





**Ejemplos de Sistemas Dinámicos:  
un curso introductorio.**

Gonzalo Contreras

CIMAT, P.O. Box 402, 36.000 GUANAJUATO GTO, MÉXICO



## Contents

Capítulo. 1. Rotaciones.	7
1.1. Introducción.	7
1.2. Rotaciones.	10
1.3. Flujo lineal y translaciones del toro.	12
1.4. Medidas invariantes.	13
1.5. Unicidad ergódica.	17
1.6. Homeomorfismos del círculo.	20
1.7. Difeomorfismos del círculo	27
Bibliography.	32
Bibliografía.	31
Índice de cuadros.	33
Índice de figuras.	35
Index.	36
Índice alfabético.	37



## CAPÍTULO. 1

# Rotaciones.

### 1.1. Introducción.

#### 1.1.a. Iteración de aplicaciones.

Sea  $X$  un espacio topológico y  $f : X \rightarrow X$  una función. Al ver  $f$  como un sistema dinámico nos interesa estudiar los iterados

$$f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$$

$n$  veces

de  $f$ . Si  $x \in X$ , la *órbita (positiva)* de  $x$  es

$$\mathcal{O}_f(x) := \mathcal{O}_+(x) = \{ f^n x : n \in \mathbb{N} \}$$

Si  $f$  es biyectiva, la *órbita* de  $x$  es

$$\mathcal{O}_f(x) := \{ f^n x : n \in \mathbb{Z} \},$$

donde  $f^{-n} = f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}$ . Si  $f$  no es inyectiva, la *pre-órbita* de  $x$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_-(x) &:= \cup \{ f^{-n} \{x\} : n \in \mathbb{Z}^+ \} \\ &= \{ y \in X : \exists n \in \mathbb{Z}^+, f^n(y) = x \}. \end{aligned}$$

Decimos que la órbita de  $x$  es *periódica* o que  $x$  es un *punto periódico* si existe  $n > 0$  tal que  $f^n(x) = x$ . En este caso el *período* de  $x$  es

$$\text{per}(x) := \#\mathcal{O}_f(x) = \min \{ n \in \mathbb{Z} : f^n x = x \}.$$

Un caso especial son los puntos fijos. Escribimos

$$\text{Fix}(f) = \{ x \in X : f(x) = x \} = \{ \text{puntos fijos de } f \},$$

$$\text{Per}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \text{Fix}(f^n) = \{ \text{puntos periódicos de } f \}.$$

En sistemas dinámicos nos interesa estudiar el comportamiento asintótico de las órbitas de  $x$ , i.e.  $f^n x$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , pudiendo hacer una descripción topológica o probabilística (i.e. describir la distribución de  $f^n x$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ ). Para esto podemos usar las siguientes definiciones. El  $\omega$ -límite de  $x \in X$  es

$$\omega(x) = \text{adh}(\mathcal{O}_+(x)) = \{ \text{puntos de acumulación de } \langle f^n x \rangle_{n \in \mathbb{Z}^+} \}.$$

Cuando  $f$  es biyectiva, el  $\alpha$ -límite de  $x$  es

$$\alpha(x) = \text{adh}(\mathcal{O}_-(x)) = \{ \text{puntos de acumulación de } \langle f^n x \rangle_{n \in \mathbb{Z}^-} \}.$$

Decimos que  $x$  es *recurrente* si  $x \in \overline{\omega(x)}$ .

Un punto  $x \in X$  es *no-errante* si para toda vecindad  $U \ni x$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . El punto  $x$  es *errante* si existe una vecindad  $U \ni x$  tal que  $f^n(U) \cap U = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$ . Escribimos el *conjunto no-errante*

$$\Omega(f) = \{ \text{puntos no errantes de } f \}.$$

### 1.1.b. Flujos.

Un *flujo* es una función continua  $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  tal que

- (i)  $\phi_0 = I,$
- (ii)  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t},$

donde  $\phi_t : X \rightarrow X$  es  $\phi_t(x) := \phi(t, x)$ . Observe que  $\phi_{-t} = (\phi_t)^{-1}$  también es continua y por tanto  $\phi_t$  es un homeomorfismo de  $X$  que llamamos *el tiempo  $t$  del flujo  $\phi$* .

