LISTA DE EJERCÍCIOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

1. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \hookleftarrow$ una aplicación continua. Muestre que equivalen:
   (a) f es transitiva.
   (b) $\forall U, V \subseteq X$ abiertos no vacíos $\exists N > 0, \;\; f^N(U) \cap V \neq \emptyset$.

2. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y $f : X \hookleftarrow$ continua. Decimos que f es *topológicamente mixing* si para todo par de abiertos no vacíos $U, V \subset X$ existe $N > 0$ tal que para todo $n > N$, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
   (a) Muestre que si f es topológicamente mixing entonces f es transitiva.
   (b) Sea $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ y $\sigma : \Sigma_A \hookleftarrow$ el shift de tipo finito correspondiente. Muestre que
      (i) $\sigma : \Sigma_A \hookleftarrow$ es topológicamente mixing si y sólo si existe $N > 0$ tal que $A^N > 0$.
      [i.e. $(A^N)_{ij} > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$].
      (ii) $\sigma : \Sigma_A \hookleftarrow$ es transitivo sii para todo par $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ existe $N > 0$ tal que $(A^N)_{ij} > 0$.
   (c) Encuentre una matriz A tal que $\sigma : \Sigma_A \hookleftarrow$ sea transitivo pero no topológicamente mixing.
   (d) De los siguientes ejemplos ¿cuáles son topológicamente mixing y cuáles son transitivos?
      (i) Rotación racional del círculo.
      (ii) Rotación irracional del círculo.
      (iii) $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^2$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.
      (iv) Tiempo 1 de un flujo irracional en el toro (suspensión de una rotación irracional).
      (v) Una órbita periódica.

3. Muestre que los shifts de tipo finito con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad B \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   son conjugados.

4. Demuestre que una rotación irracional del círculo es únicamente ergódica.

5. Demuestre que la entropía toplógica $h_{top}(\sigma)$ de un shift de tipo finito $\sigma : \Sigma_A \hookleftarrow$, es $h_{top}(\sigma) = \log(\lambda)$, donde λ es el mayor autovalor (positivo) de la matriz A. Muestre también que para un shift depo finito, el crecimiento exponencial de la cantidad de puntos periódicos es igual a la entropía topológica:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \#\{x \in \Sigma_A \,|\, \sigma^n(x) = x\,\} = h_{top}(\sigma).$$

6. Sea (X, d) un espacio métrico compacto, $(\mathcal{B}, \mu)$ una probabilidad Boreliana en X y $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \hookleftarrow$ una transformación que preserva medida. Decimos que (T, μ) es *mixing* (fuertemente) si para cualquier par de conjuntos medibles $A, B \in \mathcal{B}$, se tiene que[1]

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\,\mu(B).$$

   (a) Muestre que si (T, μ) es mixing entonces (T, μ) es ergódica.
   (b) Sea $\sigma : \Sigma_2^+ \hookleftarrow$ el shift completo positivo (se llama "de Bernoulli") de dos símbolos, i.e. $\Sigma_2^+ = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\geq 0} \,|\, x_n \in \{0, 1\}\,\}$. Sea μ la probabilidad de los (infinitos) tiros independientes de moneda: la probabilidad de un cilindro de tamaño n es 2^{-n}:

$$\mu([a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}]) = 2^{-n},$$

   donde $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}] := \{x \in \Sigma_2 \,|\, x_{i_1} = a_{i_1}, \dots, x_{i_n} = a_{i_n}\,\}$. Muestre que (T, μ) es mixing y por tanto ergódica. (Sug. pruebe que es mixing para cilindros y luego aproxime Borelianos por cilindros).
   (c) Muestre que Lebesgue casi todo punto del intervalo $[0, 1]$ continene la secuencia 567 infinitas veces en su expansión decimal.
   (d) Muestre que para Lebesgue casi todo $x \in [0, 1[$, si $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$ es su expansión decimal, entonces

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \#\Big\{1 \leq n \leq N \,\Big|\, x_n = 5,\ x_{n+1} = 6,\ x_{n+2} = 7\Big\} = \frac{1}{1000}.$$

[1] es decir, los conjuntos $T^{-n}(A)$ y B son asintóticamente independientes.