PODEMOS OIR LA FORMA DE UN TAMBOR?

LEONARDO NAVARRO DE CARVALHO.

En 1996, Mark Kac [6] propuso la siguiente pregunta: se puede oir la forma de un tambor? O sea, una región Ω del plano es determinada por el espectro del Laplaciano en Ω? La respuesta es NO, y las siguientes dos regiones dan un contraejemplo:

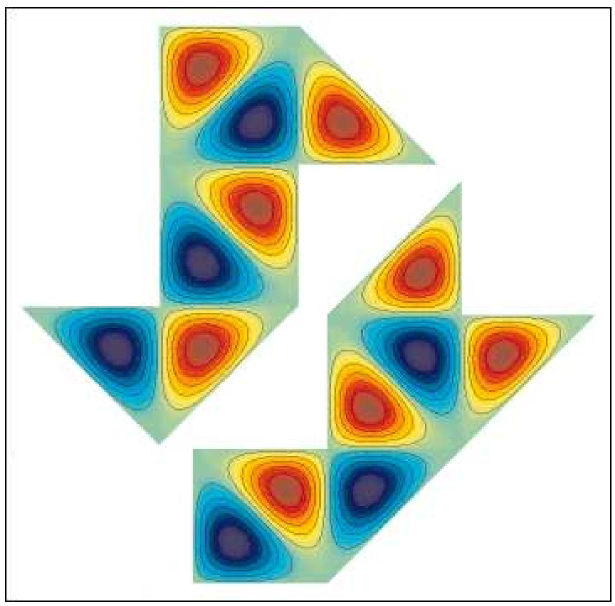

FIGURA 1.

Antes que todo, observemos que las regiones no son isométricas, lo que en el plano significa que no podemos sobreponer una a la otra. Resta ver que son isoespectrales. La demostración de que esas dos regiones son isoespectrales es bien simple e ingeniosa. Se divide la región Ω_1 en 7 triángulos isósceles denominados $A, B \ldots, G$, como en la figura. Considere $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ una auto-función de Δ en Ω_1, esto es, $\Delta f = \lambda f$. Es claro que f restricta a alguno de los triángulos es una auto-función sobre ese triángulo. Es más, si tomamos f sobre dos triángulos cualesquiera, por ejemplo F y A, y definimos g sobre un triângulo congruente T como siendo la suma $F + A$ de los valores de f sobre F con los valores de f sobre A,[1] g será una auto-función asociada

[1]Aquí estamos adoptando dos abusos de notación: identificamos los diferentes domínios, lo que puede ser hecho por movimientos rígidos, e identificamos las restricciones $f|_A$ con A. Los mismos

al auto-valor λ:

$$\Delta g = \Delta(f|_F + f|_A) = \lambda\, f|_F + \lambda\, f|_A\ \lambda\, g.$$

Lo mismo, naturalmente, valdrá para sumas y diferencias arbitrárias entre los "pedazos". Así, la función g definida en Ω_2 como muestra la figura:

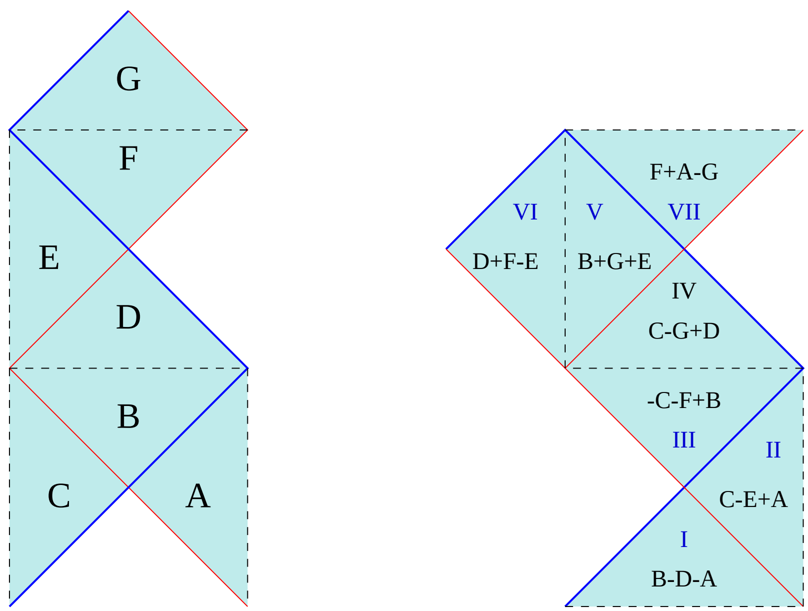

Figura 2.

