Teorema de Sard - Topología Diferencial
Jorge Miguel Valles Silva

---

**Definición.** Sea $A$ subconjunto de una variedad $k$-dimensional $X$. Diremos que $A$ tiene medida cero si para cada parametrización local $\phi : U \to X$ se cumple que $\phi^{-1}(A)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^k$.

**Teorema.** Si $A$ es subconjunto de una variedad $k$-dimensional $X$, entonces $A$ tiene medida cero si y solo si todo $x \in X$ tiene una parametrización local $\psi : U \to X$ tal que $\psi^{-1}(A)$ tiene medida cero en $\mathbb{R}^k$.

**Demostración.** La implicación hacia la derecha es directa de la definición, así que probaremos la otra. Sea $\phi : U \to X$ una parametrización local, con $V := \mathrm{Im}(\phi)$. Por hipótesis sabemos que para cada $x \in X$ existe $\psi_x : U_x \to X$ tal que $\psi_x^{-1}(A)$ tiene medida cero. Definamos $V_x := \mathrm{Im}(\phi_x)$ para todo $x \in X$. Notemos que $\{V_x\}_{x\in V}$ forma una cubierta abierta para $V$. Como los espacios Euclidianos cumplen el segundo axioma de numerabilidad, existe una sucesión $x_1, x_2, ... \in V$ tal que

$$V \subseteq \bigcup_{n\geq 1} V_{x_n}. \qquad (*)$$

Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y probemos que $\phi^{-1}(A \cap V \cap V_{x_n})$ tiene medida cero. Notemos primero que $V \cap V_{x_n}$ es un abierto, y cumple que está contenido en la imagen de ambas parametrizaciones $\phi$ y $\psi_{x_n}$. Entonces considerando $\psi_{x_n}$ restringida al abierto $\psi_{x_n}^{-1}(V \cap V_{x_n})$, vemos que $\phi^{-1} \circ \psi_{x_n}$ es un difeomorfismo. Por otro lado, tenemos que

$$\psi_{x_n}^{-1}(A \cap V \cap V_{x_n}) \subseteq \psi^{-1}(A),$$

así que $\psi_{x_n}^{-1}(A \cap V \cap V_{x_n})$ tiene medida cero. Como $\phi^{-1} \circ \psi_{x_n}$ es suave, manda conjuntos de medida cero a conjuntos de medida cero, de modo que

$$(\phi^{-1} \circ \psi_{x_n}) \left(\psi_{x_n}^{-1}(A \cap V \cap V_{x_n})\right) = \phi^{-1}(A \cap V \cap V_{x_n})$$

tiene medida cero. Por $(*)$ se sigue que

$$\phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(A \cap V) = \phi^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1} A \cap V \cap V_{x_n}\right) = \bigcup_{n\geq 1} \phi^{-1}\left(A \cap V \cap V_{x_n}\right),$$

lo que implica que $\phi^{-1}(A)$ tiene medida cero.

$\blacksquare$

**Teorema de Sard.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación suave entre variedades, y sea $C$ el conjunto de puntos críticos de $f$ en $X$. Entonces $f(C)$ tiene medida cero en $Y$.

**Demostración.** Utilizaremos el teorema anterior para la demostración. Sea $y \in Y$ y $\psi : U \to V \subseteq Y$ una parametrización al rededor de $y$. Queremos probar que $\psi^{-1}(f(C))$ tiene medida cero. Como $f$ es suave, se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto. Entonces podemos cubrir $f^{-1}(V)$ con las imágenes de una sucesión de parametrizaciones locales $\phi_n : U_n \to V_n$, es decir,

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{n\geq 1} V_n.$$

Se define $g_n := \psi^{-1} \circ f \circ \phi_n$. Entonces tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, "f"] & V \arrow[d, "\psi^{-1}"] \\ U_n \arrow[u, "\phi_n"] \arrow[r, "g"'] & U \end{tikzcd}$$

