CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Dualidad Schur-Weyl

Rocío-Juan-Edgar

Representaciones de Grupos de Lie

4 de junio de 2020

Teorema (Dualidad Schur-Weyl)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y n un entero positivo. Como representación de $S_n \times GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ tenemos la descomposición

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \otimes \mathbb{S}_\lambda V$$

donde V_λ es una representación irreducible de S_n y $\mathbb{S}_\lambda V$ es una representación irreducible de $GL(V)$.

Diccionario entre grupos y su correspondiente álgebra.

G-representación	$\mathbb{C}[G]$-módulo
Subrepresentación	Submódulo
Representación irreducible	Módulo simple
G-homomorfismo	$\mathbb{C}[G]$-homomorfismo

En general, si A es un álgebra asociativa y $\rho\colon A \to End(V)$ es una representación, la función

$$\begin{aligned} \cdot\colon A \times V &\to V \\ (a, v) &\mapsto \rho(a)(v) \end{aligned}$$

hace que V sea un A-módulo.

Teorema (Doble Centralizador)

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, A un álgebra semi-simple de $End(V)$ y $B = End_A(V)$. Entonces

Teorema (Doble Centralizador)

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, A un álgebra semi-simple de $End(V)$ y $B = End_A(V)$. Entonces

i. *B es semi-simple.*

ii. *$A = End_B(V)$.*

iii. *Como módulo de $A \otimes B$, tenemos la descomposición*

$$V \simeq \bigoplus_i U_i \otimes W_i$$

donde U_i es módulo simple de A y $W_i = Hom_A(U_i, V)$ es módulo simple B.

Demostración.

- **Claim 1:** $V \simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i$, U_i $A-$módulo simple.
- **Claim 2:** $W_i := Hom_A(U_i, V)$ es B-módulo simple.
- **Claim 3:** $U_i \simeq Hom_B(W_i, V)$.
- **Claim 4:** $Hom(W_i, Hom_A(U_i, V)) \simeq Hom_A(U_i \otimes W_i, V)$.

$\square$

Demostración.

- **Claim 3:** $U_i \simeq Hom_B(W_i, V)$. Considerar el morfismo evaluación:

$$ev\colon U_i \to Hom_B(W_i, V)$$

$$u \mapsto (ev_u\colon W_i \to V)$$

$$f \mapsto f(u)$$

$\square$

Demostración.

- **Claim 4:** $Hom(W_i, Hom_A(U_i, V)) \simeq Hom_A(U_i \otimes W_i, V)$.
  Considerar el morfismo:

$$\varphi\colon Hom(W_i, Hom_A(U_i, V)) \to Hom_A(U_i \otimes W_i, V)$$

$$f \mapsto (u \otimes w \mapsto f(w)u)$$

$\square$

Demostración.

- **Claim 1:** $V \simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i$, U_i $A-$módulo simple.

$\square$

Demostración.

- **Claim 1:** $V \simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i$, U_i $A-$módulo simple.

Como A es semi-simple se tiene que

$$V \simeq \bigoplus_j X_j.$$

□

Demostración.

- **Claim 1:** $V \simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i$, U_i $A-$módulo simple.

Como A es semi-simple se tiene que

$$V \simeq \bigoplus_j X_j.$$

Entonces,

$\square$

Demostración.

- **Claim 1:** $V \simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i$, U_i $A-$módulo simple.

Como A es semi-simple se tiene que

$$V \simeq \bigoplus_j X_j.$$

Entonces,

$$\bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i \simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, \bigoplus_j X_j) \otimes U_i$$

□

Demostración.

- **Claim 1:** $V \simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i$, U_i $A-$módulo simple.

Como A es semi-simple se tiene que

$$V \simeq \bigoplus_j X_j.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i &\simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, \bigoplus_j X_j) \otimes U_i \\ &\simeq \bigoplus_i \bigoplus_j Hom_A(U_i, X_j) \otimes U_i\end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

- **Claim 1:** $V \simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i$, U_i $A-$módulo simple.

