# PODEMOS OIR LA FORMA DE UN TAMBOR?

GONZALO CONTRERAS AND LEONARDO NAVARRO DE CARVALHO.

En 1996, Mark Kac [6] propuso la siguiente pregunta: se puede oir la forma de un tambor? En 1992, Gordon, Webb y Wolpert [4] responden negativamente.

---

La pregunta del título acepta dos interpretaciones: una matemática y otra no matematica.

Comenzamos exponiendo la interpretación no matemática: Los sonidos de los tambores dependen de sus características físicas: material, tensión de la membrana, tamaño y forma del tambor. Un tambor vibra a ciertas frecuencias especiales que se llaman *modos normales* del tambor. La frecuencia menor es el *tono fundamental* del tambor y las otras se llaman *sobretonos* o *armónicos*.

La pregunta de Kac en forma no matemática es la siguiente: Consideremos a una persona con oído perfecto (i.e. que puede identificar *todos* los modos normales de vibración de un tambor) en un cuarto obscuro. ¿ Es posible que esta persona pueda deducir la forma de un tambor simplemente escuchando su tono fundamental y todos sus sobretonos?

Ahora describimos la forma matemática de la pregunta. Un tambor matemático es un dominio compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. La vibración del tambor viene dada por la ecuación de onda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) && v(x,y,t), \quad (x,y) \in \Omega; \\ v(x,y,t) &= 0 && \text{para } (x,y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $c$ es la velocidad de propagación de la onda. Suponemos que el material, la tensión y las unidades de $(x,y,u) \in \mathbb{R}^3$ son tales que $c^2 = 1$.

Por medio de una separación de variables $v(x,y,t) = F(t)\, u(x,y)$, la ecuación de onda se resuelve en términos de las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda\, u &= 0 \qquad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Estas ecuaciones tienen solución sólo para un conjunto discreto de $\lambda$'s:

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots \le \lambda_k \le \cdots \to +\infty, \tag{2}$$

que se llaman *autovalores* del Laplaciano y las soluciones $u_k$ con $\Delta u_k = \lambda\, u_k$, $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ se llaman *funciones propias* de $\Lambda$. Veremos abajo que los autovalores $\lambda_k$ corresponden a los modos fundamentales del tambor.

El *espectro* del Laplaciano $\Delta$ en $\Omega$ es $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$. Dos regiones $\Omega_i \subset \mathbb{R}^2$ son *isoespectrales* si tienen el mismo espectro, y son *isométricas* si existe $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ biyectiva, que preserva la distancia euclidiana, i.e. $|f(x) - f(y)| = |x - y|$, $\forall x, y \in \Omega_1$ (o sea, $f(x) = Qx + y_0$, donde $Q$ es una matriz ortogonal: una composicion de una rotación con una reflexión).

La pregunta de Kac es:

*¿Si dos domínios en $\mathbb{R}^2$ son isoespectrales necesariamente serán isométricos?*

## 1. Tambores Matemáticos.

En esta sección veremos que un tambor matemático (o membrana vibrante) satisface la ecuacion de onda. Si el lector acepta la interpretación de Kac a la pregunta del título, puede pasar a la sección §TRES.

Fijemos un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. La membrana sera una superficie en $\mathbb{R}^3$ con borde $\Omega \times \{0\}$. Una parametrización de la superficie es de la forma $(a, b) \mapsto (x(a, b), y(a, b), z(a, b))$. Como las vibraciones serán pequeñas, supondremos que los planos tangentes a la superficie nunca contienen un vector vertical. Es decir, supondremos que la aplicación $(a, b) \mapsto (x(a, b), y(a, b))$ es un difeomorfismo, de modo que la superficie es el gráfico de una función $v(x, y)$:

$$(x, y, v(x, y)) \quad (x, y) \in \Omega. \tag{3}$$

Supondremos también que no hay fuerzas internas de largo alcance (que las moléculas de la membrana actúan sólo sobre moléculas próximas): sólo hay tensión local. Además supondremos que la densidad de masa es constante $\rho \equiv 1$ y que la membrana es "perfectamente elástica" i.e. que la tensión es constante. Normalizamos la tensión de la membrana para que tenga norma 1.

