Cálculo III , ago-dic 2014

Tarea núm. 5

(para el 5 sept, 2014)

1. Cada una de las siguientes ecuaciones describe alguna curva de segundo grado en el plano: circunferencia, parábola, elipse, hipérbola o un "caso degenerado"(par de rectas, una sola recta, un punto, o el conjunto vacío). Tienes que indentificar la curva, y encontrar: en caso de circunferencia - el centro y el radio, en caso de parábola - el foco y la directriz, en caso de elipse – los focos, los tama nos de los ejes (mayor y menor), el centro y los vértices, en caso hipérbola – los focos, los vértices, el centro y las asíntotas. Usando toda esta información hay que dibujar la curva.

   a) $x^2 + 4x + y^2 + 8y + 19 = 0$

   b) $x^2 + 4x + 2y^2 + 16y + 19 = 0$

   c) $x^2 + 4x - 2y^2 + 16y + 19 = 0$

   d) $x^2 + 4x + 16y + 19 = 0$

   e) $x^2 + 4x + 16y^2 + 19 = 0$

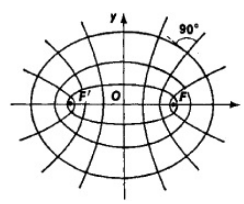
   f) $x^2 + 4x + 16y^2 + 8y = 0$

   g) $x^2 + 4x + 8y^2 + 16y + 12 = 0$

   h) $x^2 + 4x - 2y^2 + 16y - 19 = 0$

2. Sean $a, b, c \in \mathbf{R}$ con $a \neq 0$. Encuentra el vértice, foco y directriz de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ en términos de a, b, c.

3. *a*) El punto $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, con $y_0 \neq 0$, está sobre una cónica dada por la ecuación $Ax^2 + By^2 = 1$, con $A, B \neq 0$ (elipse o hipérbola). Encuentra la pendiente de la tangente a la cónica en el punto (x_0, y_0), en términos de x_0, y_0, A, B. (Respuesta: $-Ax_0/By_0$).

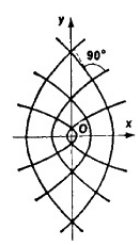
   

   b) Demuestra: dos rectas, con pendientes m_1 y m_2, son perpendiculares si y solo si $m_1 m_2 = -1$.

   c) Demuestra: todas las cónicas confocales (elipses e hipérbolas), con focos en $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$, están dadas por

   $$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1,$$

   con $\lambda > c^2$ para las elipses y $c^2 > \lambda > 0$ para las hipérbolas.

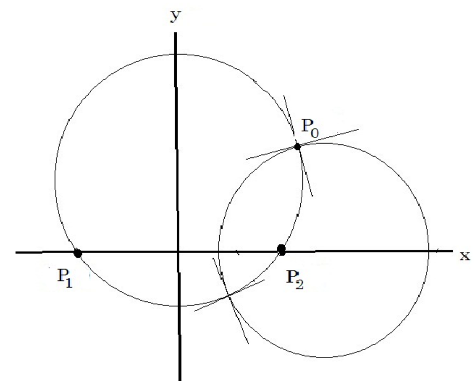
   

   d) Usa los dos incisos anteriores para demostrar: una elipse y una hipérbola confocales intersectan ortogonalmente (las tangentes a las curvas son perpendiculares).

   e) Formula y demuestra versiones de los dos incisos anteriores para la familia de parábolas confocales con el mismo foco y eje (digamos foco en $F = (0, 0)$ y eje el eje de x).

4. Sea $\lambda > 0$. Demuestra: (a) el lugar geométrico de todos los puntos en $\mathbf{R}^2$ cuyo distancia al eje de y es λ veces su distancia a $F = (1, 0)$ es una cónica (elipse, parábola o hiperbóla, dependiendo de λ). Encuentra la ecuación de la cónica y dibújala para distintos valores de λ. (b) Mismo para los puntos cuya *suma* de distancias a F y el eje de y es λ.

5. (Opcional) Sean $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ y $P_0 = (a, b)$, con $b \neq 0$.



a) Encuentra el centro, el radio y la ecuación del círculo que pasa por P_0, P_1, P_2.

b) Encuentra el lugar geométrico de los puntos P en el plano tal que su razon de distancias a P_1 y P_2 sea lo mismo que para P_0. Es decir, $dist(P, P_1)/dist(P, P_2) = dist(P_0, P_1)/dist(P_0, P_2)$. Demuestra que este lugar geométrico es una circunferencia que pasa por P_0 y encuentra su centro, radio y ecuación.

c) Demuestra que los dos círculos de los dos incisos anteriores intersectan ortogonalmente; esto es, para cada uno de los dos puntos de intersección de los dos circulos, las tangentes a los círculos son perpendiculares.

d) Ahora varia P_0 en todo $\mathbf{R}^2$, excepto el eje de x, y observa el patron de círculos que se obtiene. Tiene propiedades muy bonitas.

Referencia: `http://en.wikipedia.org/wiki/Apollonian_circles`