Como A es semi-simple se tiene que

$$V \simeq \bigoplus_j X_j.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\bigoplus_i Hom_A(U_i, V) \otimes U_i &\simeq \bigoplus_i Hom_A(U_i, \bigoplus_j X_j) \otimes U_i \\
&\simeq \bigoplus_i \bigoplus_j Hom_A(U_i, X_j) \otimes U_i \\
&\simeq \bigoplus_j X_j \qquad \text{(Lema de Schur)}
\end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

- **Claim 2:** $W_i := Hom_A(U_i, V)$ es B-módulo simple. (B actúa transitivamente en los elementos no cero)

$\square$

Demostración.

- **Claim 2:** $W_i := Hom_A(U_i, V)$ es B-módulo simple. (B actúa transitivamente en los elementos no cero)

Sean $u \in U_i$ un elemento no nulo y $f, f' \in Hom_A(U_i, V)$, como Au es un submódulo no nulo y U_i es simple, tanto f como f' están determinados por su valor en u, digamos $f(u) = v$ y $f'(u) = v'$, con $v, v' \in V$.

□

Demostración.

- **Claim 2:** $W_i := Hom_A(U_i, V)$ es B-módulo simple. (B actúa transitivamente en los elementos no cero)

Sean $u \in U_i$ un elemento no nulo y $f, f' \in Hom_A(U_i, V)$, como Au es un submódulo no nulo y U_i es simple, tanto f como f' están determinados por su valor en u, digamos $f(u) = v$ y $f'(u) = v'$, con $v, v' \in V$. Dado que Av es invariante, podemos escribir

$$V = Av \oplus W.$$

□

Demostración.

- **Claim 2:** $W_i := Hom_A(U_i, V)$ es B-módulo simple. (B actúa transitivamente en los elementos no cero)

Sean $u \in U_i$ un elemento no nulo y $f, f' \in Hom_A(U_i, V)$, como Au es un submódulo no nulo y U_i es simple, tanto f como f' están determinados por su valor en u, digamos $f(u) = v$ y $f'(u) = v'$, con $v, v' \in V$. Dado que Av es invariante, podemos escribir

$$V = Av \oplus W.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \theta \colon V &\to V \\ \theta(w) &= w \text{ si } w \in W \\ \theta(av) &= av' \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

□

Demostración.

- **Claim 2:** $W_i := Hom_A(U_i, V)$ es B-módulo simple. (B actúa transitivamente en los elementos no cero)

Sean $u \in U_i$ un elemento no nulo y $f, f' \in Hom_A(U_i, V)$, como Au es un submódulo no nulo y U_i es simple, tanto f como f' están determinados por su valor en u, digamos $f(u) = v$ y $f'(u) = v'$, con $v, v' \in V$. Dado que Av es invariante, podemos escribir

$$V = Av \oplus W.$$

Definimos

$$\begin{aligned} \theta &: V \to V \\ \theta(w) &= w \text{ si } w \in W \\ \theta(av) &= av' \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

Entonces, $\theta \in B$ y $\theta f = f'$. □

Demostración.

i. B es semi-simple.

$\square$

Demostración.

i. B es semi-simple.

$$B = End_A(V)$$

$\square$

Demostración.

i. B es semi-simple.

$$\begin{aligned} B &= End_A(V) \\ &= Hom_A(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) \qquad \text{(C1)} \end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

i. B es semi-simple.

$$\begin{aligned} B &= End_A(V) \\ &= Hom_A(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) \qquad \text{(C1)} \\ &= \bigoplus_i Hom_A(U_i \otimes W_i, V) \end{aligned}$$

□

Demostración.

i. B es semi-simple.

$$\begin{aligned} B &= End_A(V) \\ &= Hom_A(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) && \text{(C1)} \\ &= \bigoplus_i Hom_A(U_i \otimes W_i, V) \\ &= \bigoplus_i Hom(W_i, Hom_A(U_i, V)) && \text{(C4)} \end{aligned}$$

□

Demostración.

i. B es semi-simple.

$$\begin{aligned}
B &= End_A(V) \\
&= Hom_A(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) && \text{(C1)} \\
&= \bigoplus_i Hom_A(U_i \otimes W_i, V) \\
&= \bigoplus_i Hom(W_i, Hom_A(U_i, V)) && \text{(C4)} \\
&= \bigoplus_i Hom(W_i, W_i)
\end{aligned}$$

□

Demostración.

i. B es semi-simple.