Si $\vec{n}$ es un vector unitario en $\mathbb{R}^2$ con base $(x, y) \in \Omega$, el vector tangente a la superficie (3) que se proyecta sobre $\vec{n}$ es $\mathbb{T} = d\Phi(\vec{n}) = (\vec{n}, \nabla v \cdot \vec{n}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, donde $\Phi(x, y) = (x, y, v(x, y))$. El vector tensión sobre la dirección $\vec{n}$ será

$$T = \frac{(\vec{n}, \nabla v \cdot \vec{n})}{\sqrt{1 + |\nabla v \cdot \vec{n}|^2}}\,.$$

La componente vertical de la tensión será

$$T_z = \frac{\nabla u \cdot \vec{n}}{\sqrt{1 + |\nabla u \cdot \vec{n}|^2}}.$$

Como $\nabla u \cdot \vec{n}$ es pequeño, aproximamos[1]

$$\sqrt{1 + |\nabla v \cdot n|^2} \approx 1. \tag{4}$$

Usaremos entonces $T_z = \nabla v \cdot \vec{n}$.

Como la densidad de masa es $\rho \equiv 1$ entonces $dm = \rho\, dA = dA$, donde $dA$ es el elemento de área de la superfície:

$$\begin{aligned} dA &= \|d\Phi(1,0) \times d\Phi(0,1)\| \;\; dx\, dy \\ &= \|(1,0,v_x) \times (0,1,v_y)\| \;\; dx\, dy \\ &= \sqrt{1+|\nabla v|^2}\; dx\, dy \\ &\approx dx\, dy \qquad\qquad\qquad \text{por (4).} \end{aligned}$$

Supongamos que la membrana se somete a una fuerza externa vertical $(0,0,F)$ (e.g. la gravedad). Sea $A \subseteq \Omega$ un subconjunto de $\Omega$ con frontera rectificable. La segunda ley de Newton nos dice que:

$$\oint_{\partial A} \left(\begin{smallmatrix}\text{tensión}\\ \text{vertical}\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}\text{normal}\\ \text{exterior}\end{smallmatrix}\right) + \int_A \left(\begin{smallmatrix}\text{Fverza externa}\\ \text{vertical}\end{smallmatrix}\right) = \int_A \left(\begin{smallmatrix}\text{aceleración}\\ \text{vertical}\end{smallmatrix}\right),$$

$$\oint_{\partial A} \Delta v \cdot \vec{n} \quad + \int_A F\, dx\, dy \quad = \int_A v_{tt}\, dx\, dy.$$

Por el teroema de la divergencia,[2]

$$\oint_{\partial A} \nabla v \cdot \vec{n} = \int_A \operatorname{div}(\nabla v). \tag{5}$$

Recordemos que la divergencia de un campo vectorial $G(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$ es $\operatorname{div} G = A_x + B_y = \operatorname{tr} dF$, luego

$$\operatorname{div} \nabla v = \operatorname{div}(v_x, v_y) = v_{xx} + v_{yy} = \Delta v.$$

Obtenemos

$$\textstyle\int_A \Delta v + \int_A F = \int_A v_{tt}\ .$$

Como los integrandos son continuos y podemos usar cualquier bola pequeña $A \subset \Omega$:

$$\boxed{v_{tt} - \Delta v = F}$$

---

[1] obs.

[2] Donde el lado izquierdo de (5) es la cantidad de área que el flujo de $\nabla u$ saca por $\partial A$ por unidad de tiempo y el lado izquierdo es la cantidad de area creada por el flujo de $\nabla u$ dentro de $A$ por unidad de tiempo.