La órbita de un punto  $x \in X$  es

$$\mathcal{O}(x) = \{ \phi_t(x) : t \in \mathbb{R} \}.$$

Decimos que la órbita  $\mathcal{O}(x)$  es *periódica* y que  $x$  es un *punto periódico* si  $\exists T > 0$  con  $\phi_T(x) = x$ . El período de  $x$  es

$$\text{per}(x) = \inf\{t > 0 : \phi_t(x) = x\},$$

y  $\text{Per}(\phi)$

El  $\alpha$ -límite y el  $\omega$ -límite de  $x$  son

$$\alpha(x) = \{ \lim_k \phi_{t_k}(x) \mid \lim_k t_k = -\infty \},$$

$$\omega(x) = \{ \lim_k \phi_{t_k}(x) \mid \lim_k t_k = +\infty \}.$$

Un flujo define un isomorfismo de grupos  $\phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\text{Homeo}(X), \circ)$  por  $t \mapsto \phi_t$ . Siilarmente una aplicación biyetiva  $f : X \rightarrow X$  define un homomorfismo de grupos  $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\text{bi}(X), \circ)$  dado por  $n \mapsto f^n$ , donde  $\text{bi}(X) = \{ g : X \rightarrow X : g \text{ biyetiva} \}$ .

### 1.1.c. Acciones.

Un ejemplo más general de sistema dinámico es la acción de un grupo topológico  $G$ . Esto es un homomorfismo continuo  $\phi : G \rightarrow (\text{Homeo}(X), \circ)$ . Equivalentemente, una aplicación continua  $\phi : G \times X \rightarrow X$  tal que

- (i)  $\phi_e = I,$
- (ii)  $\phi_{g \cdot h} = \phi_g \circ \phi_h.$

En este caso la órbita de  $x \in X$  es

$$\mathcal{O}(x) = \{ \phi_g(x) : g \in G \}.$$

En este libro sólo estudiaremos acciones de  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{R}$ .



### 1.1.d. Sección transversal.

Una forma de relacionar la dinámica de un flujo con la de una aplicación es mediante una sección transversal. Una *sección transversal global*  $\Sigma$  a un flujo  $\phi$  en  $X$  es un subconjunto cerrado  $\Sigma \subset X$  tal que

- (a) Toda órbita de  $\phi$  intersecta  $\Sigma$ .
- (b)  $\exists \varepsilon > 0 : \phi_s(\sigma) \cap \Sigma = \emptyset, \quad \forall |s| < \varepsilon$ .

En este caso definimos el *tiempo de retorno* a  $\Sigma$  por  $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,

$$\tau(x) = \inf\{t > 0 : \phi_t(x) \in \Sigma\},$$

y la *aplicación de primer retorno* o *aplicación de Poincaré* por  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ,  $f(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$ .

A veces es útil usar *secciones transversales locales* donde la condición (a) arriba no se pide. Por ejemplo cerca de una órbita periódica, donde generalmente se llama *sección de Poincaré*.

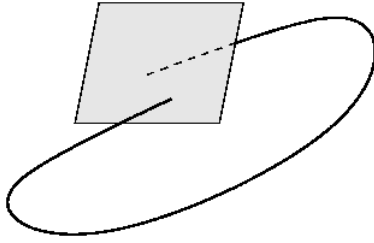


FIG. 1. Sección de Poincaré.

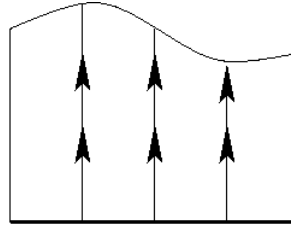


FIG. 2. Suspensión de una aplicación.

### 1.1.e. Suspensión.

La forma de pasar de la dinámica de una aplicación a la de un flujo es mediante una *suspensión*. Dada una aplicación  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  y  $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definimos

$$\begin{aligned} S(\Sigma, \tau) &= \{(x, t) \in \Sigma \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq \tau(x)\} /_{(x, \tau(x)) \equiv (f x, 0)} \\ &= \Sigma \times \mathbb{R} /_{\equiv} \end{aligned}$$

donde  $(x, S_n \tau(x) + t) \equiv (f^n x, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n \tau(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \tau(f^k x)$ , con la topología cociente.

La función  $\tau$  se llama *tiempo de retorno* o *función techo* y normalmente se toma  $\tau \equiv 1$ . En  $S(\Sigma, \tau)$  definimos el flujo (vertical)  $\phi_s(x, t) = (x, t + s)$ .