$$\begin{aligned} B &= End_A(V) \\ &= Hom_A(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) && \text{(C1)} \\ &= \bigoplus_i Hom_A(U_i \otimes W_i, V) \\ &= \bigoplus_i Hom(W_i, Hom_A(U_i, V)) && \text{(C4)} \\ &= \bigoplus_i Hom(W_i, W_i) \\ &= \bigoplus_i End(W_i). \end{aligned}$$

□

Demostración.

i. B es semi-simple.

$$\begin{aligned}
B &= End_A(V) \\
&= Hom_A(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) && \text{(C1)} \\
&= \bigoplus_i Hom_A(U_i \otimes W_i, V) \\
&= \bigoplus_i Hom(W_i, Hom_A(U_i, V)) && \text{(C4)} \\
&= \bigoplus_i Hom(W_i, W_i) \\
&= \bigoplus_i End(W_i).
\end{aligned}$$

Como W_i es simple $(C2)$, se tiene que B es semi-simple. □

Demostración.

ii. $A = End_B(V)$.

$\square$

Demostración.

ii. $A = End_B(V)$.

$$End_B(V) = Hom_B(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) \tag{C1}$$

$\square$

Demostración.

ii. $A = End_B(V)$.

$$\begin{aligned} End_B(V) &= Hom_B\Big(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V\Big) \qquad \text{(C1)} \\ &= \bigoplus_i Hom_B(U_i \otimes W_i, V) \end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

ii. $A = End_B(V)$.

$$\begin{aligned} End_B(V) &= Hom_B(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) && \text{(C1)} \\ &= \bigoplus_i Hom_B(U_i \otimes W_i, V) \\ &= \bigoplus_i Hom(U_i, Hom_B(W_i, V)) && \text{(C4)} \end{aligned}$$

□

Demostración.

ii. $A = End_B(V)$.

$$\begin{aligned}
End_B(V) &= Hom_B(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) && \text{(C1)}\\
&= \bigoplus_i Hom_B(U_i \otimes W_i, V) &&\\
&= \bigoplus_i Hom(U_i, Hom_B(W_i, V)) && \text{(C4)}\\
&= \bigoplus_i Hom(U_i, U_i) && \text{(C3)}
\end{aligned}$$

$\square$

Demostración.

ii. $A = End_B(V)$.

$$
\begin{aligned}
End_B(V) &= Hom_B(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) && \text{(C1)}\\
&= \bigoplus_i Hom_B(U_i \otimes W_i, V)\\
&= \bigoplus_i Hom(U_i, Hom_B(W_i, V)) && \text{(C4)}\\
&= \bigoplus_i Hom(U_i, U_i) && \text{(C3)}\\
&= \bigoplus_i End(U_i)
\end{aligned}
$$

□

Demostración.

ii. $A = End_B(V)$.

$$\begin{aligned}
End_B(V) &= Hom_B(\bigoplus_i U_i \otimes W_i, V) && \text{(C1)} \\
&= \bigoplus_i Hom_B(U_i \otimes W_i, V) \\
&= \bigoplus_i Hom(U_i, Hom_B(W_i, V)) && \text{(C4)} \\
&= \bigoplus_i Hom(U_i, U_i) && \text{(C3)} \\
&= \bigoplus_i End(U_i) \\
&= A.
\end{aligned}$$

$\square$

Sigue Juan

Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ el espacio $V^{\otimes n}$ tiene una estructura de S_n-modulo y $GL(V)-$modulo mediante las acciones

$$\begin{aligned} S_n \times V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes n} \\ (\sigma, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &\longmapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GL(V) \times V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes n} \\ (g, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &\longmapsto g(v_1) \otimes \cdots \otimes g(v_n) \end{aligned}$$

Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ el espacio $V^{\otimes n}$ tiene una estructura de S_n-modulo y $GL(V)-$modulo mediante las acciones

$$\begin{aligned} S_n \times V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes n} \\ (\sigma, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &\longmapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GL(V) \times V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes n} \\ (g, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &\longmapsto g(v_1) \otimes \cdots \otimes g(v_n) \end{aligned}$$

Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ el espacio $V^{\otimes n}$ tiene una estructura de S_n-modulo y $GL(V)-$modulo mediante las acciones

$$\begin{aligned} S_n \times V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes n} \\ (\sigma, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &\longmapsto v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GL(V) \times V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes n} \\ (g, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &\longmapsto g(v_1) \otimes \cdots \otimes g(v_n) \end{aligned}$$

- Estas dos acciones conmutan.
- ¿Qué relación guardan las imagenes de los morfismos (de la representación) $S_n \to End(V^{\otimes n})$ y $GL(V) \to End(V^{\otimes n})$ en $End(V^{\otimes})$?.
- Vamos a ver que la subálgebra generada por estas en $End(V^{\otimes n})$ son centralizadores uno del otro.
- Veremos la descomposición de $V^{\otimes n}$ como representación de $S_n \times GL(V)$ (Dualidad de Schur-Weyl).