Nuestros tambores matemáticos no tendrán fuerza externa: $F = 0$, luego

$$
\begin{aligned}
v_{tt} &= \Delta v && \text{en } \Omega, \\
v|_{\partial\Omega} &= 0, \\
v(x,y,0) &= f(x,y), && (x,y) \in \Omega, \quad \text{(condición inicial)}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

## 2. Solución de la Ecuación de Onda.

Queremos resolver

$$
\begin{aligned}
v_{tt} &= \Delta v \qquad \text{en } \Omega, \\
v|_{\partial\Omega} &\equiv 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

**2.1. Separación de variables.** Escribimos

$$
v(x,y,t) = F(t)\, u(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega. \tag{8}
$$

La ecuación de onda queda siendo

$$
\begin{aligned}
F''\, u &= F\, \Delta u, \\
\Delta u - \left(\tfrac{F''}{F}\right) u &= 0.
\end{aligned}
$$

Si hacemos

$$
\tfrac{F''}{F} = -\lambda, \tag{9}
$$

$$
\begin{cases}
\Delta\, u + \lambda\, u = 0, \\
u|_{\partial\Omega} \equiv 0.
\end{cases}
\tag{10}
$$

entonces para $\lambda > 0$, la ecuancion (9), $F'' + \lambda\, F = 0$, es la de un oscilador harmónico. Su solución es

$$
F(t) = A\, \cos(t\sqrt{\lambda}) + B\, \operatorname{sen}(t\sqrt{\lambda}).
$$

La multiplicación de $u$ en (10) por una constante no altera la ecuación, luego podemos suponer que $F(0) = 1$. Luego $F(t) = \cos(t\sqrt{\lambda})$ y una solución de (7) es

$$
v_\lambda(x,y,t) = \cos(t\sqrt{\lambda})\, u_\lambda(x,y),
$$

donde $u_\lambda$ es una solucion de (10).

**2.2. El espectro del Laplaciano.** En esta sección veremos que

[A] *La ecuación* (1) *tiene solución sólo para un conjunto enumerable de $\lambda$'s:*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots \to +\infty$$
$$\lim_k \lambda_k = +\infty.$$

[B] *Las soluciones*

$$\Delta u_k + \lambda_k \, u_k = 0 \qquad en \ \Omega,$$
$$u_k|_{\partial\Omega} = 0,$$

*forman una base (sistema completo) ortogonal de* $\mathcal{L}^2(\Omega)$*.*

Recordemos que para funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ cuadrado-integrables ($\int_\Omega f^2 < +\infty$), se define el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega fg$$

y su norma asociada:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, g \rangle}.$$

El espacio $\mathcal{L}^2(\Omega)$ es la clausura de $\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, f \in C^2, \ \int_\Omega f^2 < +\infty \}$ bajo la norma $\| \ \|$ módulo las funciones con $\|f\| = 0$.[3] Una base de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ es un conjunto enumerable de funciones linealmente independientes $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que el conjunto de las combinaciones lineales finitas de las $u_n$ es denso en $\mathcal{L}^2(\Omega)$. En otras palabras, para toda $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, existe una única sucesión $\langle c_n \rangle$, tal que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, u_k \quad \text{(c.t.p)}, \tag{11}$$

donde la convergencia de la serie $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_1^N c_n \, u_n = f$ (c.t.p) es en la norma $\| \ \|$ de $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Dada cualquier función contínua $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, escribiendo la serie (11) en términos de las funciones propias $u_k$ de $\Delta$, la solución del problema (6) es

$$v(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, \cos(t\sqrt{\lambda_k}) \, u_k(x, y),$$

[3] Esto equivale a

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ Borel-medible }, \int_\Omega f^2 < +\infty \}/_\equiv,$$

donde $f \equiv g$ si y sólo si $f = 0$ en Lebesgue-casi todo punto.

si la serie converge uniformemente. Vemos entonces que el *tono fundamental* del tambor tiene frecuencia $\sqrt{\lambda_1}/2\pi$ y los *armónicos* tienen las frecuencias $\sqrt{\lambda_k}/2\pi$, $k > 1$.

