

## Notas núm. 3

### Tablas de caracteres de grupos finitos.

Las columnas están etiquetadas por las clases de equivalencia de representaciones irreducibles  $\pi \in \hat{G}$ . Las filas por las clases de conjugación  $c \in G/\text{conj}$ . Se forma un “cuadrado mágico”. Nos gusta también agregar a un lado de la columna de las clases de conjugación  $c$  la lista de sus cardinalidades  $|c|$ . A veces agregamos también una columna de una (o más) representación reducible que nos ayuda a llenar la tabla.

**Ejemplo.**  $G = S_3$ .

$c$	$ c $	1	signo	$\mathbb{C}^2$	$\mathbb{C}^3$
1	1	1	1	2	3
(12)	3	1	-1	0	1
(123)	2	1	1	-1	0

### Explicación.

- En la primera columna aparece una lista de las clases de conjugación del grupo (un representante de cada clase). En la segunda columna el número de elementos de cada clase. En la primera fila (entre las dos doble-líneas verticales ||) aparece una lista de las representaciones irreducibles: “1” es la representación trivial (en  $\mathbb{C}$ ), “signo” es la representación de  $\dim=1$  que asigna 1 a las permutaciones pares y -1 a las impares.  $\mathbb{C}^2$  es la representación irreducible de  $\dim=2$  (solo hay una).  $\mathbb{C}^3$  es la representación asociada a la acción natural de  $S_3$  en  $\{1, 2, 3\}$ . Esta no es irreducible pero es útil porque es fácil calcular su caracter (contando el número de puntos fijos de una permutación) y tenemos que  $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \oplus 1$ , lo que nos da el caracter de  $\mathbb{C}^2$ . Pero también se puede calcular el caracter de  $\mathbb{C}^2$  puramente de las propiedades generales de la tabla de caracteres.
- La relación de ortogonalidad  $\langle \chi_\pi, \chi_{\pi'} \rangle = \delta_{\pi\pi'}$  se traduce a

$$\sum_c |c| \chi_\pi(c) \chi_{\pi'}(c) = \delta_{\pi\pi'} |G|.$$

(Nota:  $|G|$  es la cardinalidad de  $G$ ).

Esta es una relación de ortogonalidad entre las columnas de la tabla.

- Si multiplicamos cada entrada  $\chi_\pi(c)$  de la tabla por  $\sqrt{|c|/|G|}$  obtenemos una matriz cuyas *columnas* forman una base unitaria, o sea matriz unitaria, así que sus *filas* forman también una base unitaria. Esto da una relación de ortogonalidad entre las filas de la tabla.

$$\sum_\pi \chi_\pi(c) \chi_\pi(c') = \delta_{cc'} |G|/|c|.$$

- 3.1.** Verificar en la tabla de  $S_3$  la relación de ortogonalidad entre las filas.
- 3.2.** Construir las tablas de caracteres de los siguientes grupos:  $S_4$ ,  $A_4$  (el subgrupo de  $S_4$  de permutaciones pares),  $\mathbb{Z}_n$ ,  $D_n$  (el grupo de isometrías de un polígono regular de  $n$  lados),  $Q_8$  (el grupo de cuaterniones  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ).
- 3.3.** Descomponer en irreducibles la representación de  $S_n$  en  $\mathbb{C}^n$  dada por permutación de las coordenadas.

Nota: la respuesta es que hay dos irreducibles; una es la trivial  $\mathbb{C}(1, \dots, 1)$ , la otra  $\{\sum z_i = 0\}$ . Se puede demostrar sin gran dificultad que el segundo es irreducible directamente de la definición de irreducible (empiezas con un vector con dos coordenadas diferentes y ves que su órbita bajo  $S_n$  genera a todo el subespacio). Demostrándolo con teoría de carácter, i.e. calculando que  $\|\chi\|^2 = 2$ , me resulta demasiado difícil, pero si alguien lo logra nos avisa por favor.

- 3.4.** Distribuimos los números de 1 hasta 6 en las 6 caras de un cubo. Después, reemplazamos cada número por el promedio de los números que aparecen en las 4 caras vecinas. Lo repetimos, reemplazamos de nuevo el número en cada cara por el promedio de las 4 adyacentes. Y así seguimos muchas veces. Después de repetir el proceso 100 veces, ¿qué números se encuentran escritos sobre las caras del cubo?

Sugerencia: sea  $G \simeq S_4$  el grupo de simetría del cubo,  $V \simeq \mathbb{C}^6$  el conjunto de las asignaciones de números complejos en las caras del cubo, y  $T \in \text{End}(V)$  la operación de reemplazar cada número en cada cara por el promedio de sus 4 adyacentes. Así que si  $v \in V$  es la asignación inicial, el problema es encontrar a  $T^{100}v$ . Demuestra que  $T$  es  $G$ -equivariante así que está dada por una multiplicación por escalar en cada subespacio invariante irreducible de  $V$  (i.e. es un eigen espacio de  $T$ ). Encuentra el carácter de  $V$  y usa la tabla de caracteres de  $S^4$  para descomponer a  $V$  en irreducibles. Determina el eigen valor de  $T$  en cada subespacio irreducible. Las componentes del vector inicial  $v \in V$  en eigenespacios con eigenvalores  $\lambda$  con  $|\lambda| < 1$  convergen rápidamente a 0.