## 1.2. Rotaciones.

El círculo  $\mathbb{S}^1$  es un grupo topológico. Usaremos tres versiones de  $\mathbb{S}^1$ :

conjunto	operación	topología
$\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} :  z  = 1 \}$	producto en $\mathbb{C}$	subespacio de $\mathbb{C}$
$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$	+	topología cociente
$\mathbb{S}^1 = [0, 1]/0 \equiv 1$	$+$ (mod 1)	topología cociente

Las identificaciones

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \longleftrightarrow & [0, 1]/0 \equiv 1 \\ e^{2\pi i x} & \longleftrightarrow & x + \mathbb{Z} & \longleftrightarrow & x \pmod{1} \end{array}$$

son homeomorfismos e isomorfismos de grupo.

Si  $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , la rotación  $R_a : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es  $R_a(x + \mathbb{Z}) = x + a + \mathbb{Z}$ .

### 1.2.a. Rotación racional.

Si  $a \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  decimos que la rotación  $f = R_a$  es *racional*. Escribiendo  $a = \frac{p}{q}$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $\text{mcd}(p, q) = 1$ , tenemos que  $f^q = I$ . De hecho todo punto de  $\mathbb{S}^1$  es periódico de período mínimo  $q$ . La órbita de todo punto le da  $p$  vueltas al círculo en  $q$  iterados.

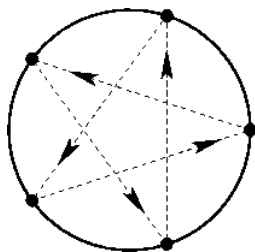


FIG. 3. Rotación racional  $R_a$ .

$$a = \frac{2}{5} = \frac{2 \text{ vueltas}}{5 \text{ iterados}}$$

En  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  la rotación  $R_a$  se escribe  $R_a(z) = e^{2\pi i a} z$ . Aquí  $R_a$  es rotación racional sii  $e^{2\pi i a}$  es una raíz de la unidad.

### 1.2.b. Rotación irracional.

Si  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\alpha = \omega \pmod{\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , decimos que la rotación  $R_\alpha$  es *irracional*.

#### 1.2.1. Lema.

Si  $H \subset \mathbb{S}^1$  es un subgrupo infinito entonces  $H$  es denso en  $\mathbb{S}^1$ .

DEMOSTRACIÓN. Como  $\mathbb{S}^1$  es compacto y  $H$  es infinito,  $H$  tiene una sucesión convergente  $\langle h_n \rangle \subset H$ . Definamos  $g_n := h_{n+1} - h_n \in H$ . Entonces  $\lim_n g_n = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(g_n, 0) < \varepsilon$ . Entonces el subgrupo  $\langle g_n \rangle = \{k g_n \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset H$  es  $\varepsilon$ -denso en  $\mathbb{S}^1$ .

□

### 1.2.2. Proposición.

Si  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $a = \omega \pmod{\mathbb{Z}}$  entonces todo punto  $x \in \mathbb{S}^1$  tiene órbita densa.

DEMOSTRACIÓN. La órbita de  $x$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x) &= \{x + n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= x + \langle \alpha \rangle \\ &= R_x(\langle \alpha \rangle), \end{aligned}$$

donde  $\langle \alpha \rangle$  es el subgrupo generado por  $\alpha$ . Como  $R_x$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{S}^1$ , por el lemma 1.2.1 basta ver que  $\langle \alpha \rangle$  es infinito.

Si el subgrupo  $\langle \alpha \rangle$  tiene orden finito, existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $m\alpha = 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ , i.e.  $m\alpha \in \mathbb{Z}$ . Pero entonces  $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ . Esto contradice la hipótesis.

□

1.2.3. **Observación.** Las misma prueba cambiando “grupo” por “semi-grupo”<sup>1</sup> muestra que si  $\alpha$  es irracional, la  $R_\alpha$ -órbita *positiva* (resp. *negativa*) de todo punto  $x \in \mathbb{S}^1$  es densa en  $\mathbb{S}^1$ . Para eso usamos el siguiente Lemma 1.2.4.

### 1.2.4. Lema.

Si  $H \subset \mathbb{S}^1$  es un semigrupo infinito entonces  $H$  es denso en  $\mathbb{S}^1$ .

DEMOSTRACIÓN.

