Tarea núm. 8

(Para el jueves 13 oct, 2021)

Definiciones

- Un *curva cuadrática* en $\mathbb{R}^2$ es un conjunto dado por una ecuación cuadrática de la forma $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde $A,\ldots,F\in\mathbb{R}$ y donde A, B ó $C\neq 0$.
- Una *elipse* es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Los puntos fijos se llaman *focos*. El *centro* de la elipse es el punto medio de los dos focos.
- Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, es constante. Los puntos fijos se llaman *focos*. El *centro* de la hipérbola es el punto medio de los dos focos.
- Una *parábola* es el lugar geométrico de los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo es igual a su distancia a una recta fija (que no pasa por el punto). El punto fijo se lllama *foco* y la recta fija se llama *directriz*.

Algunas proposiciones vistas en clase

- Toda elipse es una curva cuadrática. Si los focos son $(\pm c,0)$ y la suma de distancia a los focos es $2a$ la elipse está dada por $(x/a)^2+(y/b)^2=1$, donde $b^2=a^2-c^2$.

  Nota: Las distancias a,b se llaman los *semi-ejes mayor y menor* (resp.). Los puntos $(\pm a,0),(0,\pm b)$ son los *vertices* de la elipse, cuando $a\neq b$. Un círculo es un caso especial de elipse, cuando los dos focos coinciden.
- Toda hipérbola es una curva cuadrática. Si los focos son $(\pm c,0)$ y la diferencia de distancia a los focos es $2a$ la hipérbola está dada por $(x/a)^2-(y/b)^2=1$, donde $b^2=c^2-a^2$.

  Nota: Las rectas $x/a=\pm y/b$ son las *asíntotas* de la hipérbola.
- Toda parábola es una curva cuadrática. Si el foco es $(c,0)$, $c\neq 0$, y la directriz $x=-c$ entonces la parábola está dada por $y^2=4cx$.

  Nota: $|c|$ es la distancia focal; $(0,0)$ es el vértice, la recta que pasa por el vértice y el foco (el eje de x para $y^2=4cx$) es el eje de la parábola.

Problemas

1. Encuentra una ecuación cuadrática para la elipse (a) con focos $(\pm 1,0)$ y que pasa por $(1,1)$; (b) con focos en $(0,\pm 1)$ y con semi-eje menor 1; (c) con un foco en el origen $(0,0)$, el otro foco a su derecha (sobre el eje de x), semi-eje mayor 2 y semi-eje menor 1.
2. Encuentra el foco y la directriz de la parábola $y=x^2$.
3. Encuentra los focos y asíntotas de la hipérbolas (a) $x^2-2y^2=3$; (b) $xy=3$; (c) $(x-1)y=3$.
4. Encuentra las ecuaciones de las tangentes a la elipse $x^2+2y^2=1$ que pasan por $(2,1)$.

   Sugerencia: busca las ecuaciones de la forma $y=m(x-2)+1$ (son las rectas no verticlaes que pasan por $(2,1)$). Tal recta tiene una sola intersección con la elipse si y solo si la descriminante de la ecuación cuadrática (para x) que se obtiene al sustituir $y=m(x-2)+1$ en la ecuación de la elipse se anula. Esto da una ecuación cuadrática para m.