Notas top dif 18 nov 2020

§3 $f: X \to Y$, ① genéricamente f es $\pitchfork Z$
$\cup$
Z ② $\pitchfork$ es estable bajo def.

---

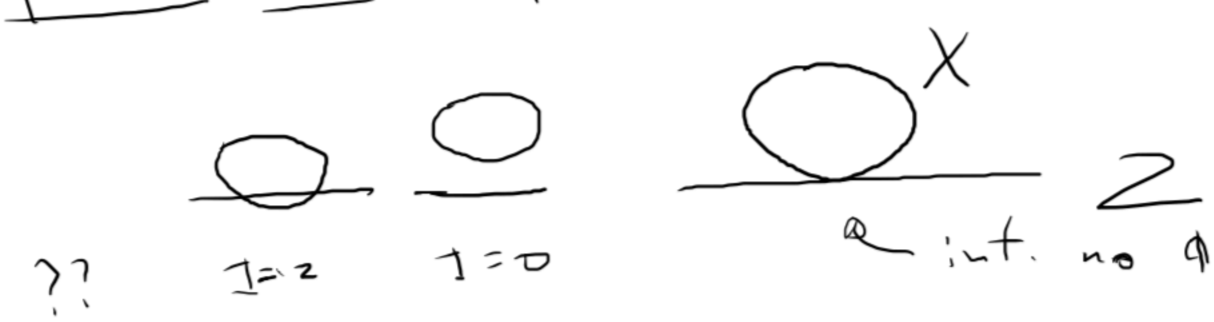
① núm. int. $X, Z \subset Y$, $\dim X + \dim Z = \dim Y$.

$X \pitchfork Z$, X cpt $\Longrightarrow I(X, Z) = \#(X \cap Z)$

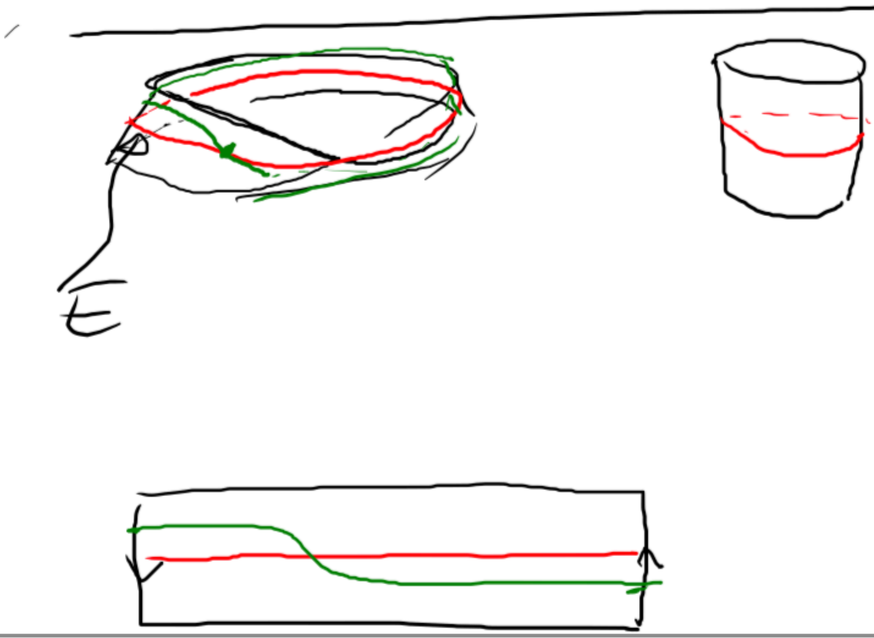
si X no es $\pitchfork Z$, "se deforma" X, para que sea $\pitchfork Z$, y se define $I(X, Z)$ como # de la int. de Z con X deformado.

prob 1: Sí depende de la def. de X. (se deforma la inclusión $i: X \hookrightarrow Y$. $\tilde{i}: X \hookrightarrow Y$

$Y = \mathbb{R}^2$



$$I_2(X, Z) = \#_2(\tilde{i}, Z) \mod 2$$ $\boxed{\text{inv. bajo homot.}}$



Ej: el "ecuador" de la banda de Mobius no se puede "alejar" del ecuador mismo.

$\Updownarrow$

$$I_2(E, E) = 1$$

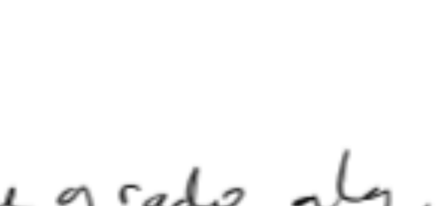
grado es # zeros
$p(z) = \cancel{x}\, c$

② el grado $\underbrace{X}_{\text{cpct.}} \xrightarrow{f} \underbrace{Y}_{\text{mism a dim}}$

$\text{grado}_2(f) = \#_2 f^{-1}(y) = I_2(f, \{y\})$
valor reg.