Ya que $\phi_n$ y $\psi^{-1}$ son difeomorfismos, tendremos que los puntos críticos de $\phi_n$ son $C_n = \phi_n^{-1}(C)$. Entonces

$$\begin{aligned} g_n(C_n) &= (\psi^{-1} \circ f \circ \phi_n)(\phi_n^{-1}(C)) \\ &= (\psi^{-1} \circ f)(C \cap V_n), \end{aligned}$$

y ya que los $V_n$ cubren a $f^{-1}(V)$, se cumple que

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\geq 1} g_n(C_n) = \bigcup_{n\geq 1} &(\psi^{-1} \circ f)(C \cap V_n) \\ &= (\psi^{-1} \circ f)(C \cap f^{-1}(V)) \\ &= \psi^{-1}(f(C) \cap V)) \\ &= \psi^{-1}(f(C)). \end{aligned}$$

Gracias a la igualdad anterior, basta probar que $g_n(C)$ tiene medida cero para todo $C$. Pero $g_n : U_n \to U$ es una aplicación entre espacios Euclidianos. De esta forma reducimos el **Teorema de Sard** al caso específico de aplicaciones entre espacios Euclidianos, que se demuestra en el siguiente **Teorema**.

$\blacksquare$

**Teorema.** Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}^p$ una aplicación suave, y sea

$$C := \{x \in U | \text{rango } df_x < p\}.$$

Entonces la imagen $f(C) \subseteq \mathbb{R}^p$ tiene medida cero.

**Demostración.** La prueba se hará por inducción sobre $n$. Notemos que el resultado tiene sentido para $n \geq 0$ y $p \geq 1$, tomando en cuenta que $\mathbb{R}^0$ es un punto, para el cual el teorema es cierto.

Sea $C_1 \subseteq C$ el conjunto de $x \in U$ tales que $df_x = 0$. Más generalmente, sea $C_i$ el conjunto de $x \in U$ para los cuales todas las derivadas de orden menor o igual que $i$ de $f$ en $x$ son cero, para $i \geq 1$. Entonces tenemos una cadena decreciente de conjuntos

$$C \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq ...$$

La prueba se divide en los siguientes tres pasos

- Paso 1. $f(C - C_1)$ tiene medida cero.
- Paso 2. $f(C_k - C_{k+1})$ tiene medida cero para $k \geq 1$.
- Paso 3. Si $k > n/p - 1$, entonces $f(C_k)$ tiene medida cero.

Notemos que combinados estos tres hechos, tomando $K \geq n/p - 1$ y viendo que

$$f(C) = f(C - C_1) \cup \left( \bigcup_{k=1}^{K} f(C_k - C_{k+1}) \right) \cup f(C_{K+1}).$$

se deduce directamente que $f(C)$ tiene medida cero, por ser unión finita de conjuntos de medida cero. Dicho esto, nos concentraremos en demostrar cada paso.

- Prueba del Paso 1.

  Si $p = 1$, entonces necesariamente $C = C_1$, así que este caso es directo. Supongamos que $p \geq 2$. Para cada $x_0 \in C - C_1$ encontraremos una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f(V \cap C)$ tiene medida cero. Ya que $C - C_1$ se puede cubrir con una cantidad numerable de estos abiertos, esto probará que $f(C - C_1)$ tiene medida cero.

  Ya que $x_0 \notin C_1$, existe una derivada parcial de $f$ en $x_0$ que no se anula. Sin pérdida de generalidad supongamos que es $\partial f_{x_1}/\partial x_1$. En ese caso, se define la aplicación $h : U \to \mathbb{R}^n$ como

  $$h(x) := (f_1(x), x_2, ..., x_n).$$

  Observemos que la matriz asociada a $dh_{x_0}$ en la base canónica es triangular superior, con determinante

  $$\det(dh_{x_0}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \neq 0.$$

  Como $dh_{x_0}$ es no singular, por el teorema de la función inversa tenemos que $h$ manda difeomórficamente una vencindad $V$ de $x_0$ a un abierto $V'$. La composición $g := f \circ h^{-1}$ manda entonces $V'$ a $\mathbb{R}^p$. Observemos que los puntos críticos de $g$ son precisamente $h(V \cap C)$, así que el conjunto de valores críticos de $g$ es

