AUTOMORFISMOS LINEARES DO TORO E DINÂMICA SIMBÓLICA

GONZALO CONTRERAS

Apresentamos nestas notas um exemplo clásico de dinâmica hiperbólica. O toro de dimensão 2 pode ser visto como o grupo (aditivo) quociente $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Isto é o mesmo que vê-lo como o quadrado $[0,1]^2$, identificando os lados por $(x,0) \equiv (x,1)$, $(0,y) \equiv (1,y)$. Seja $A \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ uma matriz 2×2 com coeficientes inteiros com determinante $\det A = +1$ e com autovalores de módulo diferente de 1. Então $(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$ e por tanto a aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ com matriz A define um homomorfismo F do grupo aditivo $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, dado por $F\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{Z}^2\right) = A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{Z}^2$. Além disso, como $\det A = 1$, teremos que A^{-1} também têm entradas inteiras e define a inversa F^{-1} no quociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, em particular, F é bijetora.

No toro podemos definir distâncias, ângulos e áreas usando as medidas correspondentes em $\mathbb{R}^2$ e a projeção canônica $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $\pi(\overline{x}) = \overline{x} + \mathbb{Z}^2$. Também podemos dar ao Toro uma estrutura diferenciável dizendo que uma função $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua, diferenciável, etc, se seu levantamento $\tilde{f} := f \circ \pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua, diferenciável, etc.

Sejam λ, μ os autovalores da matriz A. Sendo que $|\lambda|, |\mu| \neq 1$ e $\lambda\mu = \det A = 1$, se $|\lambda| \geq |\mu|$, teremos que $|\lambda| > 1 > |\mu|$. Por simplicidade, suponhamos que $\lambda > 1 > \mu > 0$, o outro caso (autovalores reais negativos) é parecido a este. Sejam $\mathbb{E}^u = E_\lambda \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}^s = E_\mu \subset \mathbb{R}^2$ os espaços próprios de A.

Vejamos que as retas $\mathbb{E}^u$, e $\mathbb{E}^s$ têm inclinação irracional. Consideremos as suas projeções $W^u(0) = \pi(\mathbb{E}^u)$, $W^s(0) = \pi(\mathbb{E}^s)$. Estas são curvas conexas que têm inclinação irracional no Toro, logo só podem ser curvas fechadas simples e conexas (se a inclinação for racional) ou curvas infinitas sem autointerseção em $\mathbb{T}^2$ (se a inclinação é irracional). Provaremos agora pelo absurdo que o primeiro caso não pode acontecer. Observemos que F é uma contração em $W^s(0)$ e uma expansão em $W^u(0)$.

$$d(F(x), F(y)) = \mu\, d(x,y) \text{ para } x, y \in W^s(0),\ d(x,y) < 1\,,$$

$$d(F(x), F(y)) = \lambda\, d(x,y) \text{ para } x, y \in W^u(0),\ d(x,y) < \frac{1}{\lambda}\,.$$

Definimos agora as *variedades estáveis* W^s e as *variedades instáveis* W^u de outros pontos do Toro. Para $x \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, sejam

$$W^s(x) = \left\{\, y \in \mathbb{T}^2 \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(F^n x, F^n y) = 0 \,\right\},$$

$$W^u(x) = \left\{\, y \in \mathbb{T}^2 \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(F^{-n} x, F^{-n} y) = 0 \,\right\}.$$

Deixamos ao leitor verificar que $W^s(x) = \pi(x + \mathbb{E}^s)$, $W^u(x) = \pi(x + \mathbb{E}^u)$ e que por tanto são curvas infinitas de inclinação irracional em $\mathbb{T}^2$, sem autointerseções. O conjunto de todas as variedades estáveis $\mathcal{F}^s = \{W^s(x) \,|\, x \in \mathbb{T}^2\}$ forma a *folheação estável*, similarmente a *folheação instável* é $\mathcal{F}^u = \{W^u(x) \,|\, x \in \mathbb{T}^2\}$. Estas folheações são transversais e cada uma das suas folhas $W^s(x)$, $W^u(x)$ tem inclinação constante.

