1. Demuestra: las fórmulas que obtuvimos en la clase del 25 ago,

$$a = 2mn,\ b = m^2 - n^2,\ c = m^2 + n^2, \qquad (*)$$

producen una terna pitagórica para cada par de enteros $m > n > 0$. Además, la terna es primitiva si y solo si (m, n) son primos relativos (no tienen factor común > 1), uno de ellos es par y el otro impar.

(Es decir, hay que demostrar dos cosas: 1) si la terna es primitiva entonces (m, n) son primos relativos, uno de ellos es par y el otro impar. 2) Si (m, n) son primos relativos, uno de ellos par y el otro impar, entonces (a, b, c) es una terna primitiva .)

Dem. (1) Sean $m > n > 0$ enteros.

P.D. $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, $c = m^2 + n^2$ es una terna pit.

D: $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n > 0 \Rightarrow a = 2mn \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ (obvio).

$\Rightarrow b = m^2 - n^2 > 0$ $b \in \mathbb{Z}$. (usando $m > n$).

$\Rightarrow c = m^2 + n^2 \in \mathbb{Z}$, $c > 0$

Luego, $a^2 + b^2 - c^2 = 4\cancel{m^2n^2} + \cancel{m^4} + \cancel{n^4} - 2\cancel{m^2n^2} - \cancel{m^4} - \cancel{n^4} - \cancel{2m^2n^2}$

$= 0$. ■

(2) P.D. (m, n) coprimos, uno par otro impar $\Rightarrow (a, b, c)$ no tiene factor común > 1.

D: Sea k un factor común $> 1 \Rightarrow \exists p$ primo, $p \mid k$. (p div. a k)

"existe"

par imp. imp.

$\Rightarrow p \mid a, b, c$

(p.j.)

$\Rightarrow p \mid 2 \cdot m \cdot n$ — $p = 2 \Rightarrow$ X, — $p \mid m$ — $p \mid n$

- $p \mid m \Rightarrow b = m^2 + n^2 \equiv n^2 \Rightarrow p \mid n$. X
- $p \mid n \Rightarrow b = m^2 + n^2 \equiv m^2 \Rightarrow p \mid m$ X.

■

2, 3, 5, 7, 11, ...

$n \equiv 0 \mod p$

$\Updownarrow$

$p \mid n$.

$n \mid A, B$
$\Rightarrow n \mid A \pm B$.

$\boxed{p \mid A \cdot B \Rightarrow p \mid A \text{ ó } p \mid B}$
p primo "Lema de Euclides"

D

$(2k+1) + (2\ell+1) =$
$= 2(k + \ell + 1)$

(3) P.1) (a, b, c) sin fac. común $\Rightarrow$ (m, n) coprimos y uno par otro impar

Di: • si $k \mid m, n$, $k > 1$, $k^2 \mid a = 2m \cdot n$, $k^2 \mid m^2 \pm n^2$ $\Rightarrow$ k^2 fact. común de a, b, c.

• (par, par) $\Rightarrow$ X, (impar, impar) $\overset{?}{\Rightarrow}$ a, b, c son pares. X

?: $a = 2mn \Rightarrow$ par. ✓

$$\left.\begin{array}{l} b = m^2 - n^2 \Rightarrow \text{par} \\ c = m^2 + n^2 \Rightarrow \text{par} \end{array}\right\}$$

QED

·	par	impar
par	par	par
imp.	par	impar

±	p	i
p	p	i
i	i	p

2. Demuestra: para cada terna pitagórica primitiva (a, b, c) existe una única pareja de enteros positivos (m, n) que produce esta terna, o la terna (b, a, c), mediante las fórmulas (*).

[prob. 1 dice que si usar (*) para prod. solamente ternas primitivas, mejor tomar m, n coprimos uno par otro impar]

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(3) encontrar todas las ternas pit. prim (a, b, c) con $a, b, c < 50$

m	n	a	b	c	abc
2	1	4	3	5	60
4	1	8	15	17	2040
6	1	12	35	37	15540
3	2	12	5	13	780
5	2	20	21	29	12180
4	3	24	7	25	-
5	4	40	9	41	-

Preguntas

- ¿Cuántas veces aparece un núm? núm. finito de veces?
- ¿Cuántas ternas contienen núm sucesivos?