- Estas dos acciones conmutan.
- ¿Qué relación guardan las imagenes de los morfismos (de la representación) $S_n \to End(V^{\otimes n})$ y $GL(V) \to End(V^{\otimes n})$ en $End(V^{\otimes})$?.
- Vamos a ver que la subálgebra generada por estas en $End(V^{\otimes n})$ son centralizadores uno del otro.
- Veremos la descomposición de $V^{\otimes n}$ como representación de $S_n \times GL(V)$ (Dualidad de Schur-Weyl).

- Estas dos acciones conmutan.
- ¿Qué relación guardan las imagenes de los morfismos (de la representación) $S_n \to End(V^{\otimes n})$ y $GL(V) \to End(V^{\otimes n})$ en $End(V^{\otimes})$?.
- Vamos a ver que la subálgebra generada por estas en $End(V^{\otimes n})$ son centralizadores uno del otro.
- Veremos la descomposición de $V^{\otimes n}$ como representación de $S_n \times GL(V)$ (Dualidad de Schur-Weyl).

- Estas dos acciones conmutan.
- ¿Qué relación guardan las imagenes de los morfismos (de la representación) $S_n \to End(V^{\otimes n})$ y $GL(V) \to End(V^{\otimes n})$ en $End(V^{\otimes})$?.
- Vamos a ver que la subálgebra generada por estas en $End(V^{\otimes n})$ son centralizadores uno del otro.
- Veremos la descomposición de $V^{\otimes n}$ como representación de $S_n \times GL(V)$ (Dualidad de Schur-Weyl).

- Estas dos acciones conmutan.
- ¿Qué relación guardan las imagenes de los morfismos (de la representación) $S_n \to End(V^{\otimes n})$ y $GL(V) \to End(V^{\otimes n})$ en $End(V^{\otimes})$?.
- Vamos a ver que la subálgebra generada por estas en $End(V^{\otimes n})$ son centralizadores uno del otro.
- Veremos la descomposición de $V^{\otimes n}$ como representación de $S_n \times GL(V)$ (Dualidad de Schur-Weyl).

Primero notemos los siguientes isomorfismos

$$
\begin{aligned}
B =& End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) \\
=& End(V^{\otimes n})^{S_n} \\
\cong& (End(V)^{\otimes n})^{S_n} \text{ por } End(V^{\otimes n}) \cong End(V)^{\otimes n} \\
\cong& Sym^n(End(V))
\end{aligned}
$$

Vamos a ver que $Sym^n(End(V)) = span\{X^{\otimes n} \mid X \in End(V)\}$

Primero notemos los siguientes isomorfismos

$$
\begin{aligned}
B =& End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) \\
=& End(V^{\otimes n})^{S_n} \\
\cong& (End(V)^{\otimes n})^{S_n} \text{ por } End(V^{\otimes n}) \cong End(V)^{\otimes n} \\
\cong& Sym^n(End(V))
\end{aligned}
$$

Vamos a ver que $Sym^n(End(V)) = span\{X^{\otimes n} \mid X \in End(V)\}$

Primero notemos los siguientes isomorfismos

$$
\begin{aligned}
B =& End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) \\
=& End(V^{\otimes n})^{S_n} \\
\cong& (End(V)^{\otimes n})^{S_n} \text{ por } End(V^{\otimes n}) \cong End(V)^{\otimes n} \\
\cong& Sym^n(End(V))
\end{aligned}
$$

Vamos a ver que $Sym^n(End(V)) = span\{X^{\otimes n} \mid X \in End(V)\}$

Primero notemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} B =& End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) \\ =& End(V^{\otimes n})^{S_n} \\ \cong& (End(V)^{\otimes n})^{S_n} \text{ por } End(V^{\otimes n}) \cong End(V)^{\otimes n} \\ \cong& Sym^n(End(V)) \end{aligned}$$