Identificando $\mathbb{R}^2$ com o plano tangente a $\mathbb{T}^2$ em x, observemos que a derivada de F é $DF(x) = A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. A reta tangente a $W^s(x)$ em x nesta identificação é $T_xW^s(x) = \mathbb{E}^s \subset \mathbb{R}^2$, também $T_xW^u(x) = \mathbb{E}^u \subset \mathbb{R}^2$. Os automorfismos lineares do Toro são o exemplo mais simples de difeomorfismos de Anosov. Um difeomorfismo f de uma variedade compacta M, $f : M \to M$ é *Anosov* se em todo ponto $p \in M$ existe uma decomposição do espaço tangente $T_pM = \mathbb{E}^s(p) \oplus \mathbb{E}^u(p)$ em dois subespaços transversais $\mathbb{E}^s(p)$, $\mathbb{E}^u(p)$ tais que

(i) Esta decomposição é contínua.
(ii) A decomposição é invariante pela derivada de f:
$$Df(p)(\mathbb{E}^s(p)) = \mathbb{E}^s(f(p)), \quad Df(p)(\mathbb{E}^u(p)) = \mathbb{E}^u(f(p)).$$
(iii) Existem números $C, \gamma > 0$ tais que
$$\|Df^n(p) \cdot v_p\| \le C\,\mathrm{e}^{-\gamma n}\,\|v_p\| \text{ para todo } v_p \in \mathbb{E}^s(p).$$
$$\|Df^{-n}(p) \cdot w_p\| \le C\mathrm{e}^{-\gamma n}\,\|w_p\| \text{ para todo } w_p \in \mathbb{E}^u(p).$$

Todo difeomorfismo de Anosov têm um par de folheações transversais $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$ tais que suas folhas têm como espaços tangentes os subsepaços $\mathbb{E}^s$, $\mathbb{E}^u$ respectivamente. Além disso, para N grande (para compensar a constante C em (iii)) o difeomorfismo f^N contrae as folhas estáveis $W^s(p)$ e expande as folhas instáveis $W^u(p)$. As folhas estáveis $W^s(p)$ são copias de $\mathbb{R}^s$ immersas em M, onde $s = \dim E^s(p)$, similarmente para $W^u(p)$.

A única superfície compacta orientável que admite um difeomorpfismo de Anosov é o Toro $\mathbb{T}^2$, pois é a única superfície que admite um campo de líneas $\mathcal{F}^s$ (ou $\mathcal{F}^u$) (de fato, o Toro é a única superfície com característica de Euler nula).

Mostraremos agora uma partição de Markov para o automorfismo do Toro com matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Para isto precisamos de algumas definições. Dado $\varepsilon > 0$, a *variedade estável local* $W^s_\varepsilon(p)$ e a *variedade instável local* $W^u_\varepsilon(p)$ de um ponto $p \in \mathbb{T}^2$ se definem como

$$W^s_\varepsilon(p) = \left\{ q \in \mathbb{T}^2 \;\middle|\; d(F^n(p), F^n(q) < \varepsilon \text{ para todo } n \ge 0 \right\},$$
$$W^u_\varepsilon(p) = \left\{ q \in \mathbb{T}^2 \;\middle|\; d(F^{-n}(p), F^{-n}(q)) < \varepsilon \text{ para todo } n \ge 0 \right\}.$$

Um *retângulo* $\mathcal{R}$ é um conjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{T}^2$ tal que

(i) $\mathcal{R} = \text{fecho}(\text{interior}(\mathcal{R}))$.
(ii) A fronteira $\partial\mathcal{R}$ se decompõe em $\partial\mathcal{R} = \mathcal{R}^s \cup \mathcal{R}^u$ onde $\mathcal{R}^s \subseteq$ variedades estáveis locais, e $\mathcal{R}^u \subseteq$ variedades instáveis locais. Com maior precisão, se $x \in \mathcal{R}^s$ então a (componente conexa de x em $\mathcal{R}^s$) $\subseteq W^s_\varepsilon(x)$.

Uma *partição de Markov* é uma coleção finita de retângulos $\{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_N\}$ tais que

(i) $\mathbb{T}^2 = \cup_{i=1}^N \mathcal{R}_i$.
(ii) Os R_i's têm interiores disjuntos.

