Notas núm. 2

1. Orden de contacto de dos curvas

Nota. Ejercicios marcados cos estrella * son menos elementales (opcionales).

Tomamos una curva suave C en el plano. La *recta tangente* a la curva en un punto $c \in C$ es la recta que es "la mejor aproximación" a C alrededor de c. Una manera de hacer precisa la noción de "la mejor aproximación" es usar series de Taylor.

Definición (Orden de contacto). Consideramos dos curvas $C, \widetilde{C}$, dadas como las gráficas de dos funciones $y = f(x)$, $y = \tilde{f}(x)$ (resp.). Decimos que $c = (x_0, y_0) \in C \cap \widetilde{C}$ es un *punto de contacto de orden* k si los primeros $k+1$ términos de las series de Taylor de f y $\tilde{f}$ alrededor de $x = x_0$ coinciden:

$$f(x_0) = \tilde{f}(x_0),\ f'(x_0) = \tilde{f}'(x_0),\ \ldots,\ f^{(k)}(x_0) = \tilde{f}^{(k)}(x_0).$$

Por ejemplo, si la serie de Taylor de f alrededor de x_0 es

$$f(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots,$$

Entonces la recta $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$ tiene un contacto con C en c de orden ≥ 1, y este requisito determina a esta recta, llamada la *recta tangente* a C en c.

Por ejemplo, la recta tangente a la gráfica de $y = x^2$ en el origen $(0, 0)$ es el eje de x ($y = 0$) y la recta tangente en $(1, 1)$ está dada por $y = 1 + 2(x - 1) = 2x + 1$.

A veces sucede que la recta tangente a una curva en un punto tiene un contacto con la curva de orden mayor al esperado, o sea ≥ 2.

Definición. Un *punto de inflexión* de una curva es un punto en donde la recta tangente en este punto tiene orden de contacto ≥ 2 con la curva.

Si la curva es la gráfica de una función $y = f(x)$ esto sucede en los punto $(x_0, f(x_0))$ tal que $f''(x_0) = 0$.

Por ejemplo, el único punto de inflexión de la gráfiica de $y = x^3$ es el origen $(0, 0)$.

Ejercicio 1. Encuentra los puntos de inflexion de la gráfica de $y = \operatorname{sen}(x)$. Hacer un dibujo.

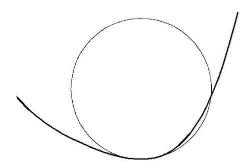
Ejercicio 2. Si estas manejando en una carretera con muchas curvas, ¿cómo de das cuenta que estas en un punto de inflexión? (Sugerencia: piensa en el volante.)

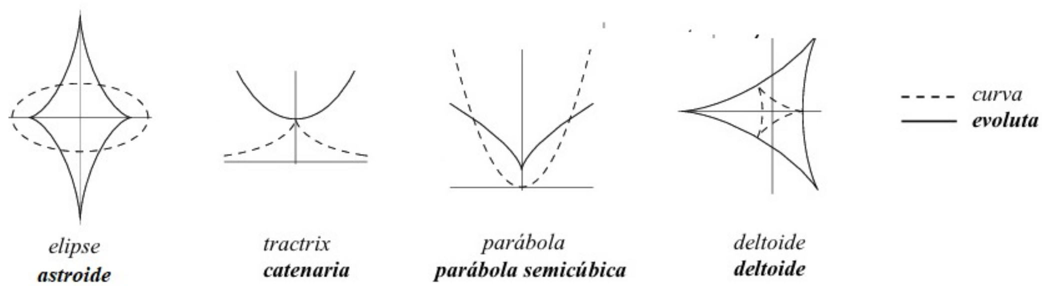
Ejercicio 3. Sea $p(x) = (x - 1)^{100}(x - 2)^{200}$. Encuentra los puntos de contacto de la gráfica de $y = p(x)$ con el eje de x y su orden.

