> **Inmersión de Whitney (Idea Directa)**
> Para cada k-variedad M^k, existe una inmersión de M^k en $\mathbb{R}^{2k}$.

Demostración: Por el Teorema (débil) de Encaje de Whitney, sabemos que existe un encaje

$$f : M^k \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}.$$

Definimos $g : T(M^k) \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ tal que $g(x,v) = df_x(v)$, y recordamos que $\dim T(M^k) = 2k$. Ya que $2k+1 > 2k$, sabemos que todo punto en $T(M^k)$ es un punto crítico de g. Así, notando que la imágen de g es un conjunto de valores críticos y aplicando el Teorema de Sard, tenemos que la imágen de g tiene medida cero en $\mathbb{R}^{2k+1}$. Por lo tanto, podemos tomar $a \notin g(T(M^k))$ tal que $a \neq 0$. Sea π la proyección de $\mathbb{R}^{2k+1}$ sobre el complemento ortogonal de $a : H_a$. Así, $\pi \circ f : M^k \longrightarrow H_a$ es una inmersión si $d(\pi \circ f)$ inyectiva.

Falta ver que $d(\pi \circ f)$ es injectiva. Supongamos, para una contradicción, que existe $v \neq 0$ en $T_x(M^k)$ tal que $d(\pi \circ f)_x(v) = 0$. Notamos que π is lineal y, por regla de la cadena, $d(\pi \circ f)_x = \pi \circ df_x$. Así, estamos suponiendo que $\pi \circ df_x(v) = 0$.

Recordamos que la proyección de un vector $df_x(v)$ al complemento ortogonal de a es cero solamente si el vector es un multiplo escalar de a, por lo que $df_x(v) = ta$ para alguna $t \in \mathbb{R}$. Si $t = 0$ entonces $df_x(v) = 0$, pero esto no puede suceder ya que f es inmersión y su derivada es inyectiva, y tomamos $v \neq 0$. Por lo tanto, $t \neq 0$ y podemos tomar $g(x, \frac{v}{t}) = df_x(\frac{v}{t}) = a$, pero esto no puede suceder, pues tomamos a fuera de la imágen de g.

Por lo tanto, $d(\pi \circ f)$ es inyectiva, y tenemos una inmersión de nuestra variedad en H_a, un subespacio de dimensión $2k$ de $\mathbb{R}^{2k+1}$.

> **Inmersión de Whitney (Idea General)**
> Para cada k-variedad M^k, existe una inmersión de M^k en $\mathbb{R}^{2k}$.

Demostración: Para $m > 2k$, supongamos que tenemos la siguiente inmersión:

$$f : M^k \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

Definimos $g : T(M^k) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g(x,v) = df_x(v)$, y recordamos que $\dim T(M^k) = 2k$. Ya que $m > 2k$, sabemos que todo punto en $T(M^k)$ es un punto crítico de g. Así, notando que la imágen de g es un conjunto de valores críticos y aplicando el Teorema de Sard, tenemos que la imágen de g tiene medida cero en $\mathbb{R}^m$. Por lo tanto, podemos tomar $a \notin g(T(M^k))$ tal que $a \neq 0$. Sea π la proyección de $\mathbb{R}^m$ sobre el complemento ortogonal de $a : H_a$. Así, $\pi \circ f : M^k \longrightarrow H_a$ es una inmersión si $d(\pi \circ f)$ inyectiva.

Falta ver que $d(\pi \circ f)$ es injectiva. Supongamos, para una contradicción, que existe $v \neq 0$ en $T_x(M^k)$ tal que $d(\pi \circ f)_x(v) = 0$. Notamos que π is lineal y, por regla de la cadena, $d(\pi \circ f)_x = \pi \circ df_x$. Así, estamos suponiendo que $\pi \circ df_x(v) = 0$.

Recordamos que la proyección de un vector $df_x(v)$ al complemento ortogonal de a es cero solamente si el vector es un multiplo escalar de a, por lo que $df_x(v) = ta$ para alguna $t \in \mathbb{R}$. Si $t = 0$ entonces $df_x(v) = 0$, pero esto no puede suceder ya que f es inmersión y su derivada es inyectiva, y tomamos $v \neq 0$. Por lo tanto, $t \neq 0$ y podemos tomar $g(x, \frac{v}{t}) = df_x(\frac{v}{t}) = a$, pero esto no puede suceder, pues tomamos a fuera de la imágen de g.

Por lo tanto, $d(\pi \circ f)$ es inyectiva, y tenemos una inmersión de nuestra variedad en H_a, un subespacio de dimensión $m - 1$ de $\mathbb{R}^m$.

Como la composición $\pi \circ f$ es inmersión, podemos tomarla como una nueva "f" de M^k en $\mathbb{R}^{m-1}$, y repetir estos pasos inductivamente mientras $m - 1 > 2k$. Cuando llegamos a que $m - 1 = 2k + 1$, podemos bajar de dimensión una vez más, llegando a una inmersión en $\mathbb{R}^{2k}$.