será una auto-función asociada a λ en cada triángulo. Resta verificar que g "se pega" C^∞ entre un triángulo y otro, y que $g|_{\partial\Omega} = 0$.

Vamos a mostrar explícitamente la verificación para el paso entre los triángulos I y II:

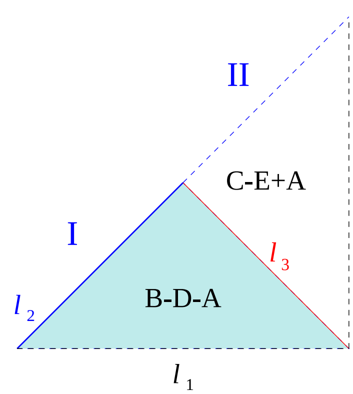

Figura 3.

---

abusos aparecerán más adelante, cuando sea claro en el contexto sobre a qué objeto nos estemos refiriendo.

en l_1: $B = D$ donde $B - D = 0$. Como $A = 0$, tenemos que $B - D - A = 0$.
en l_2: $B = A$ donde $B - A = 0$. Como $D = 0$, tenemos que $B - D - A = 0$.
en l_3: el paso de B apra C es C^∞ (ver Ω_1), así como $-D$ para $-E$. Como $-A = 0$ en l_3, el paso para A, por reflexión, también es C^∞.

Juntandose los pedazos y recomponiendo g, tenemos que el paso de $B - D - A$ para $C - E - A$ por l_3 es C^∞. Es fácil verificar que el mismo argumento se aplica a todos los pares de triángulos adjacentes en Ω_2. Portanto la g así construída es C^∞ en el interior de Ω_2, $g|_{\partial\Omega_2} = 0$ y $\Delta g = \lambda g$. En resumen, para cada autofunción f de Δ en Ω_1 construímos una g auto-función en Ω_1 asociada al mismo auto-valor de f. Resolviéndose un sistema linear no-singular, se puede hallar f a partir de g donde Ω_1 y Ω_2 son isoespectrales.

Cómo se encontraron estos tambores?

En [1], Buser contruye dos superfícies isoespectrales no planas, representadas en la figura:

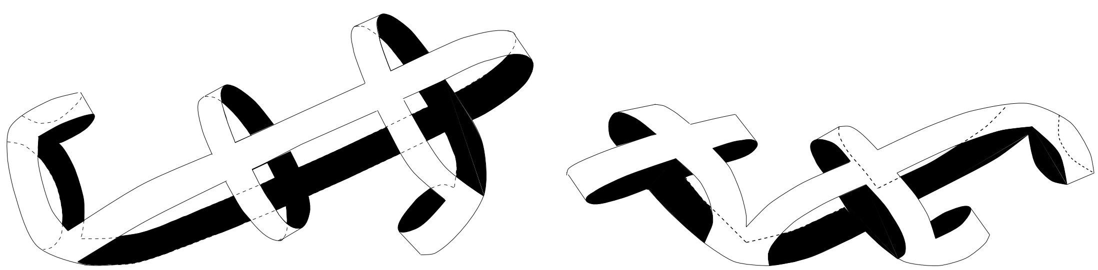

Figura 4.

