Geometría diferencial de curvas en el plano

Profesor: Gil Bor, CIMAT, Guanajuato, *gil@cimat.mx*

Duración del curso: 4 sesiones de 1 hora

Dirigido a: estudiantes desde el 3er año de licenciatura (alumnos que han tomado curso de cálculo vectorial).

Fechas y lugar: 5-9 jun 2023, Escuela temática de geometría y topología, CIMAT, Gto.

Descripción: es una introducción a la geometría diferencial de curvas con pocas definiciones, muchos ejemplos y resultados bonitos: la envolvente de una familia de curvas, la evoluta e involuta, el Teorema de los 4 vértices, el teorema de los círculos anidados de Tate-Knesser, las curvas clásicas: braquistócrona, catenaria, tractrix, astroide…

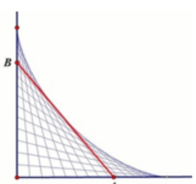
Los pre-requisitos para poder seguir el curso son un curso de cálculo vectorial a nivel licenciatura (cálculo de varias variables) más curiosidad y mente abierta para ideas nuevas.

---

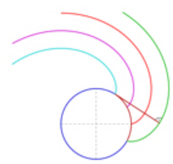
1. Resumen de la primera sesión

1.1. Galería de curvas

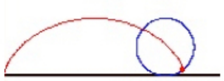
Catenaria



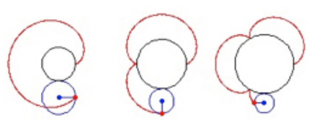
Astroide



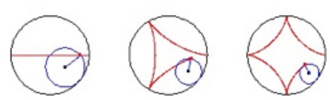
Ivolutas de un círculo



Cicloide



Epi-cicloide



Hipo-cicloide

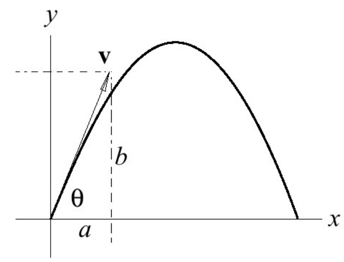
1.2. La zona segura de los fuegos artificiales

Consideramos la familia de las trayectorias de objetos (cohetes) que se lanzan desde un punto, con velocidad inicial fija, en todas las direcciones posibles.

¿Qué forma tiene la “envolvente” de todas estas trayectorias?

Respuesta: una parábola.

Derivación. Ubicamos el punto de lanzamiento de los objetos en el origen de un plano vertical (el plano xy). Si el vector de velocidad inicial es $\mathbf{v} = (a, b)$, con $v = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = const.$, las trayectorias, parametrizadas por t, están dadas por



$$x = at, \quad y = -\frac{t^2}{2} + bt,$$

(suponiendo que la aceleración de gravedad es 1; esto podemos hacer escogiendo la unidad de tiempo adecuadamente).

Eliminando la t de las dos ecuaciones, y usando $\tan\theta = b/a$, obtenemos

$$y = -\frac{x^2}{2v^2}(1 + \tan^2\theta) + x(\tan\theta).$$

Esta es una parábola P_θ en el plano xy (sus coeficientes dependen del ángulo de lanzamiento θ).

Denotamos por $\mathcal{E}$ la envolvente de la familia de parábolas $\{P_\theta\}$. Aquí está una derivación de una ecuación para $\mathcal{E}$, algo informal (para más detalles pueden consultar por ejemplo el libro de Courant y John, Cálculo vectorial, vol. 2).

Escribimos primero la ecuación de P_θ en la forma

$$F(x, y, \theta) = y + \frac{x^2}{2v^2}(1 + \tan^2\theta) - x(\tan\theta) = 0.$$

Luego, parametrizamos la envolvente $\mathcal{E}$ por el parámetro θ de la curva P_θ que toca a $\mathcal{E}$; es decir, $F(x(\theta), y(\theta), \theta) = 0$. Tomando la derivada de la última ecuación con respecto a θ, obtenemos (con la regla de la cadena) $F_x x' + F_y y' + F_\theta = 0$. Luego, el vector de velocidad $(x'(\theta), y'(\theta))$ es *tangente* a P_θ en el punto $(x(\theta), y(\theta))$, por lo que es *perpendicular* a la gradiente de la función que define a P_θ en el punto $(x(\theta), y(\theta))$; esto es, $F_x x' + F_y y' = 0$. Restando esta ecuación de $F_x x' + F_y y' + F_\theta = 0$, obtenemos $F_\theta = 0$.