Ejercicio 4.* Demuestra que la noción de "punto de conacto de orden k" es invariante bajo difeomorfismos (cambio de coordenadas). Es decir, c es un punto de contaco de orden k de C con $\widetilde{C}$ si y solo si $\Phi(c)$ es un punto de contacto de orden k de $\Phi(C)$ con $\Phi(\widetilde{C})$, donde $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo (una biyección suave con inversa suave, así que $\det(D\Phi)$ no se anula).

2. El círculo osculante, curvatura, vértices

Definición/proposición Si $c \in C$ no es un punto de inflexión, existe un único círculo con contacto de orden 2 con C en c, llamado el *círculo osculante* de C en c. El radio R del círculo osculante en c se llama el *radio de curvatura* en c, y su centro se llama el *centro de curvatura*. El recíproco $\kappa = 1/R$ se llama la *curvatura* de C en c (definimos $\kappa = 0$ en un punto de inflexión). El lugar geométrico de todos los centros de curvatura de C se llama la *evoluta* de C.





Nota que el círculo osculante en c es tangente a la curva.

Por ejemplo, el círculo osculante de la parábola $y = x^2$ en $c = (0,0)$ es tangente al eje de x en $(0,0)$ así que está dado por una ecuación tipo

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

Para determinar la R, tomamos dos veces la derivada (implícita) con respecto a x de la última ecuación, obteniendo $2x + 2(y - R)y' = 0$ y luego $2 + 2(y')^2 + 2(y - R)y'' = 0$. Sustituyendo $x = 0$ y usando $y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 2$, obtenemos $R = 1/2$, o sea $\kappa = 2$.

Ejercicio 5. (a) El círculo osculante a $y = x^2$ en $(0,0)$ tiene contacto de orden 3 (en lugar del esperado, 2). (b) Es el único punto de la curva en donde esto sucede.

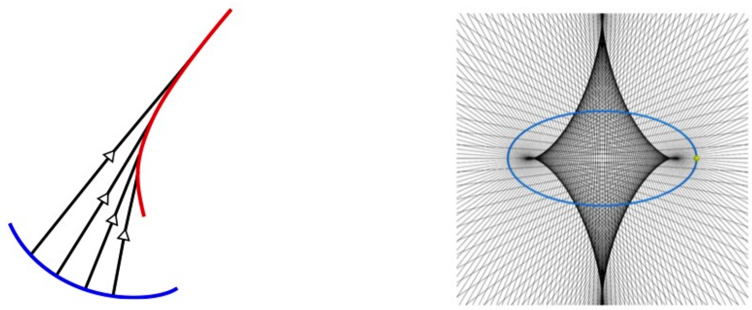
Definición. Un *vértice* de una curva es un punto en donde el círculo osculante tienen contacto de orden ≥ 3 con la curva.

Ejercicio 6.* Un vértice es un punto crítico de la curvatura, $\kappa' = 0$ (en nuestro ejemplo de de la parábola es un punto máximo de la curvatura).

Ejercicio 7. (a) Si C es la gráfica de $y = f(x)$ y $f'(x_0) = 0$ entonces $\kappa = 1/R = f''(x_0)$. (b)* Más general, $\kappa = f''(x_0)/(1 + f'(x_0)^2)^{3/2}$.

Ejercicio 8. Encuentra una fórmula para el radio y el centro del círculo osculante de la parábola $y = x^2$ en el punto (t, t^2). Eliminando t de las fórmulas para el centro del cículo osculante, encuentra una ecuación para la evoluta de la parábola. Dibuja los círculos osculantes en $(0,0)$, $(1,1)$. Verifica que el primero está contenido es el segundo (un caso especial del Teorema de Tait-Kneser, más adelante).

Ejercicio 9. La evoluta de una curva es la envolvente de la familia de las rectas normales (perpendiculares) de la curva.



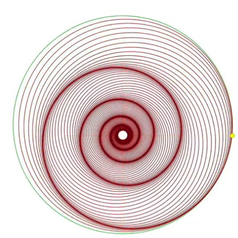
Izquierda: la curva roja es la evoluta de la azul y la curva azul es la involuta de la curva roja; las rectas normales de la curva azul son las rectas tangenes de la roja. Derecha: la evoluta de una elipse (azul) como la envolvente de sus rectas normales. (Fuente de las figuras: *Osculating curves: around the Tait-Kneser Theorem*, de E. Ghys, S. Tabachnikov, V. Timorin.)