**Definición.** El **anillo de representaciones** de un grupo finito,  $R(G) = \mathbb{Z}[\hat{G}]$ , es el anillo conmutativo generado por los elementos de  $\hat{G}$  con la suma dada por suma directa y producto dado por el producto tensorial. Los elementos de  $R(G)$  se llaman a veces **representaciones virtuales**. Las representaciones “verdaderas” son las combinaciones lineales con coeficientes enteros no-negativos.

La asignación de carácter a una representación,  $\rho \mapsto \chi_\rho$ , define un homomorfismo (encaje) de  $R(G)$  en  $\mathbb{C}[G/\text{conj}] = \mathbb{C}[G]^{\text{cong}}$ , con el producto usual de funciones. Así podemos pensar en  $R(G)$  como el conjunto de combinaciones lineales con coeficientes enteros de los caracteres de representaciones irreducibles, con la suma y producto ordinario de funciones.

Por ejemplo, para  $G = S_3$ , denotamos  $\sigma = \text{signo}$ ,  $\lambda = \mathbb{C}^2$ . Entonces tenemos  $R(S_3) = \{a + b\sigma + c\lambda \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$ , y de la tabla de caracteres el producto determinado por las relaciones,  $\sigma^2 = 1, \sigma\lambda = \lambda, \lambda^2 = 1 + \sigma + \lambda$ .

- 3.5.** Demostrar el último inciso.

→**3.6.** Encontrar los anillos de representaciones para los grupos cuyos tablas de caracteres calculaste en ejercicios anteriores.

**Definición.** Dada una representación  $V$ , definimos a  $S^k(V)$ , la  $k$ -ésima potencia simétrica de  $V$ , como el subespacio de  $V \otimes \dots \otimes V$  ( $k$  veces) de los elementos que quedan fijos bajo la representación de  $S_k$  que permuta a los factores:  $\sigma \cdot [v_1 \otimes \dots \otimes v_k] = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}$ . También definimos a  $\Lambda^k(V)$ , la  $k$ -ésima potencia exterior (o alternante) de  $V$ , como el subespacio de tensores que satisfacen  $\sigma \cdot T = \text{signo}(\sigma)T$ .

→**3.7.** Sea  $\dim V = n$ . Encuentra la dimensión de  $\Lambda^k(V)$  y  $S^k(V)$

→**3.8.**  $V \otimes V = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V)$  (suma directa de representaciones).

→**3.9.** Calcula  $S^2(\lambda), \Lambda^2(\lambda) \in R(S_3)$ .

Sugerencia: Tenemos que  $\lambda^2 = S^2(\lambda) + \Lambda^2(\lambda)$ . Ahora para cualquier representación  $\rho$  de dimensión  $n$ ,  $\Lambda^n(\rho) = \det(\rho)$  (la representación unidimensional que manda  $g \in G$  a  $\det(\rho(g))$ ). Ahora demuestra que  $\det(\lambda) = \sigma$  así que  $S^2(\lambda) = 1 + \lambda$ .

→**3.10.**  $S^k(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{p+q=k} S^p(V_1) \otimes S^q(V_2)$ . Mismo para la potencia exterior.

→**3.11.** Sea  $V$  una representación compleja de un grupo  $G$ . Una función  $p : V \rightarrow \mathbb{C}$  es **polinomial homogénea** de grado  $d$  si es polinomial homogénea de grado  $d$  cuando la expresamos en coordenadas con respecto a una base en  $V$ . Demuestra que esta definición no depende de la base en  $V$  que usamos. Sea  $H_d \subset \mathbb{C}[V]$  el subespacio de todas las funciones en  $V$  que son polinomiales homogéneas de grado  $d$ . Demuestra que  $H_d$  es un subespacio invariante bajo la representación de permutación de  $G$  en  $\mathbb{C}[V]$  ( $p(z) \mapsto p(g^{-1} \cdot z)$ ). Finalmente, demuestra que existe un isomorfismo canónico de representaciones entre  $H_d$  y  $S^d(V^*)$  (intenta definir rigurosamente “canónico”).

→**3.12.** Calcula  $\lambda^n, S^n(\lambda) \in R(S_3)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

→**3.13.** Sea  $\mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$  el espacio de polinomios en 3 variables con coeficientes complejas, equipado con la representación de permutación de  $S_3$ , asociada con la acción en  $\mathbb{C}^3$  que permuta las coordenadas. Encuentra la descomposición en irreducibles de  $H_d \subset \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$  (el subespacio de polinomios homogéneos de grado  $d$ ). Sugerencia:  $H_d = S^d(V_1)$  y  $V_1 = 1 + \lambda$ .

Nota: “encontrar la descomposición en irreducibles” de una representación  $V$  tiene dos sentidos distintos. El primero significa encontrar subespacios invariantes irreducibles  $V_i \subset V$  tal que  $V$  es la suma directa de los  $V_i$ 's. El segundo es escribir a la clase de  $V$  en  $R(G)$  como combinación lineal de elementos de  $\hat{G}$ , o sea encontrar la clase de equivalencia de cada  $V_i$ , sin encontrar los  $V_i$ 's mismos. La segunda tarea es mucha más fácil que la primera, usando la tabla de caracteres del grupo y la estructura de  $R(G)$ .

(Actualizado: 24 de febrero de 2020).