_x o F_y, es distina de cero en $\mathbf{p}_0$. Suponemos que $F_y(\mathbf{p}_0) > 0$ y demostraremos que C, en una vecindad de $\mathbf{p}_0$, está dada por la gráfica de una función $y = g(x)$.

Primero, demostramos que existe un rectángulo abierto $R \subset U$, con base $2B$ y altura $2h$, centrado en $\mathbf{p}_0$, $R := \{(x,y) \mid x_0 - B < x < x_0 + B, y_0 - h < y < y_0 + h\}$, con las siguientes propiedades:

1. $\overline{R} \subset U$.
2. $F_y(\mathbf{p}) > b$ para algun $b > 0$ y todo $\mathbf{p} \in R$.
3. $F_x(\mathbf{p}) \leq M$ para algun $M > 0$ y todo $\mathbf{p} \in R$.
4. $F(x, y_0 + h) > 0$ y $F(x, y_0 - h) < 0$ para todo $x \in (x_0 - B, x_0 + B)$.



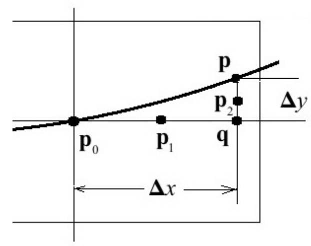
Ejercicio 5. Demuestra la existencia de tal rectángulo.

Luego, para cada $x \in (x_0 - B, x_0 + B)$ la función $u(y) = F(x, y)$ es continua en el intervalo $[y_0 - h, y_0 + h]$, $u(y_0 - h) < 0$ y $u(y_0 + h) > 0$, por lo que existe un $y = g(x)$ tal que $u(y) = 0$ (teorema de valor intermedio de cálculo de una variable). Además, este y es *único*, ya que $u' > 0$, así que $g(x)$ está bien definida.

Nos queda entonces demostrar que $y = g(x)$ es continuamente diferenciable en $(x_0 - B, x_0 + B)$. Lo haremos para $x = x_0$ (no usamos ninguna propiedad especial de este punto en $(x_0 - B, x_0 + B)$, solo escogemeos x_0 para simplificar la notación).

Sea $x_0 + \Delta x$ un punto cercano a x_0 y $\Delta y = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. Sean $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + (\Delta x, \Delta y)$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 + (\Delta x, 0)$. Existen entonces $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$, tal que $\mathbf{p}_1 = ((1 - \theta_1)x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)$ y $\mathbf{p}_2 = (x_0 + \Delta x, (1 - \theta_2)y_0 + \theta_2 \Delta y)$, satisfacen

$$F(\mathbf{q}) - F(\mathbf{p}_0) = F_x(\mathbf{p}_1)\Delta x, \quad F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q}) = F_y(\mathbf{p}_2)\Delta y.$$



Así que

$$0 = F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{p}_0) = [F(\mathbf{p}) - F(\mathbf{q})] + [F(\mathbf{q}) - F(\mathbf{p}_0)] = F_y(\mathbf{p}_2)\Delta y + F_x(\mathbf{p}_1)\Delta x.$$

Despejando Δy,

$$\Delta y = -\frac{F_x(\mathbf{p}_1)}{F_y(\mathbf{p}_2)}\Delta x.$$

Luego, usando las propiedades (2) y (3) del rectángulo R, la expresión $\frac{F_x(\mathbf{p}_1)}{F_y(\mathbf{p}_2)}$ está acotada en R, por lo que $\Delta y \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De aquí se sigue que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_0$ cuando $\Delta x \to 0$, por lo que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(\mathbf{p}_0)}{F_y(\mathbf{p}_0)}$$

ya que F_x, F_y son continuas.

Esto demuestra que $g(x)$ es diferenciable, con

$$g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}.$$

Luego, esta última fórmula también muestra que g' es continua, por ser expresada como la composición de funciones continuas. $\square$

Ejercicio 6. Formular y demostrar el teorema de función implicita para una ecuación de la forma $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Sugerencia: imitando la definición de curva diferenciable en $\mathbb{R}^2$ arriba, define primero lo que es una *hiper-superficie diferenciable* en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 7. Encuentra un ejemplo de una función suave $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuyo gradiente se anula en un punto $\mathbf{p}_0$, pero sin embargo la curva de nivel de F que pasa por $\mathbf{p}_0$ es suave.

Nota. Este ejercicio muestra que la condición $\nabla F \neq 0$ en el teorema de la funcion implicita es suficiente, pero no necesaria.