Ejercicio 10. Usando el último ejercicio, vuelva a determinar la ecuación de la evoluta de la parábola. También encuentra la ecuación de la evoluta de la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, donde $a > b > 0$.

Ejercicio 11.* Los vértices de una curva correponden a las *cúspides* ('picos') de su evoluta. Es decir, los puntos donde la evoluta no es suave.

3. Dos teoremas

Teorema (Tait-Knesser, approx 1900). *Los círculos osculantes a lo largo de una curva sin vértices no se intersectan.*



Es decir, si la curva está parametrizada por t con radio de curvatura creciente, $R'(t) > 0$, con $t_1 < t_2$, entonces el círculo osculante $\widetilde{C}_{t_1}$ está *contenido* en el círculo osculante $\widetilde{C}_{t_2}$.

En la referencia citada en la capura de la figura anterior se encuentra una demostración elemental. Otra demostración, novedosa, se encuentra en el artículo *Variations on the Tait-Kneser theorem*, de G. Bor, C. Jackman y S. Tabachnikov.

Paradoja. Si $R' > 0$, los círculos osculantes $\widetilde{C}_t$, $t_1 \leq t \leq t_2$, forman una "foliación" del área entre los dos círculos (un anillo), tal que la curva atraviesa el anillo desde el perímetro interior al exterior, siendo tangente en todo punto a las "hojas de la folicación" (los círculos osculantes), pero sin embargo no es ninguna de ellas!

La explicación a esta "paradoja" es que la foliación del anillo por los círculos osculantes *no es diferenciable* a lo largo de la curva. Dicho de otra forma, la función R, definida en el anillo, no es diferenciable a lo largo de la curva (más preciso, su derivada parcial en la dirección perpendicular a la curva no existe).

El teorema de los 4 vértices. *Toda curva cerrada simple en el plano tiene por lo menos 4 vértices (puntos críticos de la curvatura, donde $\kappa' = 0$).*

Ejercicio 12. Usando este teorema, ¿qué puedes concluir acerca de la evoluta de tal curva?

Aquí demostramos el teorema solamente para una curva *convexa* (cada segemento conectando dos puntos de la curva queda em dentro de la curva).

Demostración. Una curva cerrada C es compacta, así que κ tiene por lo menos dos punto cr'ticos, $c_{min}, c_{max} \in C$. Demostramos que en algunos de los dos arcos de C que conectan c_{min} con c_{max} ocurre un mínimo local, por lo que ocurre tambien un máximo local. Si esto no es cierto, entonces κ es una función *monótona* a lo largo de cada uno de estos dos arcos (creciente o decreciente, dependiendo del sentido de la parametrización de la curva). Ubicamos ahora la curva en el plano de coordenadas xy tal que c_{min} y c_{max} esten sobre el eje de x y parametrizamos la curva por longitud de arco s, $0 \leq s \leq L$. Entonces tenemos $\kappa' \geq 0$ para $y \geq 0$ y $\kappa' \leq 0$ para $y \leq 0$. Así que $\kappa' y \geq 0$ a lo largo de la curva. Ahora integramos $\kappa' y$ alrededor de la curva y obtenemos

$$0 \leq \int_0^L \kappa' y = \kappa y \Big|_0^L - \int_0^L \kappa y'.$$

Luego $\kappa y \Big|_0^L = 0$ (por ser curva cerrada) y $\kappa y' = x''$, por las ecuaciones de Frenet-Serret. Así que

$$0 \leq \int_0^L \kappa' y = -\int_0^L x'' = -x' \Big|_0^L = 0.$$

Concluimos que $\kappa' y = 0$ identicamente, por lo que $\kappa' = 0$, ya que y se anula solo en c_{min} y c_{max}. $\square$