*Caso 1. Si  $H$  tiene un elemento  $h$  de orden infinito.*

Como  $\mathbb{S}^1$  es compacto existe una sucesión convergente  $\langle n_k h \rangle$ , con  $n_k$  creciente. Sea  $g_k := (n_{k+1} - n_k)h$ . Tenemos que  $g_k \in H$  y  $\lim_k g_k = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $d(g_n, 0) < \varepsilon$ . Entonces el sub-semigrupo  $\langle g_k \rangle = \{\ell g_k \mid \ell \in \mathbb{N}\} \subset H$  es  $\varepsilon$ -denso en  $\mathbb{S}^1$ .

*Caso 2. Si todo elemento de  $H$  tiene orden finito.*

Sea  $\langle a_n \rangle$  una sucesión convergente en  $H$ . Sea  $m_n$  el orden de  $a_n$ , i.e.  $m_n a_n = 0$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  con

$$\varepsilon > d(a_{n+1}, a_n) = d(a_{n+1} + (m_n - 1)a_n, m_n a_n) = d(b_n, 0),$$

donde  $b_n = a_{n+1} + (m_n - 1)a_n$ . El sub-semigrupo  $\langle b_n \rangle$  es  $\varepsilon$ -denso en  $\mathbb{S}^1$ .

□

<sup>1</sup> $(G, \cdot)$  es *semigrupo* si la operación  $\cdot$  es asociativa con unidad, pero no necesariamente con inversas.

**1.2.5. Definición.**

- (a) Una aplicación  $f : X \leftarrow$  es *topológicamente transitiva* si tiene una órbita densa.
- (b) Un conjunto  $A \subset X$  es *invariante* (para el futuro) o *+invariante* sii  $f(A) \subset A$ .
- (c) Un conjunto  $A \subset X$  es *minimal* sii
  - (i)  $A$  es cerrado.
  - (ii)  $A$  es +invariante.
  - (iii)  $A$  es minimal para la inclusión respecto a (ci), (cii), i.e. si  $\emptyset \neq B \subset A$  satisface (ci), (cii)  $\implies B = A$ .
- (d) La aplicación  $f$  es *minimal* sii todo  $X$  es un conjunto minimal.

**1.2.6. Proposición.**

$$A \subset X \text{ es minimal} \iff \forall a \in A, \overline{\mathcal{O}_+(a)} = A,$$

i.e. si todo punto de  $A$  tiene órbita densa en  $A$ .

DEMOSTRACIÓN.

( $\implies$ ) Si  $\exists a \in A$  con  $\emptyset \neq \overline{\mathcal{O}_+(a)} \subsetneq A$  entonces  $A$  no es minimal.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $A$  no es minimal. Entonces existe un cerrado invariante  $B$  con  $\emptyset \neq B \subset A$ . Si  $b \in B$ , tenemos que  $\overline{\mathcal{O}_+(b)} \subset B \subsetneq A$ .

□

**1.2.7. Corolario.** *Una rotación irracional en  $\mathbb{S}^1$  es minimal.*

**1.3. Flujo lineal y translaciones del toro.**

El toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  puede describirse como

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = [0, 1]^2 / \equiv$$

donde  $(x, 0) \equiv (x, 1)$ ,  $(0, y) \equiv (1, y)$ . Es un grupo conmutativo con operación  $+$  mod  $\mathbb{Z}^2$ .

El flujo lineal en el toro es  $\phi_t : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $\phi_t(p + \mathbb{Z}^2) = p + t(1, \alpha) + \mathbb{Z}^2$ . Esto es la suspensión a tiempo  $\tau \equiv 1$  de la rotación  $R_\alpha$  de  $\mathbb{S}^1$  con sección transversal  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \{0\} \subset \mathbb{T}^2$ .

La dinámica de  $\phi_t$  se puede entender a partir de la dinámica de  $R_\alpha$ , por ejemplo: si  $\alpha$  es racional, todas las órbitas de  $\phi_t$  son periódicas y si  $\alpha$  es irracional, todas las órbitas son densas en  $\mathbb{T}^2$ .

Otro ejemplo similar es la translación en  $\mathbb{T}^2$  dada por  $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $T(p + \mathbb{Z}^2) = p + q + \mathbb{Z}^2$ . Si  $q = (a, b)$  y  $a \neq 0$ , las órbitas satisfacen

$$\mathcal{O}_T(p) \subset \mathcal{O}_\phi(p), \quad \forall p \in \mathbb{T}^2,$$

donde  $(1, \alpha) = (1, \frac{b}{a})$ .

