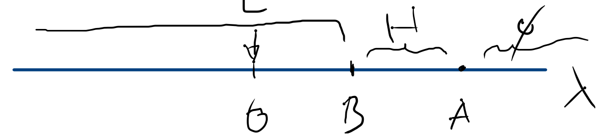
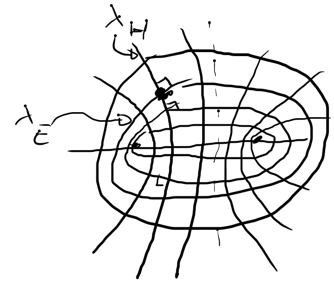
5. Sean $A, B > 0$. Demustra que para todo $\lambda < A$, $\lambda \neq B$, las cónicas

$$\frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} = 1$$

tienen los mismos focos.

Corregir $A > B$.





$(x, y) \longrightarrow \boxed{(\lambda_E, \lambda_H)}$

"coord. elípticas"

3. Cierto o Falso:

a) La imagen de una recta en $\mathbb{R}^2$ bajo una transformación lineal invertible es una recta.

b) La imagen de una elipse en $\mathbb{R}^2$ bajo una transformación lineal invertible es una elipse.

c) La imagen de un círculo en $\mathbb{R}^2$ bajo una transformación lineal invertible es un círculo.

a) Cierto. $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, $T^{-1}(x',y') = (a'x'+b'y', c'x'+d'y')$

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$Ax + By = C$$

$$L = \{(x,y) \mid Ax + By = C\}$$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\cup$

L

$$T(L) = \{T(x,y) \mid (x,y) \in L\}$$

(x',y')

$$!! = \{(x',y') \mid T^{-1}(x',y') \in L\}$$

$$= \{(x',y') \mid (a'x'+b'y', c'x'+d'y') \in L\}$$

$$= \{(x',y') \mid A(a'x'+b'y') + B(c'x'+d'y') = C\}$$

$$(x',y') = T(x,y) \quad / \; T^{-1}:$$

$$T^{-1}(x',y') = (x,y).$$

$y = f(x) = x^2$, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$f^{-1}(x^2) = f^{-1}(y) = x$

$$\underbrace{(Aa' + Bc')}_{A'}x' + \underbrace{(Ab' + Bd')}_{B'}y = C$$

$$A'x' + B'y' = C$$

Nota: $(A', B') \neq (0,0)$

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$a'd' - b'c' \neq 0$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertible $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} a' & d' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ invertible (ej.)

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

círculo.

d) Para toda forma cuadrática Q existe una transformación lineal simétrica L tal que $Q(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, L\mathbf{v} \rangle$.

Lin b:

$$Q(x,y) = E x^2 + 2F xy + G y^2$$

$$\overset{?}{=} \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ax + by \\ cy + dy \end{pmatrix} \right\rangle = x(ax + by) + y(cx + dy)$$

$$= ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Toma $L = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.

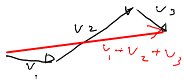
Por ejemplo: $E = \{ v \mid \langle v, Sv \rangle = 1 \}$

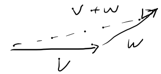
$$T(E) = \{ \underbrace{Tv}_{w} \mid \langle v, Sv \rangle = 1 \} = \{ w \mid \langle T^{-1}w, ST^{-1}w \rangle \}$$

$$= \{ w \mid \langle v, \underbrace{TST^{-1}}_{\text{sim.}} w \rangle = 1$$

$$v = T^{-1} w$$

2. Tres vectores en $\mathbb{R}^2$ tienen la misma norma y su suma se anula. Demuestra que forman los vértices de un triánguo equilatero.

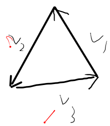


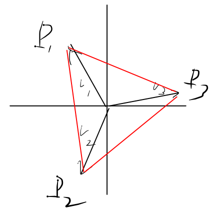


Dado: P_1, P_2, P_3

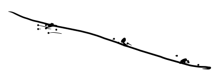
① $\|P_1\| = \|P_2\| = \|P_3\| = \lambda$

② $P_1 + P_2 + P_3 = 0$





P.D. $\|P_1 - P_2\| = \|P_2 - P_3\| = \|P_3 - P_1\|$

(Cor: P_1, P_2, P_3 no son colineales. )

$$\|P_1 - P_2\|^2 = \langle P_1 - P_2, P_1 - P_2\rangle = \|P_1\|^2 + \|P_2\|^2 - 2\langle P_1, P_2\rangle.$$

$$= 2\lambda^2 - 2(P_1, P_2)$$

P.D. $(P_1, P_2) = (P_2, P_3) = (P_3, P_1)$.

$\langle P_i, P_j\rangle = P_{ij}$

$$② \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 + P_{12} + P_{31} = 0 & Eq_1 \\ \lambda^2 + P_{23} + P_{12} = 0 & Eq_2 \\ \lambda^2 + P_{31} + P_{23} = 0 & Eq_3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} Eq_1 - Eq_2 \Rightarrow P_{31} = P_{23} \\ Eq_2 - Eq_3 \Rightarrow P_{12} = P_{31} \\ Eq_1 - Eq_3 \Rightarrow P_{12} = P_{23} \end{array}\right\} \Rightarrow P_{12} = P_{23} = P_{31}.$$

QED

Reflexión por una recta