A partir de ellas, esencialmente cortándolas al medio y “aplastándolas” en el plano, C. Gordon , D. Webb y S. Wolpert [5] contruyeron la primera versión de tambores diferentes e isoespectrales:

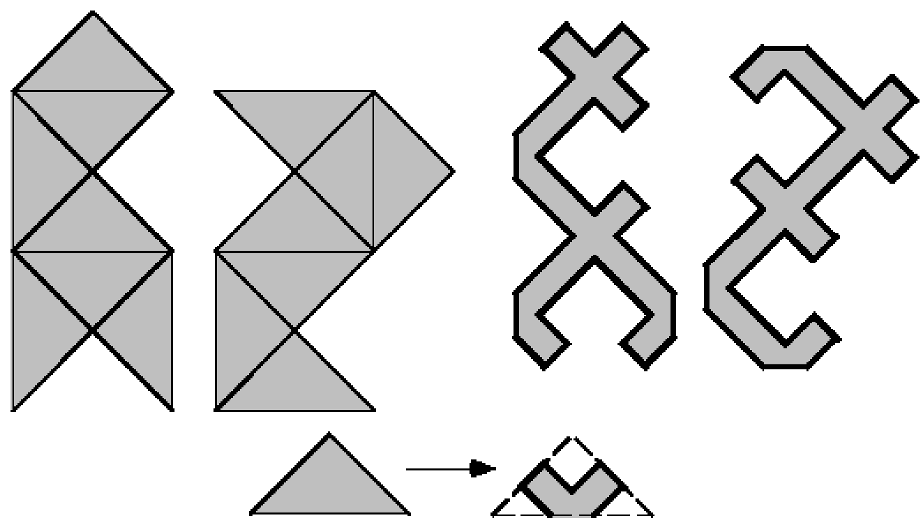

Figura 5.

La demostración de que esas regiones montadas con media-cruzes son isoespectrales es esencialmente la misma que dimos para las regiones montadas contriángulos (el lector puede verificar que ella se aplica). En verdad esta demostración fue hecha originalmente para las versiones media-cruz de los tambores [8]. Observándose que la prueba no depende del formato exacto de la pieza fundamental que genera las regiones, sino principalmente de la forma como se pegan esatas piezas, se puede construir diversos tambores diferentes simplemente usando piezas fundamentales diferentes.

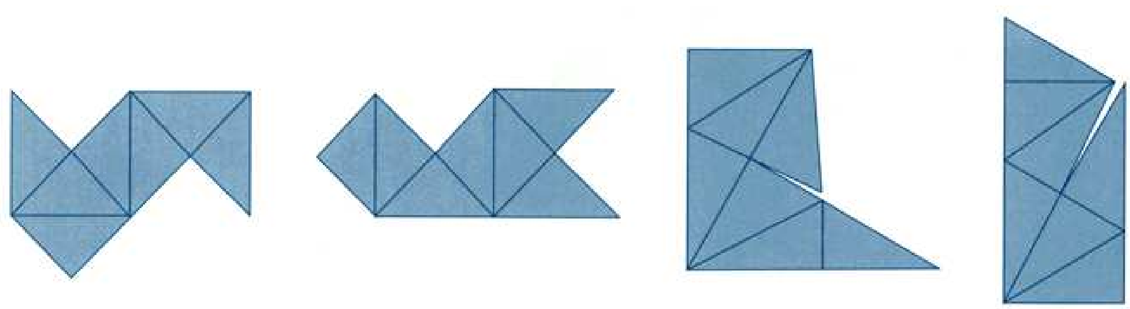

Figura 6.

Lo que nos resta hacer es contruir las variedades de Buser. En [7], Sunada demuestra el siguiente teorema

Teorema.[Sunada]

Sea G un grupo finito actuando libremenet e isométricamente en una variedad riemanniana compacta M. Suponga que H_1 y H_2 sean subgrupos de G tales que cada clase de conjugación $[g]$ en G intersepte H_1 y H_2 en el mismo número de elementos, i.e.

$$\#([g] \cap H_1) = \#([g] \cap H_2).$$

Entonces $H_1 \setminus M$ y $H_2 \setminus M$ son isoespectrales.

Buser usa ese teorema para el grupo $G = SL(3,2)$ de las matrices 3×3 invertíbles con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$. Los subgrupos son:

$$H_1 = \text{ subgrupo de todas } \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix};$$

$$H_2 = \text{ subgrupo de todas } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Antes de todo, verifiquemos que esos subgrupos satisfacen las hipótesis del teroema de Sunada.