Como

$$\mathcal{O}_T(p + \mathbb{Z}^2) = \{p + m q + \mathbb{Z}^2 \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

Las órbitas de  $T$  son periódicas sii  $q \in \mathbb{Q}^2$ . La proyección de una órbita a  $\mathbb{S}^1 \times 0$  por  $\pi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times 0$ ,  $\pi(x, y) = (x, 0)$  es densa sii  $a$  es irracional. En ese caso la clausura de cada órbita  $\overline{\mathcal{O}_T(p)}$  contiene a  $\mathcal{O}_\phi(p)$ . Pero  $\mathcal{O}_T(p)$  es densa en  $\mathbb{T}^2$  sii  $a \notin \mathbb{Q}$  y  $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$ .

En dimensiones más altas podemos definir el flujo lineal en

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

por  $\phi_t(p + \mathbb{Z}^n) = p + t q + \mathbb{Z}^n$  y la translación  $T = \phi_1$ . La dinámica de  $T$  o  $\phi_t$  depende del grado de racionalidad de  $q \in \mathbb{R}^n$ .

#### 1.4. Medidas invariantes.

Sean  $X$  un espacio topológico,  $\mathcal{T}_X$  su topología<sup>2</sup>,  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$  y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación medible. Consideremos una medida de probabilidad boreliana  $\mu$  en  $X$ .

##### 1.4.1. Definición.

Decimos que  $\mu$  es una *probabilidad  $T$ -invariante* o que  $T$  *preserva*  $\mu$  sii

$$\forall A \in \mathcal{B} : \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Si  $p \in X$  la *delta de Dirac* es la probabilidad boreliana tal que

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin A, \\ 1 & \text{si } p \in A. \end{cases}$$

Si  $T : X \rightarrow Y$  es Borel medible y  $\mu$  es una probabilidad boreliana en  $X$ . El *empuje* (o push-forward) es la probabilidad  $T_*\mu$  en  $Y$  definida por

$$(T_*\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B)), \quad \forall B \in \mathcal{B}_Y.$$

Observe que  $T_*(\delta_p) = \delta_{T(p)}$ .

#### Ejemplos:

**1.4.2.** Si  $x \in X$  es un punto fijo de  $T$ ,  $T(x) = x$ , entonces  $T$  preseva  $\delta_x$ .

**1.4.3.** Si  $x \in X$  es un punto periódico con  $T^q(x) = x$ , entonces la probabilidad uniforme en la órbita de  $x$ :

$$\mu = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \delta_{T^k(x)},$$

es  $T$ -invariante. Esto sigue de  $T_*(\mu) = \mu$  y el ejercicio 1.4.1.

<sup>2</sup>i.e.  $\mathcal{T}_X$  es la colección de subconjuntos abiertos de  $X$ .

## EJERCICIOS.

\*1.4.1. Si  $T : X \leftrightarrow$  es Borel medible, muestre que  $\mu$  es  $T$ -invariante sii  $T_*\mu = \mu$ .

\*1.4.2. Muestre que la medida de Lebesgue en  $\mathbb{S}^1$  es invariante por rotaciones.

\*1.4.3. Muestre que si  $T : X \leftrightarrow$  es inyectiva, entonces una probabilidad boreliana  $\mu$  en  $X$  es  $T$ -invariante sii  $\forall A \in \mathcal{B} : \mu(T(A)) = \mu(A)$ .

\*1.4.4. Muestre que si  $f \circ T : X \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable entonces

$$\int (f \circ T) d\mu = \int f d(T_*\mu)$$

\*1.4.5. Muestre que si  $\mu \in \mathcal{M}(T)$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es integrable entonces

$$\int S_N f d\mu = \int f d\mu,$$

donde  $S_N f = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f \circ T^i$ .

1.4.6. Sea  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la translación  $T(x) = x + 1$ . Muestre que no hay medidas finitas  $T$ -invariantes.

1.4.7. Describa todas las probabilidades invariantes por una rotación racional.

En adelante  $X$  será un espacio métrico compacto. Escribimos

$\mathcal{P}(X)$  = probabilidades borelianas en  $X$ ,

$\mathcal{M}(T)$  = probabilidades borelianas  $T$ -invariantes.

