Geometría diferencial de curvas en el plano

Profesor: Gil Bor, CIMAT, Guanajuato, *gil@cimat.mx*

Duración del curso: 4 sesiones de 1 hora

Dirigido a: estudiantes desde el 3er año de licenciatura (alumnos que han tomado curso de cálculo vectorial).

Fecha y lugar: oct 2014, congreso de la SMM, Durango, México

Descripción: es una introducción a la geometría diferencial de curvas con pocas definiciones, muchos ejemplos y resultados bonitos: la envolvente de una familia de curvas, la evoluta e involuta, el teorema de los círculos anidados de Tate-Knesser, las curvas clásicas: braquistócrona, catenaria, tractrix, astroide…

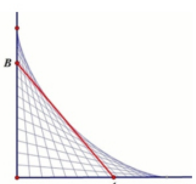
Los pre-requisitos para poder seguir el curso son un curso de cálculo vectorial a nivel licenciatura (cálculo de varias variables) más curiosidad y mente abierta para ideas nuevas.

---

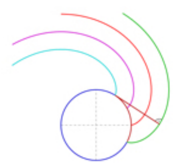
1. Resumen de la primera sesión

1.1. Galería de curvas

Catenaria

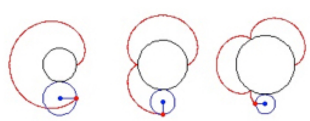


Astroide

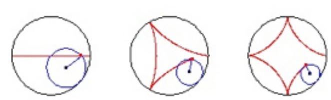


Ivolutas de un círculo

Cicloide



Epi-cicloide



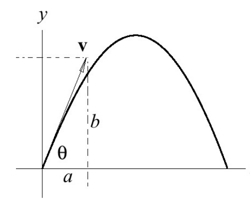
Hipo-cicloide

1.2. La zona segura de los fuegos artificiales

Consideramos la familia de las trayectorias de objetos (cohetes) que se lanzan desde un punto, con velocidad inicial fija, en todas las direcciones posibles.

¿Qué forma tiene la “envolvente” de todas estas trayectorias?

Respuesta: una parábola.



Derivación. Ubicamos el punto de lanzamiento de los objetos en el origen de un plano vertical (el plano xy). Si el vector de velocidad inicial es $\mathbf{v} = (a, b)$, con $v = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = const.$, las trayectorias, parametrizadas por t, están dadas por

$$x = at, \quad y = -\frac{t^2}{2} + bt,$$

(suponiendo que la aceleración de gravedad es 1; esto podemos hacer escogiendo la unidad de tiempo adecuadamente).

Eliminando la t de las dos ecuaciones, y usando $\tan\theta = b/a$, obtenemos

$$y = -\frac{x^2}{2v^2}(1 + \tan^2\theta) + x(\tan\theta).$$

Esta es una parábola P_θ en el plano xy (sus coeficientes dependen del ángulo de lanzamiento θ).

Denotamos por $\mathcal{E}$ la envolvente de la familia de parábolas $\{P_\theta\}$. Aquí está una derivación de una ecuación para $\mathcal{E}$, algo informal (para más detalles pueden consultar por ejemplo el libro de Courant y John, Cálculo vectorial, vol. 2).

Escribimos primero la ecuación de P_θ en la forma

$$F(x, y, \theta) = y + \frac{x^2}{2v^2}(1 + \tan^2\theta) - x(\tan\theta) = 0.$$

Luego, parametrizamos la envolvente $\mathcal{E}$ de algun modo, digamos $x(s), y(s)$. Sea $\theta(s)$ el parámetro de la parábola tangente a $\mathcal{E}$ en el punto $(x(s), y(s))$. Es decir, $F(x(s), y(s), \theta(s)) = 0$. Tomando la derivada de la última ecuación con respecto a s, obtenemos (con la regla de la cadena) $F_x x' + F_y y' + F_\theta \theta' = 0$. Luego, el vector de velocidad $(x'(s), y'(s))$ es *tangente* a $P_{\theta(s)}$ en el punto $(x(s), y(s))$, por lo que es *perpendicular* a la gradiente de la función que define a P_θ en el punto $(x(s), y(s))$; esto es, $F_x x' + F_y y' = 0$. Restando esta ecuación de $F_x x' + F_y y' + F_\theta \theta' = 0$, obtenemos $F_\theta = 0$ (suponemos que $\theta' \neq 0$, o sea que el parámetro θ “varía” a la largo de $\mathcal{E}$; esta es una condición de no degeneración sobre la familia de las curvas).