Podemos pensar en H_1 como el subgrupo de las matrices que preservan $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Así, $\sigma g \sigma^{-1} = h_1 \in H_1$ sí y sólo si $\sigma g \sigma^{-1}$ tiene a $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ como auto-vector (auto-valor 1). Esto es, sí y solamente si $\sigma^{-1} \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ es auto-vector de g. Como σ puede asumir cualquier valor en G, $\#([g] \cap H_1)$ depende solamente de cuántos autovectores tiene g. Así, $[g]$ y $[g^t]$ interseptan H_1 en el mismo número de elementos. Pero es fácil ver que el automorfismo $g \mapsto (g^t)^{-1}$ lleva H_1 exactamente en H_2, portanto $[g^{-1}]$ intersepta H_2 tantas veces cuanto $[g]$ intersepta H_1. Como H_2 es un grupo,

$$\#([g] \cap H_2) = \#([g] \cap H_1).$$

Ahora note que

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

generan G.

Vamos a considerar $\mathcal{G}$, el gráfico de Cayley de G, con generadores a, b. El grupo G actúa en $\mathcal{G}$ de forma natural y vamos a considerar los gráficos $\mathcal{G}_1 = H_1 \setminus \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}_2 = H_2 \setminus \mathcal{G}$. Para entender esos gráficos, vamos a estudiar las clases laterales de H_1 y H_2.

Considere o conmutador

$$c = a\,b\,a^{-1}b^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ese elemento tiene orden 7 y $c^k \in H_i$ si y sólo si $k \equiv 0 \pmod 7$, por tanto las clases laterales $H_i\,c^k$ son disjuntas para diferentes (mod 7) valores de k (ver apéndice). Además, los $H_i\,c^k$ cubren todo G, por tanto para cada k existirá un único exponente $\alpha_i(k)$ tal que $c^k a \in H_i\,c^{\alpha_i(k)}$ (ver apéndice). Análogamente, hay un único $\beta_i(k)$ tal que $c^k b \in H_i\,c^{\beta_i(k)}$. Esos exponentes nos dicen que, en el gráfico $\mathcal{G}_i = H_i \setminus \mathcal{G}$, el elemento representado por c^k es llevado a $c^{\alpha_i(k)}$ cuando es multiplicado por a. Cuando es multiplicado por b, va a $c^{\beta_i(k)}$. Así, basta conocer α_i y β_i para construir los gráficos $\mathcal{G}_i$. Damos abajo tabla que define α_i y β_i (ver apéndice):

k	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha_1(k)$	3	1	6	0	5	2	4
$\beta_1(k)$	0	2	5	6	3	1	4
$\alpha_2(k)$	1	6	5	0	4	2	3
$\beta_2(k)$	0	4	5	1	3	6	2

A partir de las tablas es fácil construir los gráficos. Por ejemplo, $\mathcal{G}_1$ tiene 7 elementos, representados por c^k y que están denominados por k. Las flechas contínuas representan el producto por a y las líneas punteadas, el producto por b. La tabla dice que $c^5 a \in H_1\,c^2$. Así, el producto de a por el vértice 5 debe dar el vértice 2.