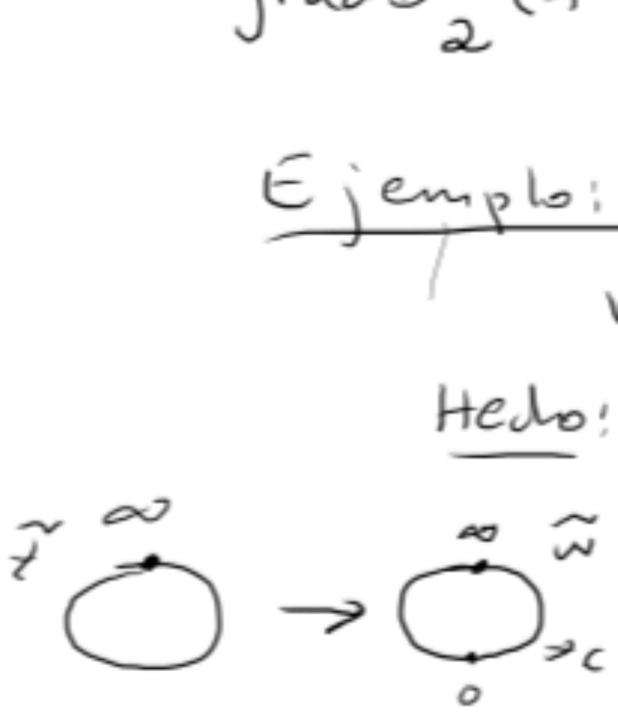
<u>Ejemplo:</u> $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ pol. de grado alg. n
$w = f(z) = a_n z^n + \cdots$ $\quad a_n \neq 0$.

<u>Hecho:</u> f se extiende a la csf. de Riemann



$S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$

$\tilde{z} = \frac{1}{z}$, $\tilde{w} = \frac{1}{w}$



$f(z) = c$

$\tilde{z} \mapsto \frac{1}{\tilde{z}} \xmapsto{f} \left(a_n\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^n + \cdots\right) \xmapsto{\frac{1}{w}}$

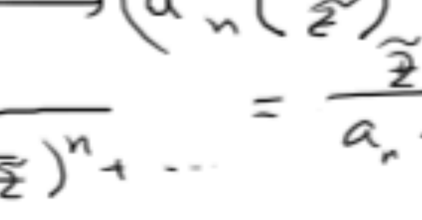
$\tilde{w} = \frac{1}{a_n\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)^n + \cdots} = \frac{\tilde{z}^n}{a_n + a_{n-1}\tilde{z} + \cdots + a_0 \tilde{z}^n}$

$S^1 \to S^1$

imagen iny. cont de $S^1 \to \mathbb{R}^2$

NA

③ Teo de Jordan



complemento de una curva simple en $\mathbb{R}^2$ tiene 2 componentes arco-conexa (A & NA).
<u>para</u> suave $f: S^1 \to \mathbb{R}^2$.

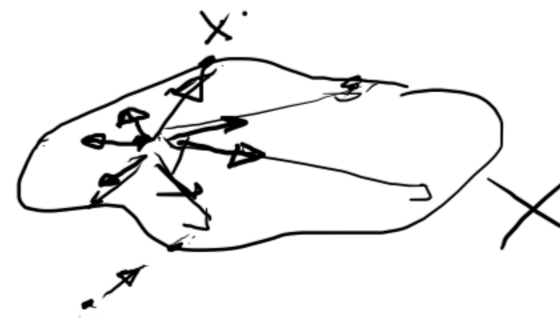
$X^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ el complemento son dos comp. AC, una acotada otra no
cpct.
conexo

$n = 3 \Rightarrow X$ superficie
$n > 3$ hipersup.

Winding number

$X \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $y \notin X$.

$X \xrightarrow{g} S^n$, $x \mapsto \frac{x-y}{|x-y|}$



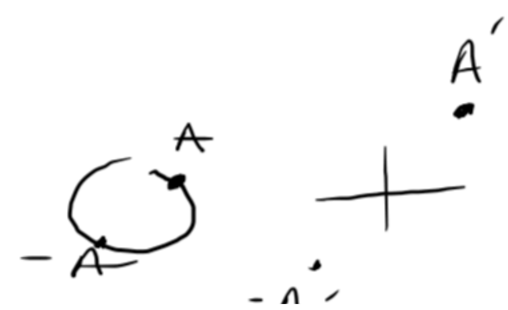
$W_2(X, y) = \deg_2(g)$

④ <u>Borsuk-Ulam</u>

$f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$f(-x) = -f(x)$

(e.g. $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$)



$W_2(f, 0) = 1$.

Prob 20, cap2, sec 3

$$Z^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$$

$\forall z \in Z$, $\exists U \overset{ab}{\subset} \mathbb{R}^{n+k}$, $f_1, \dots, f_k : U \to \mathbb{R}$

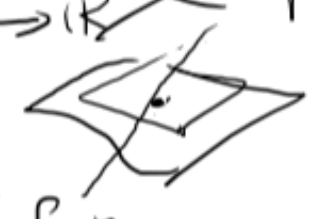
$$Z \cap U = \{x \in U \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}$$

y además, $df_1(z), \dots, df_k(z) \in (\mathbb{R}^{n+k})^*$ son lin. ind. $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^k$.

Pregunta: ¿existe un ab. $U \supset Z$, $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ y funciones $f_1, \dots, f_k$ en U t.q. $Z = \{x \in U \mid f_1 = \dots = f_k = 0\}$?

E.g. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Sí. $f = r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R}^k \to N(Z)$ l.i. $n_1, \dots, n_k : Z \to \cancel{\mathbb{R}^{n+k}}$ $N(Z)$.



n_i $Z^n \subset \mathbb{R}^{n+k} \Rightarrow \forall n \in N(Z)$ $\exists f_1, \dots, f_k$ $n = \sum f_i n_i$

$$f_i : N(Z) \to \mathbb{R}.$$

Una vec. de Z en $\mathbb{R}^{n+k}$ es difeo a una vec. de $Z \times \{0\}$ en $N(Z)$; $\boxed{(z, n) \mapsto z + n}$

$$\begin{array}{ccc} N(Z) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+k} \\ \cup & & \cup \\ Z \times \{0\} & & Z \end{array}$$

$z \in Z$, $n \perp T_z Z$

$n \in \mathbb{R}^{n+k}$

Una vec. de se manda a una vec de