En resumen, la ecuación para $\mathcal{E}$ se obtiene al eliminar la θ del par de ecuaciones en tres variables

$$F(x, y, \theta) = 0, \quad F_\theta(x, y, \theta) = 0.$$

En nuestro caso, la ecuación $F_\theta = 0$ da $\tan(\theta) = v^2/x$. Sustituyendo en $F = 0$, la ecuación de $\mathcal{E}$ es

$$y = -\frac{x^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2}.$$

Esta es la ecuación de una parábola, con foco en el origen, cuyo “ancho” (en $y = 0$, el *latus rectum*) es $2v^2$ y su “altura” (la distancia focal) es $v^2/2$ (4 veces más ancha que alta); o sea, la “forma” de la envolvente $\mathcal{E}$ es independiente de la v.

Nota. En realidad, el “tiro parabólico” es una aproximación al tiro verdadero, en donde la aceleración de gravedad no es constante, sino varía con la distancia al centro de la tierra (inversamente proporcional al cuadrado de la distancia). Las trayectorias resultan ser entonces *elipses* en lugar de parábolas (para v no muy grande, $v < v_{esc} \approx 11\ m/s$), con uno de sus focos en el centro de la tierra (el otro depende del ángulo θ de lanzamiento). La envolvente de la familia de las trayectorias en este caso resulta ser una elipse (muy grande), con un foco en el centro de la tierra y otro foco en el punto de lanzamiento.

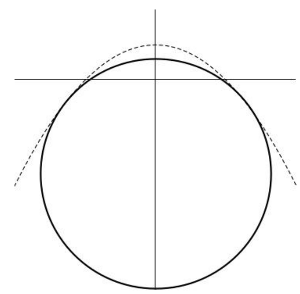
1.3. Una derivación alternativa de la ecuación de $\mathcal{E}$ (sin cálculo!)

Imaginamos lanzando todos los cohetes al mismo tiempo desde el origen $(0,0)$ en todas las direcciones posibles, con la misma velocidad inicial v. Después de un tiempo t, estarán sobre la curva dada por

$$x = at, \quad y = -\frac{t^2}{2} + bt, \quad a^2 + b^2 = v^2.$$

Despejando las a y b de las primeras dos ecuaciones y sustituyendo en la tercera, obtenemos

$$x^2 + \left(y + \frac{t^2}{2}\right)^2 = (vt)^2.$$



Esta es la ecuación de un *círculo*, centrado en $(0, -t^2/2)$ y con radio vt. Así que el centro del círculo está "cayendo" al mismo tiempo que su radio crece. Al principio, cuando $0 \leq t \leq 2v$, tenemos $vt - t^2/2 > 0$, así que una parte del círculo alcanza subir arriba del eje de x. Pero depués, cuando $t > 2v$, el círculo se queda totalmente debajo del eje de x.

Luego, los puntos (x, y) dentro de la envoltura $\mathcal{E}$ están alcanzados *dos* veces por los cohetes, los de afuera (de la "zona segura") nunca se alcanzan, así que los puntos de $\mathcal{E}$ son exactamente los que se alcanzan una sola vez. Es decir, son los puntos (x, y) para los cuales la ecuación $x^2+(y+t^2/2)^2 = (vt)^2$ tiene una sola solución $t \geq 0$. Luego, esta es una ecuación cuadrática en t^2, cuya descriminante es $v^4 + 2v^2y - x^2$. Esto se anula justo cuando $y = (v^2 - x^2/v^2)/2$. $\square$

Ejercicio. Deriva la ecuación de la envoltura de la familia de los segmentos de lineas rectas de longitud 1 que conectan un punto del eje de x con un punto del eje de y. (Repsuesta: el astroide $x^{3/2}+y^{3/2} = 1$. En la "galería de curvas" arriba se muestra la parte de esta curva en el cuadrante positivo).