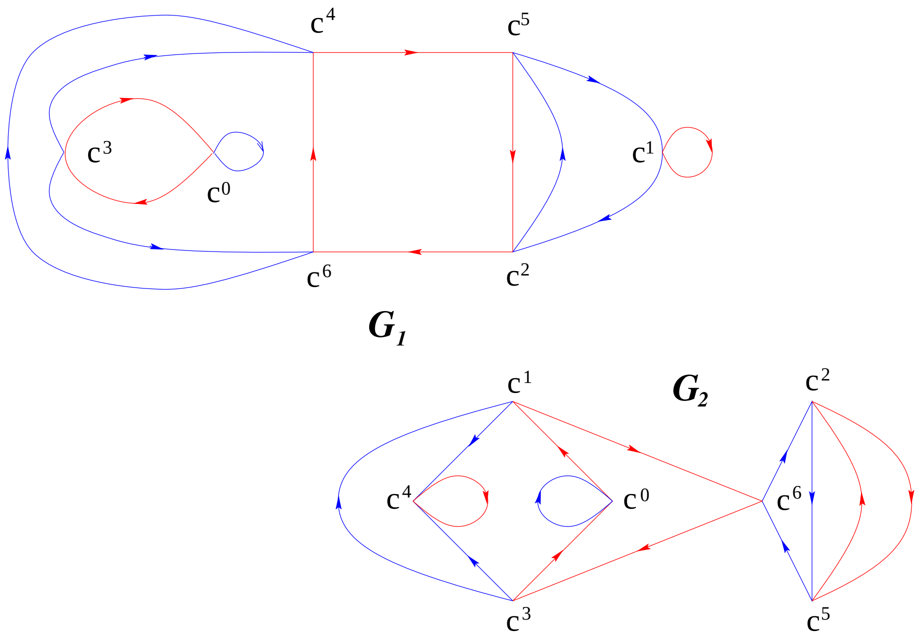

FIGURA 7.

Así, tenemos bien estudiado el grupo G, sus subgrupos H_1 y H_2 y los cocientes $H_1 \setminus G$, $H_2 \setminus G$. Pero cuál será la variedade M que necesitamos para aplicar el teorema de Sunada? Vamos a asociar a cada vértice g del gráfico de Cayley $\mathcal{G}$ de G, una cruz con los segmentos del borde denominados como en la figura.

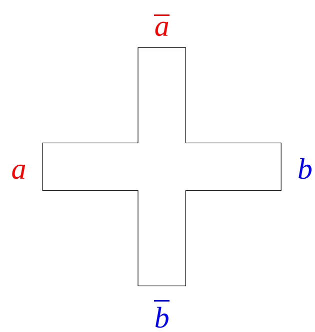

FIGURA 8.

Después identificarempos dos puntas de dos cruces en el siguiente caso: si $g_1 a = g_2$, identificamos el borde a de la cruz asociada a g_1 con el borde $\overline{a}$ de la cruz asociada a g_2. Análogamente, para $g_3 b = g_4$, identifícase b de la primera cruz con $\overline{b}$ de la segunda.

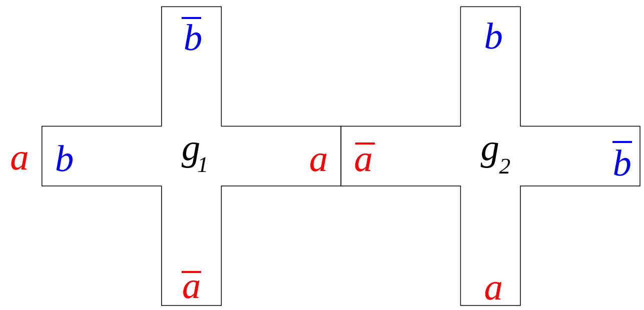

Figura 9.

Es claro que cada borde a, $\overline{a}$, b ó $\overline{b}$ de cada cruz estará identificada algún otro borde. Sea M la variedad resultante de estas identificaciones. Cada $g \in G$ lleva la cruz g_1 en la cruz $g_1 g$ isométricamente de forma natural. Así, G actúa libremente e isométricamente en M y por tanto, por el teorema de Sunada, $H_1 \setminus M$ y $H_2 \setminus M$ son isoespectrales. Las variedades $H_1 \setminus M$ y $H_2 \setminus M$ pueden ser visualizadas a partir de los gráficos $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$. Basta hacer el mismo *collage* de cruces para $\mathcal{G}_i$ y tendremos variedades cociente isoespectrales y claramente no isométricas. Esas variedades, entretanto, no pueden ser colocadas isométricamente en el plano, no son "tambores". Si pegamos la "mitad" de cada una de ellas, cortando a lo largo de las líneas indicadas en la figura:

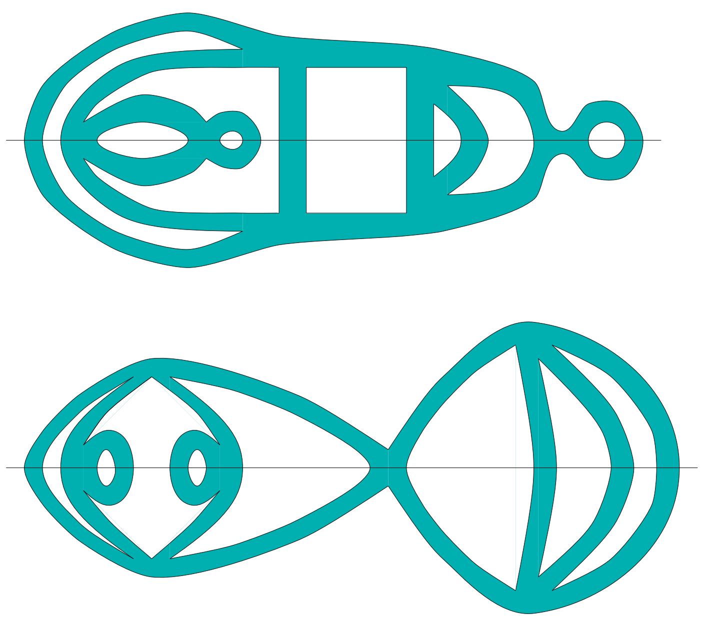

Figura 10.

tendremos entonces dos figuras formadas por 7 media-cruces, que pueden se incrustadas isométricamente en el plano dando "tambores" satisfactorios.

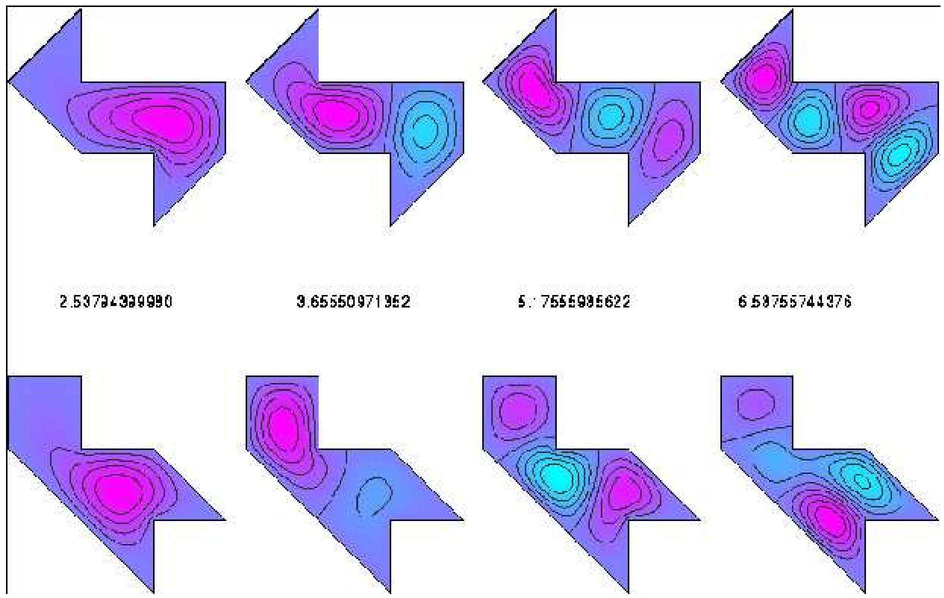

FIGURA 11.

Como ya dijimos, esos dos tambores son, esencialmente, los mismos que presentamos en el inicio del texto.

Apéndice.

Demostraremos aquí algunas propidades de $SL(3,2)$ que usamos para la construcción de los gráficos $\mathcal{G}_1 = H_1 \setminus \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}_2 = H_2 \setminus \mathcal{G}$. Primeramente, verifiquemos que, si $h\, c^k = h' c^n$ para $h,\ h' \in H_i$, entonces $c^{k-n} = h^{-1}h'$, donde $c^{k-n} \in H_i$ y portanto $k \equiv n \pmod 7$. Así, las clases laterales de H_i son disjuntas.