(iii) [*Condição de Markov*] Se $x \in \mathcal{R}_i \cap f^{-1}(\mathcal{R}_j) \neq \emptyset$, então

$$\mathcal{R}_j \cap W^u_\varepsilon(fx) \subseteq f(\mathcal{R}_i \cap W^u_\varepsilon(x)),$$
$$f(\mathcal{R}_i \cap W^s_\varepsilon(x)) \subseteq \mathcal{R}_j \cap W^s_\varepsilon(fx).$$

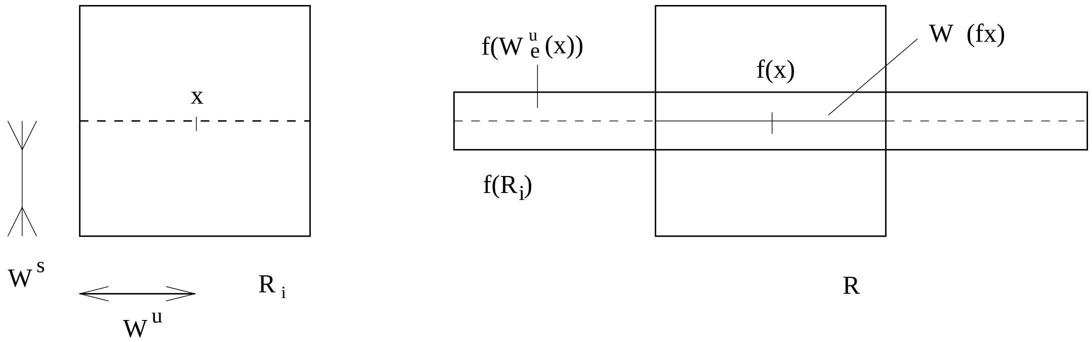


Figura 1.

Seja $\mathbb{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $F : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ o automorfismo do Toro com matriz $\mathbb{A}$. A imagem do domínio fundamental $[0,1[^2$ é o paralelogramo de vértices $\mathbb{A}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbb{A}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbb{A}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbb{A}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. A figura 2 mostra gráficamente que $F(\mathbb{T}^2) = \mathbb{T}^2$.

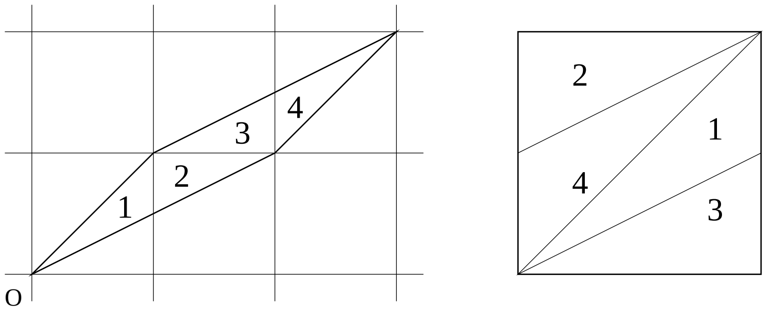


Figura 2.

Consideremos os espaços próprios $\mathbb{E}^s$, $\mathbb{E}^u$ e definamos os paralelogramos $\tilde{\mathcal{R}}_1$, $\tilde{\mathcal{R}}_2$ em $\mathbb{R}^2$ por

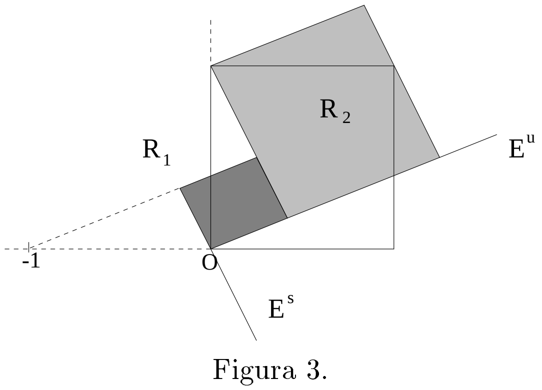


Figura 3.

$$\partial\tilde{\mathcal{R}}_1 \subseteq \mathbb{E}^u \cup \mathbb{E}^s \cup \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{E}^u\right] \cup \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{E}^s\right]$$
$$\partial\tilde{\mathcal{R}}_2 \subseteq \mathbb{E}^u \cup \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{E}^s\right] \cup \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{E}^s\right] \cup \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \mathbb{E}^u\right]$$

Sejam $\mathcal{R}_1 = \pi(\tilde{\mathcal{R}}_2)$, $\mathcal{R}_2 = \pi(\tilde{\mathcal{R}}_2)$. A figura 4 mostra que $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \mathbb{T}^2$ e $\operatorname{int}(\mathcal{R}_1) \cap \operatorname{int}(\mathcal{R}_2) = \emptyset$. Como as fronteiras de $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ estão dentro de variedades estáveis ou instáveis locais, temos que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são "retângulos".