Vamos a ver que $Sym^n(End(V)) = span\{X^{\otimes n} \mid X \in End(V)\}$

Primero notemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} B =& End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) \\ =& End(V^{\otimes n})^{S_n} \\ \cong& (End(V)^{\otimes n})^{S_n} \text{ por } End(V^{\otimes n}) \cong End(V)^{\otimes n} \\ \cong& Sym^n(End(V)) \end{aligned}$$

Vamos a ver que $Sym^n(End(V)) = span\{X^{\otimes n} \mid X \in End(V)\}$

Primero notemos los siguientes isomorfismos

$$\begin{aligned} B =& End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) \\ =& End(V^{\otimes n})^{S_n} \\ \cong& (End(V)^{\otimes n})^{S_n} \text{ por } End(V^{\otimes n}) \cong End(V)^{\otimes n} \\ \cong& Sym^n(End(V)) \end{aligned}$$

Vamos a ver que $Sym^n(End(V)) = span\{X^{\otimes n} \mid X \in End(V)\}$

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. □

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. $\square$

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. $\square$

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. □

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. □

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \dots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\dots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\dots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\dots,m_d}) = a_{m_1,\dots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\dots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\dots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. □

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. □

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. □

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. □

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. $\square$

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. □

Lema

Dado un espacio vectorial V de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. El espacio de tensores simétricos $Sym^n(V) \subset V^{\otimes n}$ es linealmente generado por las n-ésimas potencias simétricas $v^{\otimes n} = v \otimes \cdots \otimes v$.

Demostración.

Basta mostrar que $Ann(span\{v^{\otimes n} \mid v \in V\}) = \{0\}$.
Sea $\{e_1, \ldots, e_d\}$ una base de V, una base de $Sym^n(V)$ será $\{e_{m_1,\ldots,m_d} = e_1^{\otimes m_1} \odot e_2^{\otimes m_2} \odot \cdots \odot e_d^{\otimes m_d}$ tal que $m_1 + \cdots + m_d = n\}$.
Sea $\varphi \in (Sym^n(V))^*$ y $v \in V$ no cero, $v = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ con $x_i \in \mathbb{C}$.
Para $e_{m_1,\ldots,m_d}$ escribimos $\varphi(e_{m_1,\ldots,m_d}) = a_{m_1,\ldots,m_d} \in \mathbb{C}$.
Entonces extendiendo por linealidad en $v^{\otimes n}$ se tiene

$$\varphi(v^{\otimes n}) = \sum_{m_1+\cdots+m_d=n} a_{m_1,\ldots,m_d} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}.$$

Tenemos un polinomio homogéneo sobre $\mathbb{C}$. Entonces $\varphi(v^{\otimes n}) = 0$ si y solo si todos los coeficientes $a_{m_1,\ldots,m_d}$ son cero, si y solo si $\varphi = 0$. $\square$

Sigue Rocío

Como las acciones de S_n y $GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ conmutan entre si entonces el espacio B' generado por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ satisface que $B' \subset End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) = B$.

- La imagen de $g \in GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $g^{\otimes n}$.
- Para la otra inclusión basta probar que los espacios generados por $\{g^{\otimes n} : g \in GL(V)\}$ y $\{X^{\otimes n} : X \in End(V)\}$ son iguales.

Dado $X \in End(V)$ veremos que X está en el espacio generado por $\{g : g \in GL(V)\}$. El polinomio característico $\det(X + tI)$ tiene finitas soluciones entonces existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $X + tI$ es invertible, por lo que

$$X = (X + tI) - tI \in span\{g : g \in GL(V)\}.$$

Como las acciones de S_n y $GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ conmutan entre si entonces el espacio B' generado por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ satisface que $B' \subset End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) = B$.

- La imagen de $g \in GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $g^{\otimes n}$.
- Para la otra inclusión basta probar que los espacios generados por $\{g^{\otimes n} : g \in GL(V)\}$ y $\{X^{\otimes n} : X \in End(V)\}$ son iguales.

Dado $X \in End(V)$ veremos que X está en el espacio generado por $\{g : g \in GL(V)\}$. El polinomio característico $\det(X + tI)$ tiene finitas soluciones entonces existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $X + tI$ es invertible, por lo que

$$X = (X + tI) - tI \in span\{g : g \in GL(V)\}.$$

Como las acciones de S_n y $GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ conmutan entre si entonces el espacio B' generado por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ satisface que $B' \subset End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) = B$.