Denotamos por  $C^0(X, \mathbb{R})$  o por  $C^0(X)$  el espacio de funciones continuas  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  con la topología de convergencia uniforme i.e. con la norma

$$\|f\|_0 := \|f\|_{\text{sup}} := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Usaremos el Teorema de Riesz, cuya demostración aparece en [?]:

1.4.2. **Teorema (Riesz).**

Si  $F : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$  es una funcional lineal positiva (i.e.  $F(f) \geq 0$  si  $f \geq 0$ ) y acotada tal que  $F(1) = 1$ , entonces existe una única  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  tal que

$$F(f) = \int_X f d\mu, \quad \forall f \in C^0(X).$$

La topología débil\* en  $\mathcal{P}(X)$  se define por:

$$\lim_n \mu_n = \mu \iff \forall f \in C^0(X, \mathbb{R}), \quad \lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu.$$

El teorema de Riesz implica que el límite es único.

**1.4.3. Proposición.** Si  $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(X)$  entonces  $\lim_n \mu_n = \mu$  si y sólo si  $\lim_n \mu_n(U) = \mu(U)$  para todo abierto  $U \subset X$  tal que  $\mu(\partial U) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN.

1. Veamos que para todo  $\varepsilon > 0$  y todo abierto  $U$  con  $\mu(\partial U) = 0$  existe  $f \in C^0(X)$  tal que

$$I_U \leq f \leq 1 \quad y \quad \int_X f \, d\mu \leq \mu(U) + \varepsilon.$$

Sea  $U_k := \{x \in X \mid d(x, \bar{U}) < \frac{1}{k}\}$ . Entonces  $U_k \downarrow \bar{U}$ . Como  $\mu$  es finita y  $\mu(\partial U) = 0$ ,  $\lim_k \mu(U_k) = \mu(\bar{U}) = \mu(U)$ . Tómese  $k$  tal que  $\mu(U_k) < \mu(U) + \varepsilon$ . Por el lema de Urysohn para  $\bar{U}$  y  $U_k^c$ , existe  $f \in C^0(X)$  con  $I_U \leq f \leq I_{U_k}$ .

2. Si  $U \subset X$  es abierto,  $\mu(\partial U) = 0$  y  $\varepsilon > 0$  sea  $h$  la función obtenida en 1 para  $\bar{U}^c$ . Sea  $g = 1 - h$ . Entonces

$$0 \leq g \leq I_U, \quad y \quad \int g \, d\mu \geq \mu(U) - \varepsilon.$$

( $\Rightarrow$ ). Luego si  $\lim_n \mu_n = \mu$ ,

$$\limsup_n \mu_n(U) \leq \limsup_n \int f \, d\mu \leq \mu(U) + \varepsilon,$$

$$\liminf_n \mu_n(U) \geq \liminf_n \int g \, d\mu \geq \mu(U) - \varepsilon.$$

Haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtenemos que  $\lim_n \mu(U) = \mu(U)$ .

3. Veamos que si  $f \in C^0(X)$  y  $\varepsilon > 0$  entonces existen finitos abiertos  $\{U_i\}$  con  $\mu(\partial U_i) = 0$  y  $a_i \in \mathbb{R}$  tales que para  $g = \sum_i a_i I_{U_i}$ ,

$$(1) \quad \left| \int f \, d\mu - \int g \, d\mu \right| < \varepsilon,$$

$$(2) \quad \lim_n \mu_n(X \setminus \cup_i U_i) = 0.$$

Como  $X$  es compacto,  $f$  es uniformemente continua. Luego existe  $\delta > 0$  tal que  $d(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Sea  $\{B_i\}$  una cobertura finita de  $X$  por abiertos con  $\text{diam}(B_i) < \delta$  y  $\mu(\partial B_i) = 0$ . Sean  $U_k := B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$ ,  $y_k \in U_k$ ,  $a_k := f(y_k)$ . Tenemos que