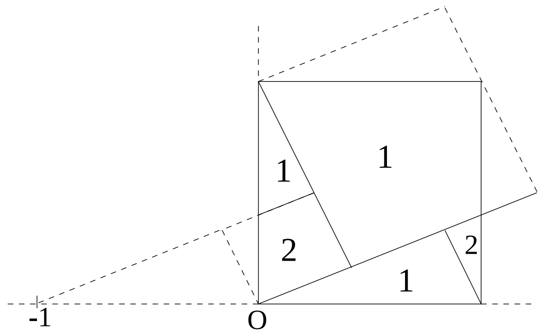


Figura 4.

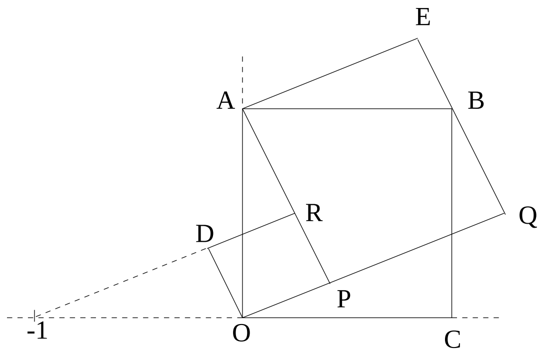


Figura 5.

Nos falta mostrar que $\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$ satisfaz a condição de Markov (iii). Uma leitura atenta das figuras 5 e 6 deve convencer ao leitor disto. Observe que, para $p \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{A}(p + \mathbb{E}^s) = \mathbb{A}(p) + \mathbb{E}^s$, $\mathbb{A}(p + \mathbb{E}^u) = \mathbb{A}(p) + \mathbb{E}^u$. Logo as imagens dos segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{EQ}$ tem que ser segmentos paralelos a $\mathbb{E}^s$. Similarmente as imagens dos segmentos $\overline{DR}$ e $\overline{EQ}$ têm que ser segmentos paralelos a $\mathbb{E}^u$. Como O é o ponto fixo de $\mathbb{A}$, teremos que $\mathbb{A}(\overline{OQ}) \subset \mathbb{E}^u$, $\mathbb{A}(\overline{OD}) \subset \mathbb{E}^s$. Observemos também que R e Q se projetam sobre o mesmo ponto em $\mathbb{T}^2$, de fato $Q = P + (1,0)$ e logo $\mathbb{A}Q = \mathbb{A}P + (2,1)$.

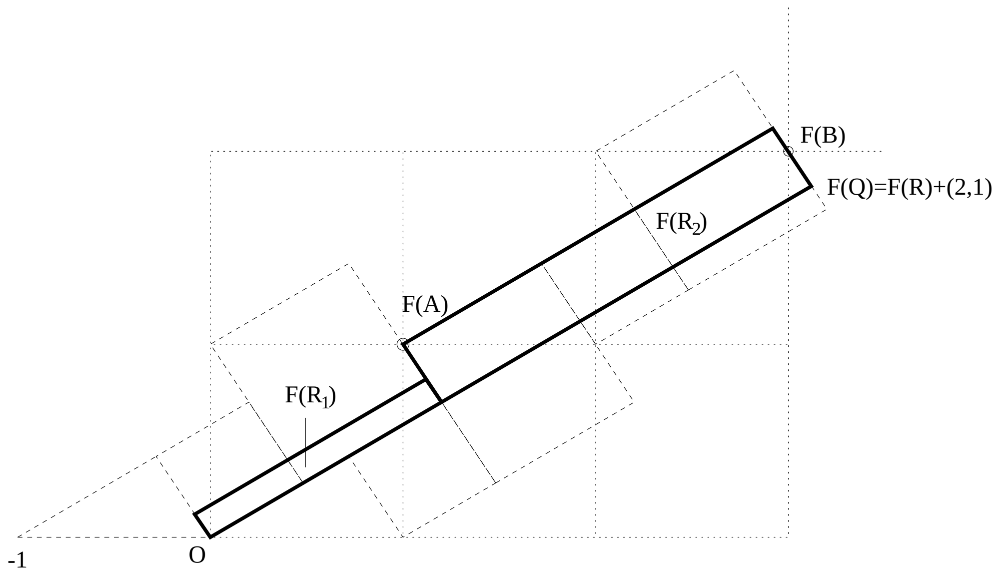


Figura 6.