En resumen, la ecuación para $\mathcal{E}$ se obtiene al eliminar la θ del par de ecuaciones en tres variables

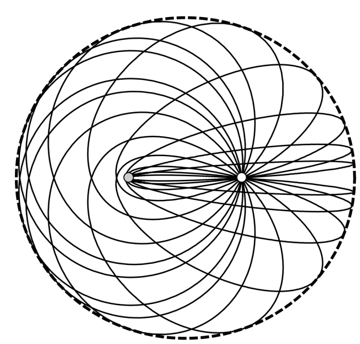
$$F(x, y, \theta) = 0, \quad F_\theta(x, y, \theta) = 0.$$

En nuestro caso, la ecuación $F_\theta = 0$ da $\tan(\theta) = v^2/x$. Sustituyendo en $F = 0$, la ecuación de $\mathcal{E}$ es

$$y = -\frac{x^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2}.$$

Esta es la ecuación de una parábola, con foco en el origen, cuyo "ancho" (en $y = 0$, el *latus rectum*) es $2v^2$ y su "altura" (la distancia focal) es $v^2/2$ (4 veces más ancha que alta); o sea, la "forma" de la envolvente $\mathcal{E}$ es independiente de la v!

Nota. En realidad, el "tiro parabólico" es una aproximación al tiro verdadero, en donde la aceleración de gravedad no es constante, sino varía con la distancia al centro de la tierra (inversamente proporcional al cuadrado de la distancia). Las trayectorias resultan ser entonces *elipses* en lugar de parábolas (para v no muy grande, $v < v_{esc} \approx 40{,}000$ kmh), con uno de sus focos en el centro de la tierra (el otro depende del ángulo θ de lanzamiento). La envolvente de la familia de las trayectorias en este caso resulta ser una elipse (muy grande), con un foco en el centro de la tierra y otro foco en el punto de lanzamiento.



Ejercicio 1. Demuestra la afirmación del último párafo.

Sugerencia: la familia de las trayectorias tiene el mismo tamaño de eje mayor.

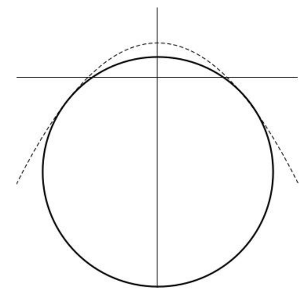
1.3. Una derivación alternativa de la ecuación de $\mathcal{E}$ (sin cálculo!)

Imaginamos lanzando todos los cohetes al mismo tiempo desde el origen $(0,0)$ en todas las direcciones posibles, con la misma velocidad inicial v. Después de un tiempo t, estarán sobre la curva dada por

$$x = at, \quad y = -\frac{t^2}{2} + bt, \quad a^2 + b^2 = v^2.$$

Despejando las a y b de las primeras dos ecuaciones y sustituyendo en la tercera, obtenemos

$$x^2 + \left(y + \frac{t^2}{2}\right)^2 = (vt)^2.$$



Esta es la ecuación de un *círculo*, centrado en $(0, -t^2/2)$ y con radio vt. Así que el centro del círculo está "cayendo" al mismo tiempo que su radio crece. Al principio, cuando $0 \le t \le 2v$, tenemos $vt - t^2/2 > 0$, así que una parte del círculo alcanza subir arriba del eje de x. Pero depués, cuando $t > 2v$, el círculo se queda totalmente debajo del eje de x.

Luego, los puntos (x, y) dentro de la envoltura $\mathcal{E}$ están alcanzados *dos* veces por los cohetes, los de afuera (de la "zona segura") nunca se alcanzan, así que los puntos de $\mathcal{E}$ son exactamente los que se alcanzan una sola vez. Es decir, son los puntos (x, y) para los cuales la ecuación $x^2 + (y + t^2/2)^2 = (vt)^2$ tiene una sola solución $t \ge 0$. Luego, esta es una ecuación cuadrática en t^2, cuya descriminante es $v^4 + 2v^2y - x^2$. Esto se anula justo cuando $y = (v^2 - x^2/v^2)/2$. □

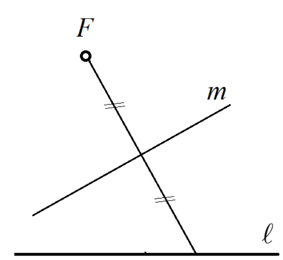
Ejercicio 2. Deriva la ecuación de la envolvente de la familia de los segmentos de lineas rectas de longitud 1 que conectan un punto del eje de x con un punto del eje de y. (Repsuesta: el astroide $x^{3/2} + y^{3/2} = 1$. En la "galería de curvas" arriba se muestra la parte de esta curva en el cuadrante positivo).

Ejercicio 3. Encuentra el lugar geométrico de los centros de los segmentos del ejercicio anterior. Intenta dibujar esta curva *antes* de hacer la cuenta!

Ejercicio 4. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que dividen los segmentos del ejercicio anterior en una proporción fija.

Ejercicio 5. Fijamos un punto F y una recta ℓ en el plano. Encuentra la envolvente de las mediatrices m de los segmentos que conectan F con ℓ.

(Respuesta: es la parábola con foco F y directriz ℓ. Este ejercicio da un método práctico para construir una parábola con origami.)



Ejercicio 6. Encuentra una construcción similar para una elipse.