2. Resumen de la segunda y tercera sesión

2.1. El círculo osculante

Tomamos una curva C en el plano. Por ejemplo, la curva puede ser la gráfica de una función $y = f(x)$. La recta tangente a la curva en un punto $c \in C$ es la recta que es "la mejor aproximación" a C alrededor de c.

Una manera de hacer precisa la noción de "la mejor aproximación" es usar series de Taylor. Consideramos dos curvas $C, \widetilde{C}$, dadas como las gráficas de dos funciones $y = f(x)$, $y = \tilde{f}(x)$ (resp.). Decimos que $c = (x_0, y_0) \in C \cap \widetilde{C}$ es un *punto de contacto de orden* k si los primeros $k+1$ términos de las series de Taylor de f y $\tilde{f}$ alrededor de $x = x_0$ coinciden:

$$f(x_0) = \tilde{f}(x_0),\ f'(x_0) = \tilde{f}'(x_0),\ \ldots,\ f^{(k)}(x_0) = \tilde{f}^{(k)}(x_0).$$

Por ejemplo, si la serie de Taylor de f alrededor de x_0 es

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots,$$

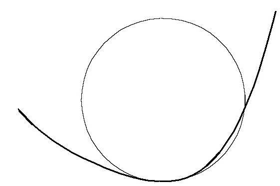
y L es una recta dada por $\tilde{f}(x) = ax + b$, entonces podemos pedirle a L que tenga contacto con C en c de orden 1, y este requisito determina la L, poniendo $b = y_0$, $a = f'(x_0)$. La L en este caso se llama la *recta tangente* a C en c.

Si C es la parábola dada por $y = x^2$, entonces su recta tangente en el origen $(0,0)$ es el eje de x $(y = 0)$ y la recta tangente en $c = (1,1)$ está dada por $y = 1 + 2(x - 1) = 2x + 1$.

A veces sucede que la recta tangente a C en un punto c tiene un contacto con C mayor al esperado, o sea 2. En este caso decimos que c es un *punto de inflexión* de la C. Si C es la gráfica de una función $y = f(x)$ y $c = (x_0, y_0)$ esto sucede cuando $f''(x_0) = 0$. Por ejemplo, para la curva C dada por $y = x^3$, el origen $(0,0)$ es su único punto de inflexión.

Ejercicio. Demuestra que la noción de "punto de conacto de orden k" es invariante bajo cambio de coordenadas. Es decir, c es un punto de contaco de orden k de $C, \widetilde{C}$ si y solo si $\Phi(c)$ es un punto de contacto de orden k de $\Phi(C), \Phi(\widetilde{C})$, donde $(x,y) \mapsto (X,Y) = \Phi(x,y)$ es un cambio de coordenadas en el plano $(\det(D\Phi) \neq 0)$.

Definición/proposición. Si $c \in C$ no es un punto de inflexión, existe un único círculo con contacto de orden 2 con C en c, llamado el *círculo osculante* de C en c. El radio R del círculo osculante en c se llama el *radio de curvatura* en c, y su centro se llama el *centro de curvatura.* El recíproco $\kappa = 1/R$ se llama la *curvatura* de C en c (definimos $\kappa = 0$ en un punto de inflexión). El lugar geométrico de todos los centros de curvatura de C se llama la *evoluta* de C.



Nota que el círculo osculante en c es tangente a la curva.

Por ejemplo, el círculo osculante de la parábola $y = x^2$ en $c = (0,0)$ es tangente al eje de x en $(0,0)$ así que está dado por una ecuación tipo

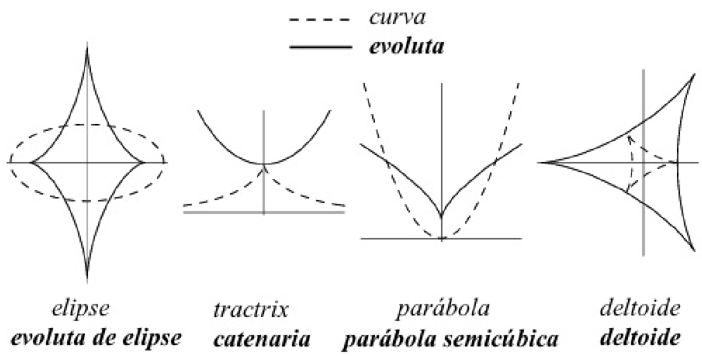
$$x^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

Para determinar la R, tomamos dos veces la derivada (implícita) con respecto a x de la última ecuación, obteniendo $2x + 2(y - R)y' = 0$ y luego $2 + 2(y')^2 + 2(y - R)y'' = 0$. Sustituyendo $x = 0$ y usando $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 2$, obtenemos $R = 1/2$, o sea $\kappa = 2$.