Seguimos esrcibiendo explícitamente algunos elementos de G:

$$c = \begin{bmatrix} 0&1&1\\ 1&1&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix} \qquad c^2 = \begin{bmatrix} 1&0&1\\ 1&1&0\\ 1&1&1 \end{bmatrix} \qquad c^3 = \begin{bmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 1&1&0 \end{bmatrix}$$

$$c^4 = \begin{bmatrix} 0&1&0\\ 0&1&1\\ 1&0&0 \end{bmatrix} \qquad c^5 = \begin{bmatrix} 1&1&1\\ 1&0&1\\ 0&1&1 \end{bmatrix} \qquad c^6 = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&1 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 0&1&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$ca = \begin{bmatrix} 1&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix} \qquad c^2a = \begin{bmatrix} 1&1&1\\ 0&0&1\\ 1&0&1 \end{bmatrix} \qquad c^3a = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&1\\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$c^4a = \begin{bmatrix} 0&1&0\\ 1&1&0\\ 0&1&1 \end{bmatrix} \qquad c^5a = \begin{bmatrix} 1&0&1\\ 1&1&1\\ 1&1&0 \end{bmatrix} \qquad c^6a = \begin{bmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$cb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c^2b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad c^3b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^4b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c^5b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad c^6b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificamos por las lista que la única potencia c^k del conmutador $c = a\,b\,a^{-1}b^{-1}$ que pertenece a H_1 ó H_2 es $c^0 = Id$.

También es fácil ver que H_i tiene 24 elementos. Existen 8 vectores en $\mathbb{Z}_2^3$. Podemos llenar las dos columnas libres de un elemento de H_1 de 6×4 formas diferentes: en la primera columna vacante podemos colocar cualquiera de los 6 vectores diferentes del nulo y de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, la primera columna. En la tercera, podemos colocar culaquier vector que no sea uno de los dos ya excluídos, o el escogido para ocupar la segunda columna, o la suma de la primera columna con la segunda, esto nos da 4 opciones para llenar la última columna. Como H_1 y H_2 son isomorfos, ambos tienen 24 elementos.

Ya vimos que las clases laterales $H_1\,c^k$ son todas distintas. Por tanto la unión de ellas totaliza los 24×7 elementos de G, esto es, cubren todo G. Lo mismo se aplica a H_2.

Vemos, a seguir, cómo construir la tabla de las funciones α_i y β_i.

Vamos a comenzar construyendo la tabla de α_i. Vamos a hacerla al contrario: achar qué k debe ser llevado en un dato $n = \alpha(k)$. Necesitamos consultar las listas de c^k y $c^k a$. Queremos estudiar la relación entre k y n tales que $c^k a \in H_i\,c^n$. Note que c^n lleva algún vector $x \in \mathbb{Z}_2^3$ en el vector e_1, invariante por los elementos de H_1. Es decir, todo elemento de $H_i\,c^n$ llevará x en e_1. Basta verificar en la lista de los $c^k a$ cuál elemento hace esto (es claro que por el estudio que hicimos de las clases laterales que hay uno y sólo un tal elemento). Así tendremos $\alpha_1(k) = n$.

Por ejemplo, tomando $n = 2$, buscaremos k tal que $c^k a \in H_1\,c$. Hallando la solución x de $c\,x = e_1$, tenemos:

$$c^2\,x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verificamos en la lista que el elemento $c^k a$ que lleva x en e_1 es ca:

$$(c^5a)x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Abajo representamos la lista de todos los $c^k x = e_1$ y los respectivos $\alpha_1(k)$. Notemos que lo mismo puede ser aplicado a los $\beta_1(k)$.