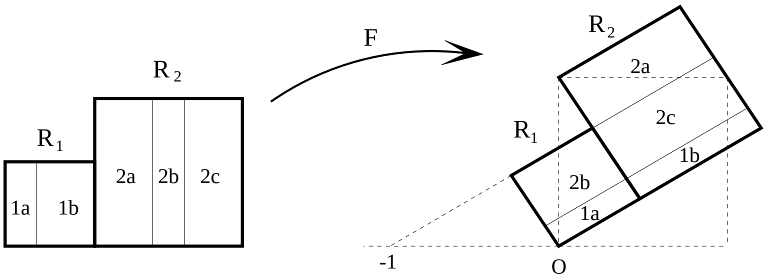


Figura 7.

Usaremos esta partição de Markov para descrever a dinâmica de F.

Podemos definir a função *intinerário* $\mathbb{I} : \mathbb{T}^2 \to \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ que a cada ponto $p \in \mathbb{T}^2$ lhe faz corresponder uma sequência de 1's e 2's correspondente aos retângulos R_1 ou R_2 que o ponto p visita ao ser iterado por F, i.e. $\mathbb{I}(p) = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$, com $F^n(p) \in \mathcal{R}_{x_n}$. Ao ponto $F(p)$ lhe corresponde a mesma sequência $\mathbb{I}(p)$ mas com um lugar deslocado à esquerda, i.e. $\mathbb{I}(F(p))(n) = \mathbb{I}(p)(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Isto motiva a definição da função $\sigma : \{1,2\}^{\mathbb{Z}} \to \{1,2\}^{\mathbb{Z}}$ do espaço de sequências que desloca um lugar à esquerda (σ se chama *shift* em inglês): $\sigma(x)(n) = x(n+1)$. Temos que o seguinte diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^2 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathbb{I}"'] & \mathbb{T}^2 \arrow[d, "\mathbb{I}"] \\ \{1,2\}^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\sigma"] & \{1,2\}^{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

Mas isto ainda não é satisfatório. A função $\mathbb{I}$ não é injetora. O seguinte diagrama mostra as possíveis imagens de pontos em $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$.

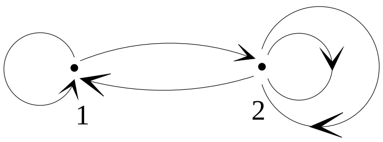


Figura 8.

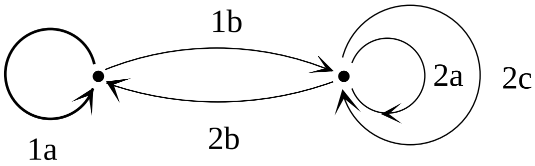


Figura 9.

Se temos uma sequência $(\dots, x_0, x_1, \dots) = (\dots, \underline{2}, 2, \dots) = \mathbb{I}(p)$, no podemos saber se o ponto p está no subretângulo $2a$ ou $2c$ (ver figura 7).

Podemos solucionar este problema de duas formas.

A primeira é trocando a partição de Markov, por exemplo podemos usar $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_{ab} = \{2a, 2b\}$, $\mathcal{R}_c = 2c$. Teríamos o grafo da figura 10.

A segunda é mudando a forma de codificar as órbitas de F. Em lugar de levar um registro dos vértices do grafo 8 pelos que se passa, a nossa função intinerário pode levar um registro das arestas do grafo 9 pelas que passa a órbita de um ponto. Agora o conjunto de símbolos terá cinco elementos $\{1a, 1b, 2a, 2b, 2c\}$ e a nova função intinerário será $\tilde{\mathbb{I}} : \mathbb{T}^2 \to \{1a, 1b, 2a, 2b, 2c\}^{\mathbb{Z}}$.