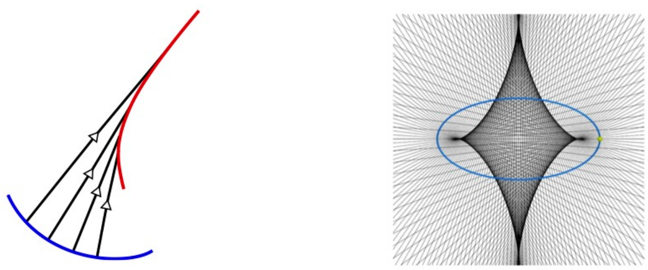
Nota que este círculo osculante tiene contacto de orden 3 con la parábola. Tal punto de una curva se llama un *vértice* y ocurre en un punto que es un punto crítico de la curvatura, $k' = 0$ (en nuestro caso de la parábola es un punto máximo de la curvatura). El teorema de los 4 vértices afirma que *toda curva simple cerrada en el plano tiene por lo menos 4 vértices.* Por ejemplo, una elipse (no circular) tiene exactamente 4 vértices.

Ejercicio. Si C es la gráfica de $y = f(x)$ y $f'(x_0) = 0$ entonces $\kappa = 1/R = f''(x_0)$. Más general, $\kappa = f''(x_0)/(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}$.

Ejercicio. Encuentra una fórmula para el radio y el centro del círculo osculante de la parábola $y = x^2$ en el punto (t, t^2). Eliminando t de las fórmulas para el centro del cículo osculante, encuentra una ecuación para la evoluta de la parábola. Dibuja los círculos osculantes en $(0,0)$, $(1,1)$. Verifica que el primero está contenido es el segundo (caso especial del Teorema de Tait-Knesser).



Proposición (ejercicio). La evoluta de una curva es la envolvente de la familia de las rectas normales (perpendiculares) de la curva.



Izquierda: la curva roja es la evoluta de la azul y la curva azul es la involuta de la curva roja; las rectas normales de la curva azul son las rectas tangenes de la roja. Derecha: la evoluta de una elipse (azul) como la envolvente de sus rectas normales. (*Fuente: Ghys, Tabachnikov, Timorin, "Osculating curves: around the Tait-Kneser Theorem", http://arxiv.org/pdf/1207.5662.pdf*)

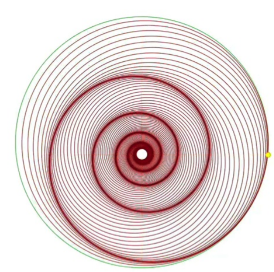
Ejercicio. Usando la última proposición, vuelva a determinar la ecuación de la evoluta de la parábola. También encuentra la ecuación de la evoluta de la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Teorema (Tait-Knesser, approx 1900). Los círculos osculantes a lo largo de una curva sin vértices no se intersectan. Es decir, sea C una curva parametrizada por t con radio de curvatura creciente, $R'(t) > 0$; si $t_1 < t_2$ entonces el círculo osculante $\widetilde{C}_{t_1}$ está *contenido* en el círculo osculante en $\widetilde{C}_{t_2}$.

En la referencia citada en la figura anterior se encuentra una demostración elemental.

Corolario. Si $R' > 0$, los círculos osculantes $\widetilde{C}_t$, $t_1 \leq t \leq t_2$, forman una "foliación" del área entre los dos círculos (un anillo), tal que la curva atraviesa el anillo desde el perímetro interior al exterior, siendo tangente en todo punto a las "hojas de la folicación" (los círculos osculantes), pero sin embargo no es ninguna de ellas!

La explicación a esta "paradoja" es que la foliación del anillo por los círculos osculantes *no es diferenciable* a lo largo de la curva. Dicho de otra forma, la función R, definida en el anillo, no es diferenciable a lo largo de la curva (más preciso, su derivada parcial en la dirección perpendicular a la curva no existe).



