Problema 8
Supón que r es un rayo partiendo de z_0 que intersecta a X de manera transversal en un conjunto no-vacío (necesariamente finito). Supón que z_1 es cualquier otro punto en r (pero no en X), y sea l el número de veces que r intersecta a X entre z_0 y z_1. Verifica que $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \mod 2$.

Demostración: Sea u_0 el mapeo direccional definida en el ejercicio 7 para z_0 y u_1 lo mismo para z_1. Como r intersecta a X de manera transversal, el ejercicio 7 nos dice que v es valor regular de u_0. Notamos que el rayo que parte de z_1 en la misma dirección está contenido en el primero rayo, y el mismo argumento demuestra que v es regular de u_1.

Notamos que $W_2(X, z_0) = \deg_2(u_0) = |u_0^{-1}(v)|$, o el número de veces que el rayo desde z_0 intersecta a X. De esta manera, también tenemos que $W_2(X, z_1)$ es el número de veces que el rayo desde z_1 intersecta a X, por lo que $W_2(X, z_1) + l = W_2(X, z_0)$.

Problema 9
Concluye que $\mathbb{R}^n - X$ tiene exactamente dos componentes:

$$D_0 = \{z \mid W_2(X, z) = 0\} \quad \text{y} \quad D_1 = \{z \mid W_2(X, z) = 1\}.$$

Demostración: Queremos construir un rayo partiendo de un punto $z_0 \in \mathbb{R}^n - X$ que intersecte de manera transversal y no vacía a X para poder aplicar el resultado anterior. Para esto, tomamos $x_0 \in X$ y v_0 el vector normal en x_0, es decir, la dirección hacia el exterior de la superficie. Notamos que, como $\dim X = n-1$ y $\dim \mathbb{R}^n = n$, localmente, esto es movernos sobre la $n-$ésima coordenada. Trazando la recta que pasa por x_0 en la dirección v_0, tomamos dos puntos sobre esta recta: $z_0 = x_0 - tv_0$, $z_1 = x_0 + tv_0$ con t suficientemente pequeño. Definimos, ahora, el rayo r que parte de z_0 y pasa por x_0 en la dirección v_0. Notamos que x es punto regular de u_0, lo que nos dice que

$$du_0 : T_{x_0}(X) \longrightarrow T_{v_0}(S^{n-1})$$

es isomorfismo. Esto es que, por el Teorema de Función Inversa, se manda una vecindad de $x_0 \in X$ en una vecindad de v_0 de manera difeomorfa. Por lo tanto, la ecuación $u_0(x) = v$ es invertible en esta vecindad, y cada v en esta vecindad de v_0 va a tener preimagen en la vecindad de x_0. Este detalle nos servirá en un momento.

Ahora, podría ser que el rayo que definimos intersecte a X en más puntos de manera no transversal. Para evitar esto, notamos que el Teorema de Sard nos permite elegir un valor regular de u_0 cerca de v_0, digamos v_0'. Esto nos da que el nuevo rayo r' partiendo de z_0 pero en la dirección v_0' intersecta a X de manera transversal. Por lo que habíamos comentado sobre el Teorema de Función Inversa, r' intersecta a X en un punto x_0' cerca de x_0. Es decir, la intersección no es vacía.

Ahora, tomemos $z_1 = x_0' - tv_0'$ y $z_2 = x_0' + tv_0'$ con t pequeña como antes. Supongamos que $z_1 \in D_0$ (suponer que está en D_1 es análogo). Considerando el subrayo de r' que parte de z_1 e intersecta a X de manera no transversal y no vacía, tenemos z_2 como un punto en el rayo después de la primera intersección con X por construcción. Por el ejercicio 8, tenemos que

$$W_2(X, z_2) = W_2(X, z_1) + 1 = 1,$$

por lo que $z_2 \in D_1$.

Luego, por el ejercicio 5, $\mathbb{R}^n - X$ tiene a lo más dos componentes conexos. Por el ejercicio 6, cualesquiera dos puntos en el mismo componente conexo tienen el mismo winding number mod 2. Por lo tanto, D_0 y D_1 necesariamente son los dos componentes.