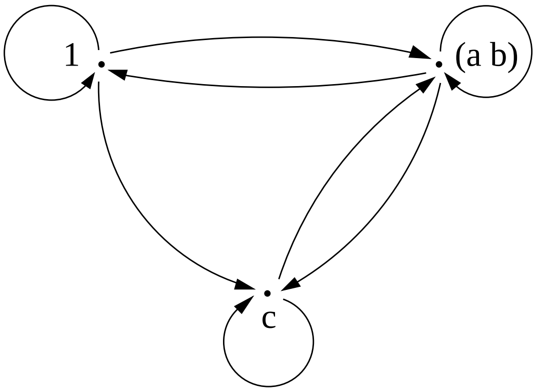


Figura 10.

Como a anterior, só tem ambigüidade na sua definição quando a órbita $\{F^n(p)\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ de um ponto p, passa pela fronteira de um retângulo, fora disso, $\tilde{\mathbb{I}}$ é injetora. A esta forma lhe corresponde o grafo 11. A cada arista do grafo 9 lhe corresponde um vértice do grafo 11. O grafo 11 têm uma arista do vértice x ao vértice y se a cauda de y coincide com a ponta de x no grafo 9.

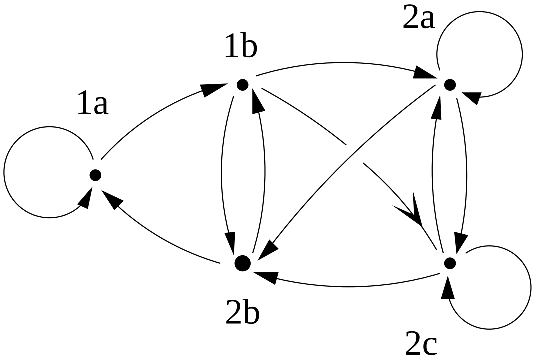


Figura 11.

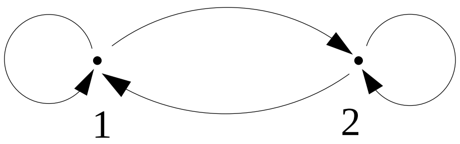
Mas agora estas funções intinerário não são sobrejetoras, as suas imagens são o conjunto de caminhos bi-infinitos (para diante e para trás) no grafo correspondente. Dado um grafo com N vértices definimos sua *matriz de transição* $A\in\mathbb{N}^{N\times N}$ como a matriz $N\times N$ com entradas A_{ij} = número de arestas que vão do vértice i ao vértice j. Se as entradas da matriz A são todas 0 ou 1 como nos grafos 10 e 11, definimos o *shift de tipo finito* Σ_A com matriz A, como

$$\Sigma_A=\Big\{\overline{x}\in\{1,\dots,N\}\;\Big|\;A_{x_nx_{n+1}},\forall n\in\mathbb{Z}\,\Big\},$$

i.e. o conjunto de sequências de vértices dos caminhos possíveis no grafo. Se a matriz A têm entradas maiores que 1 (como no grafo 8) fazemos o grafo com vértices correspondentes às arestas do grafo original, como o grafo 11 é feito a partir do grafo 8. Como antes, teremos a aplicação $\sigma_A:\Sigma_A\to\Sigma_A$ de corrimento à esquerda (shift) $\sigma_A(\overline{x})(n)=x_{n+1}$. Deixamos ao leitor verificar que se A é uma matriz de 0's e 1's, então a matriz B obtida a partir do grafo de A pelo procedimento anterior, dá um shift Σ_B equivalente a Σ_A no sentido de que existe $k:\Sigma_A\to\Sigma_B$ bijetora, tal que o diagrama

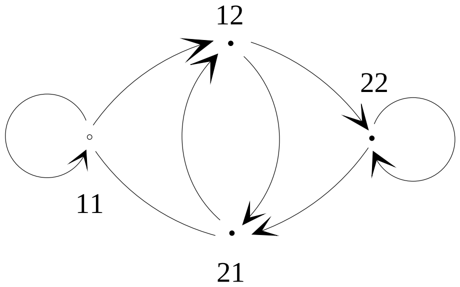
$$\begin{tikzcd} \Sigma_A \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "k"'] & \Sigma_A \arrow[d, "k"] \\ \Sigma_B \arrow[r, "\sigma_B"] & \Sigma_B \end{tikzcd}$$

conmuta. Por exemplo, nos grafos 12 e 13, $k : \Sigma_a \to \Sigma_B$, é $k(\overline{x}) = \overline{y}$, com a cauda de $y_n = x_n$ e a ponta de $y_n = x_{n+1}$.