3. Cuarta sesión - curvas óptimas

Veremos dos ejemplos de curvas "óptimas".

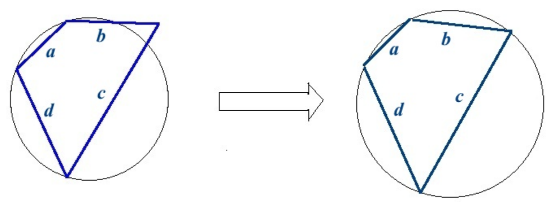
3.1. La desigualdad isoperimétrica

Teorema. Entre todas las curvas cerradas y simples con la misma longitud, el círculo (y solo el círculo) tiene el mayor área.

Dicho de otro modo, si L es el la longitud de una curva cerrada y simple y A es el área a su interior, entonces $A \leq L^2/4\pi$, con igualdad si solo si C es un círculo.

Hay muchas demostraciones de esta famosa desigualdad. Ninguna es obvia. Aquí damos una de las más elementales, usando la noción de "cuadrángulo cocíclico" (un cuadrángulo cuyos vértices son 4 puntos de un círculo).

Lemma (ejercicio). Sea C un cuadrángulo. Si C no es cocíclico existe un cuadrángulo cocíclico con los mismos tamaños de lados que de C, con área mayor que C (usa multiplicadores de Lagrange).

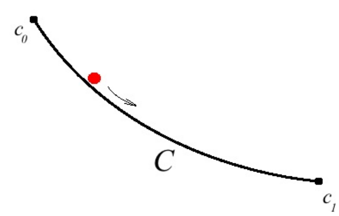


Demostración de la desigualdad isoperimétrica. Si C no es un círculo, existen 4 puntos sobre C que no son cocíclicos. Entonces podemos "cortar" el interior de C en 5 piezas, y "rearmarlas" formando una curva con área mayor y con el mismo perímetro. □

Ejercicio. Encuentra una falla lógica en el párafo anterior.

Sugerencia. El mismo tipo de argumento demuestra que 2014 es el número más grande que hay: si $x \neq 2014$ entonces $x + 1 > x$, por lo que x no puede ser el número más grande que hay. El único que queda es 2014...

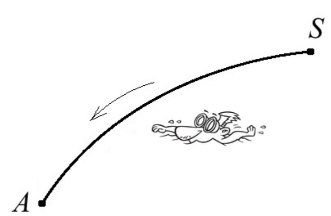
3.2. La braquistócrona



La fomulación clásica del problema de la braquistócrona (siglo 17) es la siguiente: dados dos puntos $c_0 = (x_0, y_0)$, $c_1 = (x_1, y_1)$, con $y_0 > y_1$, encontrar un segmento de curva C que conecta los dos puntos dados y que minimice el tiempo total de "caer" a lo largo de la curva; esto es, imaginamos dejando cear a un objeto ubicado en c_0, empezando con velocidad inicial $v_0 = 0$ en $t = 0$, resbalando a lo largo de C bajo la influencia de una accelación vertical constante, digamos 1.

Usando conservación de energía, en cualquier momento la velocidad v y la altura y del objeto satisfacen $y_0 = y + v^2/2$ (tomamos la acelacción de la gravedad =1). Denotamos por s a la distancia recorrida por el objeto a la largo de C en tiempo t. Tenemos que $v = \frac{ds}{dt}$, así que el tiempo total de transicion es $T = \int dt = \int ds/v = \int_0^L ds/\sqrt{2(y_0 - y)}$, donde L es la longitud de C.

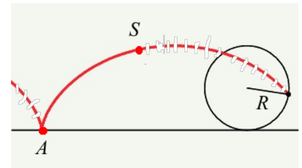
Una ligera reformulación: imaginamos un salvavidas ubicado en $S = (x_1, y_1)$ que quiere llegar a una persona ahogada ubicada en $A = (x_0, y_0)$. La velocidad del salvavidas a lo largo de su trayectoria varía dependiendo de su distancia vertical al ahogado, según la fórmula $v = \sqrt{2|y - y_0|}$ (mientras más se acerca se vuelve más difícil seguir avanzando). ¿Qué ruta debe escoger el salvavidas para llegar lo pronto posible al ahogado?