- La imagen de $g \in GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $g^{\otimes n}$.
- Para la otra inclusión basta probar que los espacios generados por $\{g^{\otimes n} : g \in GL(V)\}$ y $\{X^{\otimes n} : X \in End(V)\}$ son iguales.

Dado $X \in End(V)$ veremos que X está en el espacio generado por $\{g : g \in GL(V)\}$. El polinomio característico $\det(X + tI)$ tiene finitas soluciones entonces existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $X + tI$ es invertible, por lo que

$$X = (X + tI) - tI \in span\{g : g \in GL(V)\}.$$

Como las acciones de S_n y $GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ conmutan entre si entonces el espacio B' generado por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ satisface que $B' \subset End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) = B$.

- La imagen de $g \in GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $g^{\otimes n}$.
- Para la otra inclusión basta probar que los espacios generados por $\{g^{\otimes n} : g \in GL(V)\}$ y $\{X^{\otimes n} : X \in End(V)\}$ son iguales.

Dado $X \in End(V)$ veremos que X está en el espacio generado por $\{g : g \in GL(V)\}$. El polinomio característico $\det(X + tI)$ tiene finitas soluciones entonces existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $X + tI$ es invertible, por lo que

$$X = (X + tI) - tI \in span\{g : g \in GL(V)\}.$$

Como las acciones de S_n y $GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ conmutan entre si entonces el espacio B' generado por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ satisface que $B' \subset End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) = B$.

- La imagen de $g \in GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $g^{\otimes n}$.
- Para la otra inclusión basta probar que los espacios generados por $\{g^{\otimes n} : g \in GL(V)\}$ y $\{X^{\otimes n} : X \in End(V)\}$ son iguales.

Dado $X \in End(V)$ veremos que X está en el espacio generado por $\{g : g \in GL(V)\}$. El polinomio característico $\det(X + tI)$ tiene finitas soluciones entonces existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $X + tI$ es invertible, por lo que

$$X = (X + tI) - tI \in span\{g : g \in GL(V)\}.$$

Como las acciones de S_n y $GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ conmutan entre si entonces el espacio B' generado por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ satisface que $B' \subset End_{\mathbb{C}[S_n]}(V^{\otimes n}) = B$.

- La imagen de $g \in GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $g^{\otimes n}$.
- Para la otra inclusión basta probar que los espacios generados por $\{g^{\otimes n} : g \in GL(V)\}$ y $\{X^{\otimes n} : X \in End(V)\}$ son iguales.

Dado $X \in End(V)$ veremos que X está en el espacio generado por $\{g : g \in GL(V)\}$. El polinomio característico $\det(X + tI)$ tiene finitas soluciones entonces existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $X + tI$ es invertible, por lo que

$$X = (X + tI) - tI \in span\{g : g \in GL(V)\}.$$

Teorema (Dualidad Schur-Weyl)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y n un entero positivo. Como representación de $S_n \times GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ tenemos la descomposición

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \otimes \mathbb{S}_\lambda V$$

donde V_λ es una representación irreducible de S_n y $\mathbb{S}_\lambda V$ es una representación irreducible de $GL(V)$.

Dualidad Schur-Weyl.

- Dado que S_n es un grupo finito, la subálgebra A generada por la imagen de S_n en $End(V^{\otimes n})$ es un álgebra semisimple.
- La subálgebra B generada por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $B = End_{\mathbb{C}[S_n]}V^{\otimes n}$.

El Teorema del doble centralizador nos garantiza que

- B es semisimple
- $A = End_B V^{\otimes n}$
- Como representación de $S_n \times GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ tenemos la descomposición

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \otimes Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$$

donde V_λ es una representación irreducible de S_n y $Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$ es una representación irreducible de $GL(V)$.

Dualidad Schur-Weyl.

- Dado que S_n es un grupo finito, la subálgebra A generada por la imagen de S_n en $End(V^{\otimes n})$ es un álgebra semisimple.
- La subálgebra B generada por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $B = End_{\mathbb{C}[S_n]}V^{\otimes n}$.

El Teorema del doble centralizador nos garantiza que

- B es semisimple
- $A = End_B V^{\otimes n}$
- Como representación de $S_n \times GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ tenemos la descomposición

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \otimes Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$$

donde V_λ es una representación irreducible de S_n y $Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$ es una representación irreducible de $GL(V)$.