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 12.



$$B = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \end{array} & \end{array}$$

Figura 13.

Escolhemos o grafo 8 para modelar a dinâmica de F. A partição correspondente é $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, onde $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_{ab} = \{2a, 2b\}$ e $R_3 = \{2c\}$.

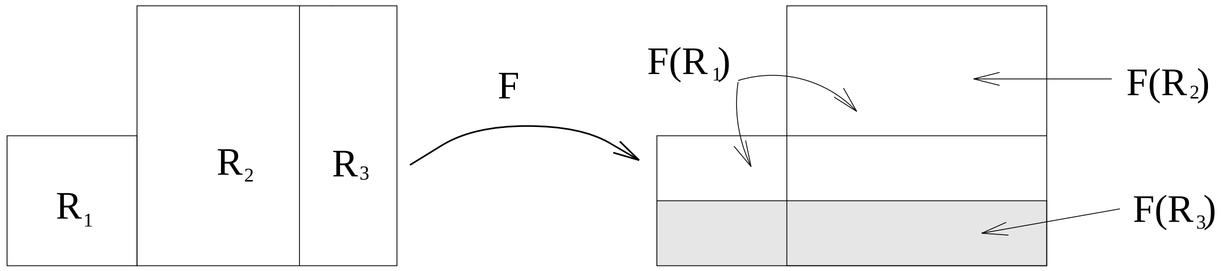


Figura 14.

Definimos $h : \Sigma_A \to \mathbb{T}^2$, por $h(\overline{x}) = \cap_{n\in\mathbb{Z}} F^{-n}(R_{x_n})$ (o ponto cujo intinerário é x). A função h está bem definida pois $\cap_{n\in\mathbb{Z}} F^{-n}(R_{x_n})$ é uma interseção não vazia de compactos encaixados e $\lim_{N\to+\infty} \left\{\text{diam}\left[\cap_{n=-N}^{N} F^{-n}(R_{x_n})\right]\right\} = 0$. Além disso, o diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma_A \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "h"'] & \Sigma_A \arrow[d, "h"] \\ \mathbb{T}^2 \arrow[r, "F"] & \mathbb{T}^2 \end{tikzcd}$$

conmuta. A função h (que se chama *semi-conjugação topológica*) é no máximo 2 a 1 devido só à ambiguidadde de pontos na nterseção das bordas dos retângulos.

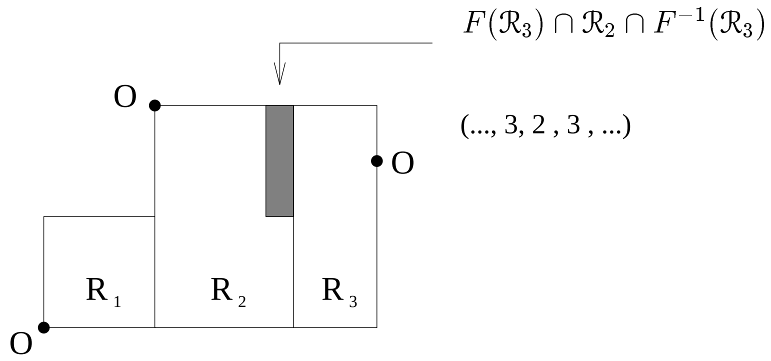


Figura 15.

Podemos por exemplo contar a quantidade de órbitas periódicas de F. Os pontos periódicos correspondem a sequências periódicas em Σ_A. Os pontos onde F não é injetora estão todos em $W^s(O) \cup W^u(O)$. Se $p \in W^s(O) \cup W^u(O)$, como $\lim_{n\to\infty} f^n(p) = 0$ ou $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(p) = 0$, a sequência $\overline{x} \in \Sigma_A$ correspondente a p têm que conter uma sequência infinita de 1's e de 3's na direita ou na esquerda. As únicas sequências periódicas com essa forma são as sequências constantes $(\cdots 111 \cdots)$ e $(\cdots 333 \cdots)$.