$$Id: \underset{\alpha_1(3)=0}{\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \underset{\beta_1(0)=0}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}} \qquad c: \underset{\alpha_1(1)=1}{\begin{bmatrix} 0&1&1\\1&1&1\\0&1&0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \underset{\beta_1(5)=1}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}$$

$$c^2: \underset{\alpha_1(5)=2}{\begin{bmatrix} 1&0&1\\1&1&0\\1&1&1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \underset{\beta_1(1)=2}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}} \qquad c^3: \underset{\alpha_1(0)=3}{\begin{bmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\1&1&0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \underset{\beta_1(4)=3}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}$$

$$c^4: \underset{\alpha_1(6)=4}{\begin{bmatrix} 0&1&0\\0&1&1\\1&0&0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \underset{\beta_1(6)=4}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}} \qquad c^5: \underset{\alpha_1(4)=5}{\begin{bmatrix} 1&1&1\\1&0&1\\0&1&1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \underset{\beta_1(2)=5}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}$$

$$c^6: \underset{\alpha_1(2)=6}{\begin{bmatrix} 1&1&0\\0&0&1\\1&0&1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \underset{\beta_1(3)=6}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}$$

Hallar α_2 y β_2 es más fácil. El subgrupo H_2 está formado por las matrices que preservan el plano $\begin{bmatrix}0\\*\\*\end{bmatrix}$. De forma análoga a lo que hicimos arriba para α_1, podemos estudiar $c^k a \in H_2\, c^n$. Así, debemos preguntarnos qué espacio es llevado a $\begin{bmatrix}0\\*\\*\end{bmatrix}$ por c^n. Esto es, cuáles son los vectores cuya imágen por c^n tiene primera coordenada 0. Ese espacio deberá ser llevado por $c^k a$ en sí mismo, o sea, la imágen deberá tener primera coordenada 0. Es fácil ver que para que pase eso es necesario que las primeras líneas de c^n y $c^k a$ sean iguales. Por ejemplo, tomemos $n = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1&0&1\\1&1&0\\1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}*_1\\*_2\\*_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\*\\*\end{bmatrix}.$$

Esto es, los vectores con primera y última coordenadas iguales son llevados en el subespacio invariante por H_2, por tanto $c^k a$ debe llevarlos en los vectores con primera coordenada 0. Es claro que la primera línea de $c^k a$ debe ser $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, la primera línea de c^2. Como el único $c^k a$ con esta línea es $c^5 a$, tendremos que $\alpha_2(5) = 2$.

Haciendo lo mismo con todos los n:

$$\alpha_2(3) = 0 \quad \alpha_2(0) = 1 \quad \alpha_2(5) = 2 \quad \alpha_2(6) = 3 \quad \alpha_2(4) = 4 \quad \alpha_2(2) = 5$$
$$\beta_2(0) = 0 \quad \beta_2(3) = 1 \quad \beta_2(6) = 2 \quad \beta_2(4) = 3 \quad \beta_2(1) = 4 \quad \beta_2(2) = 5$$

Esto completa la construcción de la tabla de productos en $H_i \setminus G$.

Referencias

[1] P. Buser, *Cayley Graphs and Planar Isospectral Domains*, LNM **1339**, Geometry and Analysis on Manifolds. Springer, 1988.

[2] P. Buser, J. Conway, P. Doyle, & K-D. Semmler *Some planar isospectral domains.* http://www.geom.umn.edu/docs/doyle/drum/cover/cover.html

[3] J.H. Conway. *The orbifold notation for surface groups.* In M.W.Liebeck & J.Saxl (editors), Groups Combinatorics and Geometry, pp. 438-447. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[4] C. Gordon, D. Webb & S. Wolpert. *Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds.* Invent. Math. **110** (1992), 1-22.

[5] C. Gordon, D. Webb & S. Wolpert. *One cannot hear the shape of a drum.* Bull. Amer. Math. Soc., **27** (1992), 134-138.

[6] M. Kac. *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly, **73** no. 4, part II, 1-23, (1966).

[7] T. Sunada, *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, Annals of Mathematics, **121** (1985), 169-186.

[8] B. Cipra. *You Can't Always Hear the Shape of a Drum.* What's Happening in the Mathematical Sciences, vol. **1**, AMS

Matmemática. PUC-Rio. Marquês de São Vicente, 225, 22453-900 Rio de Janeiro.