**2.1. Proposición.** *Dos funciones propias*

$$\Delta u_k + \lambda_k\, u_k = 0, \qquad\qquad u_k|_{\partial\Omega} = v_k|_{\partial\Omega} \equiv 0$$
$$\Delta u_\ell + \lambda_\ell\, u_\ell = 0, \qquad\qquad \lambda_k \neq \lambda_\ell$$

*correspondientes a valores propios distintos* $\lambda_k \neq \lambda_\ell$ *son ortogonales en* $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Para esto necesitamos la fórmula de Green 13. Observemos que

$$u\ \Delta u = \operatorname{div}(u\,\nabla v) - \nabla u \cdot \nabla v \tag{12}$$

De hecho, en coordenadas esta ecuación es:

$$u\,(v_{xx} + v_{yy}) = \tfrac{\partial}{\partial x}(uv_x) + \tfrac{\partial}{\partial y}(u\,v_y) - (u_x\,v_x + v_y\,v_y),$$

que es verdadera. Integrando y usando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\int_\Omega u\,\Delta v = \oint_{\partial\Omega} u\,(\nabla v \cdot \vec{n}) - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v, \tag{13}$$

$$\int_\Omega u\,\Delta v - v\,\Delta u = \oint_{\partial\Omega} u\,\tfrac{\partial}{\partial \vec{n}} v - v\,\tfrac{\partial}{\partial \vec{n}} u, \tag{14}$$

donde $\vec{n}$ es el normal exterior a $\partial\Omega$ y $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} u := \nabla v \cdot \vec{n}$.

**Demostración de 2.1:** Tenemos que:

$$\int_\Omega u_\ell\,(\Delta u_k + \lambda_k\,u_k) - u_k\,(\Delta u_\ell + \lambda_\ell\,u_\ell) = 0,$$

$$\int_\Omega (u_\ell\,\Delta u_k - u_k\,\Delta u_\ell) + \int_\Omega (\lambda_k - \lambda_\ell)\,u_k\,u_\ell = 0,$$

$$\oint_{\partial\Omega} \left(u_\ell\,\tfrac{\partial}{\partial \vec{n}} u_k - u_k\,\tfrac{\partial}{\partial \vec{n}} u_\ell\right) + (\lambda_k - \lambda_\ell)\ \int_\Omega u_k\,u_\ell = 0.$$

El primer término de la última ecuación es nulo porque $u_k|_{\partial\Omega} = u_\ell|_{\partial\Omega} \equiv 0$. Obtenemos que

$$\langle u_k, u_\ell\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega u_k\,u_\ell = 0.$$

Observemos que un autovalor $\lambda$ puede tener varias funciones propias. En este caso para las $u_k$ escojemos una base ortogonal del espacio propio usando el proceso de Gram-Schmidt.

Como el problema (10) no cambia por la multiplicación de $u$ por una cosntante, podemos normalizar las soluciones de modo que

$$\|u_k\|^2 = \int_\Omega (u_k)^2 = 1.$$

2.3. **Principio Variacional.** Obtendremos las $\lambda_k$ y las $u_k$ a partir de un principio variacional. Supongamos por un momento que las $u_k$ generan $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Para un $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ con $f|_\Omega \equiv 0$, tendríamos

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, u_k, \qquad c_k = \langle f, u_k\rangle = \int_\Omega f\, u_k,$$

$$\int_\Omega f^2 = \langle f, f\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\ ,$$

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \overset{\text{Green}}{=} -\int_\Omega f\, \nabla u = -\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_k) c_k \int f\, u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, c_k^2$$

$$\geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \lambda_1 \int_\Omega f^2.$$

pues ordenaríamos los autovalores de modo que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$. Luego

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \geq \lambda_1 \int_\Omega f^2 \qquad \forall f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$$

con igualdad para $f = u_1$ pues en ese caso $c_k = 0$ para $k > 1$. Tendríamos entonces que una función propia para el autovalor $\lambda_1$ realizaría el mínimo

$$\lambda_1 = \min_{\substack{f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}) \\ f|_{\partial\Omega} \equiv 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} > 0. \tag{15}$$

Para los otros $\lambda_k$ tendríamos que si $f = \sum_{i=k}^{\infty} c_i\, u_i$, i.e. $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} = 0$,

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 = \sum_{i \geq k} \lambda_i\ c_i^2 \geq \lambda_k\ \left(\sum c_i^2\right) = \lambda_k \int_\Omega f^2.$$

Luego

$$\lambda_k = \min_{\substack{f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}) \\ f|_{\partial\Omega} \equiv 0 \\ \langle f,u_1\rangle = \langle f,u_2\rangle = \cdots = \langle f,u_{k-1}\rangle = 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} \geq \lambda_{k-1} > 0, \tag{16}$$

con $u_k$ realizando el mínimo.