Dizemos que a palavra $x_0, x_1, \ldots, x_M$ em $\{1, \ldots, N\}^M$ é *admissível* se $A_{x_k, x_{k+1}} = 1$ para $k = 0, \ldots, M-1$, i.e. se corresponde a um caminho de comprimento M no grafo. A quantidade de caminhos de comprimento M que vão do vértice i ao vértice j é $(A^M)_{ij}$. Isto pode ser provado fácilmente por indução. Um caminho fechado $x_0, \ldots, x_M$, com $x_0 = x_M$, $A_{x_k, x_{k+1}} = 1$ $\forall k \leq M$, corresponde a uma órbita periódica de período M formando a sequência $(x_0, x_1, \ldots, x_M, x_0, x_1, \ldots, x_M, \ldots) \in \Sigma_A$. A quantidade de pontos periódicos de período M será então

$$\#\text{Fix}(F^M) = \text{traço}(A^M) - 1\,,$$

tirando o ponto duplicado $(\cdots 111 \cdots) = (\cdots 333 \cdots)$. Temos então que F têm infinitas órbitas periódicas.

De fato a quantidade de pontos periódicos cresce exponencialmente com o período M: $\#\text{Fix}(F^M) \sim e^{-\lambda M}$,

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M} \log \#\text{Fix}(F^M) \\ &= \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M} \log \left[\text{traço}(A^M)\right] \\ &= \text{ maior autovalor de } A\,,\end{aligned}$$

pois traço $(A^M) = \sum(\text{autovalores de } A^M) = \sum(\text{autovalores de } A)^M$. Para este cálculo poderíamos ter usado a matriz do grafo 8, 10 ou 11. A do grafo 8 é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, obtemos que $\lambda = \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Vejamos que $F : \mathbb{T}^2 \hookleftarrow$ têm uma órbita densa. Para isto introduzimos uma métrica em Σ_A, dada por: $\overline{x}$, $\overline{y} \in \Sigma_A$:

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2^k}, \qquad k := \min\{\ell \in \mathbb{N} \,|\, x_i = y_i\,,\ \forall\,|i| < \ell\,\}\,.$$

O leitor pode verificar que então $h : \Sigma_A \to \mathbb{T}^2$ é contínua.

Para ver que F têm uma órbita densa basta mostrar que $\sigma : \Sigma_A \to \Sigma_A$ têm uma órbita densa. Queremos um ponto $\overline{x} \in \Sigma_A$ tal que seus iterados $\{\sigma^n \overline{x} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ visitem todas as bolas $B(\overline{y}, \frac{1}{2^k}) = \{\,\overline{z} \in \Sigma_A \,|\, z_i = y_i\,,\ \forall\,|i| < k\,\}$. Basta que na sequência $\overline{x}$ apareçam todas as palavras finitas admissíveis, por exemplo, para o grafo 10, um tal $\overline{x}$ poderia ser $(\ldots, \overbrace{1}, \overbrace{2}, \overbrace{3}, 2\,\overbrace{11}\,\overbrace{12}\,\overbrace{13}\,\overbrace{21}\,\overbrace{22}\,\overbrace{23}\,\overbrace{32}\,\overbrace{33}\,2\,\overbrace{111}\,\overbrace{112}\cdots)$.

Usando técnicas de Teoria Ergódica pode se mostrar que em realidade a área (medida de Lebesgue) dos pontos que não têm órbitas densas é nula. De fato para Lebesgue-quase todo ponto p em $\mathbb{T}^2$, a órbita de p se distribui como a medida de Lebesgue. Isto é, se tomamos (Lebesgue) ao azar um ponto $p \in [0,1] \times [0,1]$ e o iterarmos por F, então com probabilifdade 1, seus iterados se distribuirão uniformemente no quadrado $[0,1] \times [0,1]$.

Outro uso importante da dinâmica simbólica é a construção de medidas invariantes por F. Estas medidas podem ser construídas no shift Σ_A e logo ser levadas a $\mathbb{T}^2$ por h. Um mesmo shift pode ser modêlo de vários sistemas dinâmicos geométricos. Isto faz dos shifts de tipo finito um objeto interessante para ser estudado por si mesmo.

Referências

1. Mañé, Ricardo: "Teoria Ergódica". Projeto Euclides, IMPA. 1983.
2. Robinson, Clark: "Introduction to the Theory of Dynamical Systems". Livro em preparação. North Western University. 1993.
3. Szlenk, Wieslaw: "Teoria Ergódica". Publicaciones del Depto. de Matemática del CINVESTAV. México 1979.

CIMAT, P.O. BOX 402, 36.000 GUANAJUATO GTO, MÉXICO.

E-mail address: `gonzalo@cimat.mx`