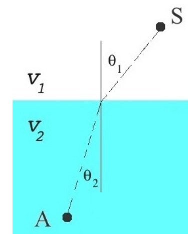
Teorema de la braquistócrona. *Sea C_R la curva dada por las ecuaciones paramétricas*

$$x = R\theta - R\operatorname{sen}(\theta), \quad y = R - R\cos(\theta)$$

("la cicloide de radio R"). Sea $A = (0,0)$, y $S = (x_1, y_1) \in C_R$, $0 \le x_1 \le 2\pi R$. Entonces el segmento de C_R que conecta S con A es la "ruta de salvavida más rápido" de S a A.



Lema (la ley de Snell). Imaginamos un salvavidas S en la playa identificando un ahogado A en el mar. Suponiendo que el salvavidas corre con velocidad v_1 en la playa y nada con velocidad $v_2 < v_1$ en el mar, ¿qué ruta debería escoger S para llegar lo más rápido posible a A?



Respuesta (ejercicio): $\operatorname{sen}(\theta_1)/v_1 = \operatorname{sen}(\theta_2)/v_2$. (Usar multiplicadores de Lagrange).

Demostración del teorema de la braquistócrona (idea de Johann Bernoulli, 1696). Imaginamos un salvavida en $S = (x_1, y_1)$ que quiere llegar al ahogado en $A = (0,0)$, a lo largo de una curva C donde su velocidad en un punto $(x,y) \in C$ está dada por $v = \sqrt{2y}$. Denotamos por θ el ángulo entre el vertical y la C. Entonces segun la ley de Snell $\operatorname{sen}(\theta)/v = const.$, así que $y = c\operatorname{sen}^2\theta$ para alguna constante $c > 0$. Luego, el ángulo θ con el vertical satisface $\tan(\theta) = 1/y' \Longrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1/(1+y'^2) \Longrightarrow y(1+y'^2) = c$. Ahora se puede checar que esta ecuación diferencial la satisface una cicloide de radio $R = c$. $\square$

Nota. Si la velocidad del salvavidas es *lineal* en y entonces su trayectoria es el arco del círculo que pasa por S y A y perpendicular al eje de x. Estas son las geodésicas del plano hiperbólico (en el modelo de Poincaré del semi-plano superior).

3.3. El teorema de los 4 vértices

El teorema de los 4 vértices, como fue mencionado antes, afirma que toda curva cerrada simple en el plano tiene por lo menos 4 vértices (puntos críticos de la curvatura, donde $\kappa' = 0$). Aquí lo demostramos solamente para una curva *convexa* (cada segemento conectando dos puntos de la curva queda em dentro de la curva).

Demostración. Una curva cerrada C es compacta, así que κ tiene por lo menos dos punto cr'ticos, $c_{min}, c_{max} \in C$. Demostramos que en algunos de los dos arcos de C que conectan c_{min} con c_{max} ocurre un mínimo local, por lo que ocurre tambien un máximo local. Si esto no es cierto, entonces κ es una función *monótona* a lo largo de cada uno de estos dos arcos (creciente o decreciente, dependiendo del sentido de la parametrización de la curva). Ubicamos ahora la curva en el plano de coordenadas xy tal que c_{min} y c_{max} esten sobre el eje de x y parametrizamos la curva por longitud de arco s, $0 \le s \le L$. Entonces tenemos $\kappa' \ge 0$ para $y \ge 0$ y $\kappa' \le 0$ para $y \le 0$. Así que $\kappa' y \ge 0$ a lo largo de la curva. Ahora integramos $\kappa' y$ alrededor de la curva y obtenemos

$$0 \le \int_0^L \kappa' y = \kappa y\Big|_0^L - \int_0^L \kappa y'.$$

Luego $\kappa y\Big|_0^L = 0$ (por ser curva cerrada) y $\kappa y' = x''$, por las ecuaciones de Frenet-Serret. Así que

$$0 \le \int_0^L \kappa' y = -\int_0^L x'' = -x'\Big|_0^L = 0.$$

Concluimos que $\kappa' y = 0$ identicamente, por lo que $\kappa' = 0$, ya que y se anula solo en c_{min} y c_{max}. $\square$