  $$g(h(V \cap C)) = (f \circ h^{-1})(h(V \cap C)) = f(V \cap C).$$

  Entonces nos concentraremos en probar que los valores críticos de $g$ tienen medida cero. Para cada $(t, x_2, ..., x_n) \in V'$ notemos que $g(t, x_2, ..., x_n)$ se encuentra en el hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. Entonces $g\left(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}\right) \subseteq \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$. Dicho esto, podemos definir

  $$g^t : (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \to \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$$

  como la restricción de $g$. Notemos que un punto de $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ es punto crítico de $g^t$ si y sólo si es punto crítico de $g$, esto podemos notarlo ya que

  $$\left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(t, x_2, ..., x_n) \right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left( \dfrac{\partial g_i^t}{\partial x_j}(t, x_2, ..., x_n) \right)_{ij} \end{pmatrix}.$$

  Aquí se aplica la hipótesis de inducción para afirmar que los valores críticos de $g^t$ tienen medida cero. Entonces los valores críticos de $g$ intersectan a cada hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ en un conjunto de medida cero. Entonces por el teorema de Fubini, tenemos que el conjunto

  $$f(V \cap C)$$

  tiene medida cero.

- Prueba del Paso 2.

  La prueba es casi igual, pero más sencillo, porque no es necesario aplicar Fubini. En este caso se toma $x_0 \in C_k - C_{k+1}$ y $w$ como una derivada parcial de orden $k$ de $f$, tal que $\dfrac{\partial w}{\partial x_1}$ no se anula en $x_0$ y definimos $h : U \to \mathbb{R}^n$ como

$$h(x) := (w(x), x_2, ..., x_n).$$

  Tendremos que $h$ manda difeomórficamente una vecindad $V$ de $x_0$ a un abierto $V'$. Notemos que $h$ manda $C_k \cap V$ al hiperplano $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, y es aquí donde notamos que no será necesario utilizar Fubini, solo la hipótesis de inducción. El resto de la prueba se hace igual que en el Paso 1, con $t = 0$.

- Prueba del Paso 3.

  Sea $S \subseteq U$ un cubo cuyos lados miden $\delta > 0$, para $\delta$ suficientemente pequeño (se puede encontrar porque $U$ es abierto). Si $k$ es suficientemente grande ($k > n/p - 1$), se probará que $f(C_k \cap S)$ tiene medida cero. Ya que $C_k$ se puede cubrir con una cantidad numerable de estos cubos, esto probaría que $f(C_k)$ tiene medida cero.

  Por el teorema de Taylor, la compacidad de $S$, y la definición de $C_k$, vemos que

$$f(x + h) = f(x) + R(x, h),$$

  donde

$$||R(x, h)|| < a\,||h||^{k+1} \qquad (*)$$

  siempre que $x \in C_k \cap S$ y $x + h \in S$. Aquí $a$ es una constante que depende solamente de $f$ y $S$. Ahora tomamos $r \in \mathbb{N}$ y subdividimos $S$ en $r^n$ cubos cuyo lado mide $\delta/r$. Sea $x \in C_k$ y $S_1$ un cubo de la subdivisión que contiene a $x$. Entonces cualquier punto de $S_1$ escrito como $x + h$ debe cumplir

$$||h|| < \sqrt{n}\left(\frac{\delta}{r}\right),$$

  ya que el lado derecho de la desigualdad es el largo de la diagonal de $S_1$, la distancia máxima a la que pueden estar dos puntos en el cubo $S_1$. De $(*)$ se sigue que $f(S_1)$ está contenido en un cubo con lados $b/r^{k+1}$ centrado en $f(x)$, donde $b = 2a(\sqrt{n}\delta)^{k+1}$ es constante. Se deduce que $f(C_k \cap S_1)$ está contenido en la unión de a lo más $r^n$ cubos que suman un volumen total

$$v \leq r^n \left(\frac{b}{r^{k+1}}\right)^p = b^p r^{n-(k+1)p}$$

  donde el lado derecho de la desigualdad tiende a cero cuando $r \to \infty$, ya que

$$k > n/p - 1 \quad \Rightarrow \quad n - (k+1)p < 0.$$

■