**2.2. Proposición.** *Si* $u \in W^{2,2}$ *realiza el mínimo* (16), *entonces* $\nabla u + \lambda_k\, u = 0$.

**Demostración:** Tomamos cualquier $\psi \in C^1(\Omega.\mathbb{R})$ con

$$\psi|_{\partial\Omega} \equiv 0 \quad \text{y} \quad \langle \psi, u_1 \rangle = \cdots = \langle \psi, u_{k-1} \rangle = 0, \tag{17}$$

y definimos $\varphi_s = u + s\psi$, donde $u$ realiza el mínimo (16). Sea

$$f(s) := \frac{\int_\Omega |t\,\nabla\psi + \nabla u|^2}{\int_\Omega (t\,\psi + u)^2}.$$

Entonces la función $f(s)$ es cuadrática en $s$ y alcanza su mínimo en $s = 0$. Luego

$$0 = f'(0) = \frac{2\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\psi)}{\int_\Omega u^2} - \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2}{\int_\Omega u^2} \cdot \frac{2\int_\Omega \psi u}{\int_\Omega u^2}.$$

Luego

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi - \lambda \int_\Omega u\,\psi = 0.$$

Usando la fórmula de Green (13) y $\psi|_{\partial\Omega} \equiv 0$,

$$-\int_\Omega \psi\, \nabla u - \lambda \int_\Omega \psi u = 0,$$

$$\int_\Omega \psi\,(\nabla u + \lambda\, u) = 0.$$

Como esto vale para cualquier $\psi$ que satisfaga (17) y como $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ y $\langle u, u_1\rangle = \cdots = \langle u, u_{k-1}\rangle = 0$, entonces

$$\Delta u + \lambda\, u = 0 \qquad \boxed{\text{c.t.p.}}$$

□

Ejercício: Probar la proposición 2.2 usando el lagrangiano

$$L(\varphi, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}) = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + a_0\Big(\int_\Omega \varphi^2 - 1\Big) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i\,\langle \varphi, u_i\rangle$$

con $\varphi \in \mathbb{E} := \{\, \psi \in \boxed{\mathcal{L}^2} \mid \psi|_{\partial\Omega} \equiv 0, \int \psi^2 = 0 \,\}$, correspondiente a la minimización con restricciones sobre $\mathbb{E}$. *Sugerencia:* Use la fórmula de Green. Pruebe que $a_0 = \lambda_k$ calculando $\int_\Omega (\varphi_{\text{minimizante}})^2$.

## Referencias

[1] P. Buser, *Cayley Graphs and Planar Isospectral Domains*, LNM **1339**, Geometry and Analysis on Manifolds. Springer, 1988.

[2] P. Buser, J. Conway, P. Doyle, & K-D. Semmler *Some planar isospectral domains.* http://www.geom.umn.edu/docs/doyle/drum/cover/cover.html

[3] J.H. Conway. *The orbifold notation for surface groups.* In M.W.Liebeck & J.Saxl (editors), Groups Combinatorics and Geometry, pp. 438-447. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[4] C. Gordon, D. Webb & S. Wolpert. *Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds.* Invent. Math. **110** (1992), 1-22.

[5] C. Gordon, D. Webb & S. Wolpert. *One cannot hear the shape of a drum.* Bull. Amer. Math. Soc., **27** (1992), 134-138.

[6] M. Kac. *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly, **73** no. 4, part II, 1-23, (1966).

[7] T. Sunada, *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, Annals of Mathematics, **121** (1985), 169-186.

[8] B. Cipra. *You Can't Always Hear the Shape of a Drum.*
What's Happening in the Mathematical Sciences, vol. **1**, AMS

CIMAT, P.O.Box 402, 36.000 Guanajuato. Gto, México.
*E-mail address*: `gonzalo@cimat.mx`

Matmemática. PUC-Rio. Marquês de São Vicente, 225, 22453-900 Rio de Janeiro., Brasil.
*E-mail address*: `leo@mat.puc-rio.br`