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \cup_k U_k;$$

$$\mu(X \setminus \cup_k U_k) \leq \sum_i \mu(\partial B_i) = 0.$$

Esto prueba (1), para (2) observe que  $\mu(\cup_k U_k) = 1$ , y

$$\lim_n \mu_n(\cup_k U_k) = \lim_n \mu_n(U_k) = \sum_k \mu(U_k) = \mu(\cup_k U_k) = 1.$$

$$\lim_n \mu_n(X \setminus \cup_k U_k) = 1 - \lim_n \mu(\cup_k U_k) = 0.$$

4. Supongamos que  $\lim_n \mu_n(U) = \mu(U)$ ,  $\forall U \in \mathcal{T}_X$  con  $\mu(U) = 0$ . Si  $f \in C^0(X)$  y  $\varepsilon > 0$  sea  $g$  como en 3. Entonces

$$(3) \quad \lim_n \int g d\mu_n = \int g d\mu.$$

Por el ítem 3, si  $n$  es suficientemente grande,

$$(4) \quad \left| \int f d\mu_n - \int g d\mu_n \right| \leq \left| \int_{\cup_k U_k} (f - g) d\mu_n \right| + \|f\|_0 \mu_n(X \setminus \cup_k U_k) \leq 2\varepsilon.$$

Ahora (1), (3) y (4) implican que  $\lim_n \int f d\mu_n = \int f d\mu$ .

□

1.4.4. **Proposición.**  $\mathcal{P}(X)$  es un espacio métrico compacto.

DEMOSTRACIÓN. Como  $X$  es un espacio métrico compacto, por el Teorema de Stone-Weierstrass en la bola unitaria  $B = \{f \in C^0(X) \mid \|f\|_0 \leq 1\}$  existe un conjunto denso enumerable  $\{f_n\} \subset B$ , con  $f_0 \equiv 1$ . La métrica

$$d(\mu, \nu) := \sum_n \frac{1}{2^n} \left| \int f_n d\mu - \int f_n d\nu \right|$$

induce la topología débil\* en  $\mathcal{P}(X)$ .

Dada una sucesión  $\langle \mu_n \rangle \subset \mathcal{P}(X)$ , probamos que tiene una subsucesión convergente. Definimos la sucesión  $\mu^* : \mathbb{Z} \rightarrow [-1, 1]^{\mathbb{Z}}$  por

$$\mu_n^* = (a_{nj})_{j \in \mathbb{Z}} \quad \text{donde} \quad a_{nj} = \int f_j d\mu_n.$$

Por el Teorema de Tychonoff<sup>3</sup>,  $[-1, 1]^{\mathbb{Z}}$  es compacto. Luego existe una sucesión  $n_k$  tal que existen todos los límites

$$b_j := \lim_k \int f_j d\mu_{n_k}.$$

Observemos que

$$|b_i - b_j| = \left| \lim_k \int (f_i - f_j) d\mu_{n_k} \right| \leq \|f_i - f_j\|_0.$$

Luego podemos extender por continuidad  $F : \langle f_n \rangle \rightarrow [-1, 1]$ ,  $F(f_n) = b_n$  a una funcional lineal  $F : C^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ . De hecho

$$F(g) = \lim_k \int g d\mu_{n_k}, \quad \forall g \in C^0(X).$$

Tenemos que  $F$  es acotada pues  $|a_{nj}| \leq 1$ ,  $\forall n, j$  y que  $F(1) = F(f_0) = 1$ . Por el teorema 1.4.2 de Riesz existe una probabilidad  $\nu \in \mathcal{P}(X)$  tal que  $\int g d\mu = F(g)$ ,  $\forall g \in C^0(X)$ . Además  $\lim_k \mu_{n_k} = \mu$ .

□

<sup>3</sup>Teorema de Tychonoff: el producto cartesiano de espacios compactos es compacto.



1.4.5. **Teorema.** Si  $X$  es un espacio métrico compacto y  $T : X \rightarrow X$  es continua entonces existe una probabilidad boreliana  $T$ -invariante.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos  $x \in X$  y para  $N \in \mathbb{N}^+$  definamos  $\mu_N := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{f^n x}$ . Es decir,

$$\int f d\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)$$

para toda función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Como  $\mathcal{P}(X)$  es compacto existe una subsucesión convergente  $\mu_{N_k}$ . Veamos que  $\mu := \lim_k \mu_{N_k}$  es  $T$ -invariante. Si  $f \in C^0(X)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int (f \circ T) d\mu - \int f d\mu \right| &= \frac{1}{N} |f(T^N x) - f(x)| \\ &\leq \frac{2 \|f\|_{\text{sup}}}{N} \xrightarrow{N} 0. \end{aligned}$$

Los ejercicios 1.4.4, 1.4.1 y el Teorema de Riesz 1.4.2 terminan la prueba.  $\square$

### EJERCICIOS.

- 1.4.8. Muestre  $\mathcal{P}(X)$  y  $\mathcal{M}(T)$ , vistos como subconjuntos del dual  $C^0(X)^*$ , son convexos.
- 1.4.9. Muestre que si  $\#\mathcal{M}(T) > 1$  entonces existe un continuo de probabilidades  $T$ -invariantes.
- 1.4.10. Muestre que la proposición 1.4.3 es falsa si  $\mu(\partial U) \neq 0$ .