Dualidad Schur-Weyl.

- Dado que S_n es un grupo finito, la subálgebra A generada por la imagen de S_n en $End(V^{\otimes n})$ es un álgebra semisimple.
- La subálgebra B generada por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $B = End_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n}$.

El Teorema del doble centralizador nos garantiza que

- B es semisimple
- $A = End_B V^{\otimes n}$
- Como representación de $S_n \times GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ tenemos la descomposición

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \otimes Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$$

donde V_λ es una representación irreducible de S_n y $Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$ es una representación irreducible de $GL(V)$.

Dualidad Schur-Weyl.

- Dado que S_n es un grupo finito, la subálgebra A generada por la imagen de S_n en $End(V^{\otimes n})$ es un álgebra semisimple.
- La subálgebra B generada por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $B = End_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n}$.

El Teorema del doble centralizador nos garantiza que

- B es semisimple
- $A = End_B V^{\otimes n}$
- Como representación de $S_n \times GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ tenemos la descomposición

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \otimes Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$$

donde V_λ es una representación irreducible de S_n y $Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$ es una representación irreducible de $GL(V)$.

Dualidad Schur-Weyl.

- Dado que S_n es un grupo finito, la subálgebra A generada por la imagen de S_n en $End(V^{\otimes n})$ es un álgebra semisimple.
- La subálgebra B generada por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $B = End_{\mathbb{C}[S_n]}V^{\otimes n}$.

El Teorema del doble centralizador nos garantiza que

- B es semisimple
- $A = End_B V^{\otimes n}$
- Como representación de $S_n \times GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ tenemos la descomposición

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \otimes Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$$

donde V_λ es una representación irreducible de S_n y $Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$ es una representación irreducible de $GL(V)$.

Dualidad Schur-Weyl.

- Dado que S_n es un grupo finito, la subálgebra A generada por la imagen de S_n en $End(V^{\otimes n})$ es un álgebra semisimple.
- La subálgebra B generada por la imagen de $GL(V)$ en $End(V^{\otimes n})$ es $B = End_{\mathbb{C}[S_n]}V^{\otimes n}$.

El Teorema del doble centralizador nos garantiza que

- B es semisimple
- $A = End_B V^{\otimes n}$
- Como representación de $S_n \times GL(V)$ en $V^{\otimes n}$ tenemos la descomposición

$$V^{\otimes n} \simeq \bigoplus_{\lambda} V_\lambda \otimes Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$$

donde V_λ es una representación irreducible de S_n y $Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V)$ es una representación irreducible de $GL(V)$.

$\square$

Dualidad de Schur-Weyl.

Observemos que para cada λ se tiene que

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V^{\otimes n}) &\cong (V_\lambda)^* \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &= \mathbb{C}[S_n]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V^{\otimes n} c_\lambda \\ &= \mathbb{S}_\lambda V \end{aligned}$$

□

Dualidad de Schur-Weyl.

Observemos que para cada λ se tiene que

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V^{\otimes n}) &\cong (V_\lambda)^* \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &= \mathbb{C}[S_n]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V^{\otimes n} c_\lambda \\ &= \mathbb{S}_\lambda V \end{aligned}$$

Dualidad de Schur-Weyl.

Observemos que para cada λ se tiene que

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V^{\otimes n}) &\cong (V_\lambda)^* \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &= \mathbb{C}[S_n]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V^{\otimes n} c_\lambda \\ &= \mathbb{S}_\lambda V \end{aligned}$$

Dualidad de Schur-Weyl.

Observemos que para cada λ se tiene que

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V^{\otimes n}) &\cong (V_\lambda)^* \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &= \mathbb{C}[S_n]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V^{\otimes n} c_\lambda \\ &= \mathbb{S}_\lambda V \end{aligned}$$

$\square$

Dualidad de Schur-Weyl.

Observemos que para cada λ se tiene que

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\lambda, V^{\otimes n}) &\cong (V_\lambda)^* \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &= \mathbb{C}[S_n]c_\lambda \otimes_{\mathbb{C}[S_n]} V^{\otimes n} \\ &\cong V^{\otimes n} c_\lambda \\ &= \mathbb{S}_\lambda V \end{aligned}$$

$\square$

GRACIAS :D