### 1.5. Unicidad ergódica.

1.5.1. **Definición.** Decimos que una transformación  $T : X \rightarrow X$  es *únicamente ergódica* sii  $\#\mathcal{M}(T) = 1$ .

Llamamos *suma de Birkhoff* o *media de Birkhoff* o *media temporal* a las siguientes medidas y funciones:

$$\mu_{x,N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \delta_{T^k(x)}, \quad S_N f = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} f \circ T^k,$$

donde  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

Como en el teorema 1.4.4, si  $X$  es compacto, cualquier punto de acumulación de la sucesión  $\mu_{x,N}$  es  $T$ -invariante. Luego si  $T$  es únicamente ergódica y  $\mathcal{M}(T) = \{\nu\}$ , entonces para todo  $x \in X$ ,  $\lim_N \mu_{x,N} = \nu$ . Por

la proposición 1.4.3, para todo abierto  $U \subset X$  con  $\nu(U) = 0$  y todo  $x \in X$   $\lim_N \mu_{x,N}(U) = \nu(U)$ . Es decir,

$$\lim_N \frac{1}{N} \#\{0 \leq k < N \mid f^k(x) \in U\} = \nu(U), \quad \forall x \in X;$$

los puntos de las órbitas de  $T$  se distribuyen como  $\nu$ . Podemos decir más:

**1.5.2. Teorema.** *Si  $X$  es compacto entonces equivalen:*

- I.  $T : X \rightarrow X$  es únicamente ergódica.
- II.  $\forall f \in C^0(X)$ ,  $S_N f$  converge uniformemente a una constante.

DEMOSTRACIÓN. Si  $f \in C^0(X)$  y II es falso, entonces existen  $\varepsilon > 0$ ,  $N_k \rightarrow +\infty$ ,  $x_k, y_k \in X$  tales que  $|S_{N_k} f(x_k) - S_{N_k} f(y_k)| > \varepsilon$ . Existe una subsucesión  $M_\ell$  de  $N_k$  tal que los límites  $\mu = \lim_\ell \mu_{x_\ell, M_\ell}$ ,  $\nu = \lim_\ell \mu_{y_\ell, M_\ell}$  existen. Entonces  $\mu, \nu \in \mathcal{M}(T)$  y  $\mu \neq \nu$  pues  $\mu(f) \neq \nu(f)$ . Luego  $T$  no es únicamente ergódica.

Si  $\{\mu, \nu\} \subset \mathcal{M}(T)$ ,  $\mu \neq \nu$  y vale II, entonces existe  $f \in C^0(X)$  tal que  $\mu(f) \neq \nu(f)$ . Pero por el ejercicio 1.4.5 y II,

$$\lim_N S_N f = \mu(f) \neq \nu(f) = \lim_N S_N f.$$

□

**1.5.3. Teorema.** *Si  $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una rotación irracional, entonces*

$$\mathcal{M}(R_\alpha) = \{ \text{Lebesgue normalizada en } \mathbb{S}^1 \}.$$

*En particular,  $R_\alpha$  es únicamente ergódica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^1)$  la medida de Lebesgue normalizada.

Por el ejercicio<sup>4</sup> 1.4.2,  $\lambda$  es  $R_\alpha$ -invariante.

Si  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y  $C^1$  por pedazos, la serie de Fourier de  $f$  converge uniformemente a  $f$  (vea [, ]). Como estas funciones son densas en  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ , tenemos que las series de Fourier continuas forman un conjunto denso en  $C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ . Por el teorema de Riesz las probabilidades en  $\mathbb{S}^1$  están determinadas por sus integrales sobre series de Fourier.

Para simplificar la notación usaremos funciones continuas  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ . Una base para las series de Fourier es  $\varphi_k(x) = e^{2\pi i k x}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Si

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_k$$

y  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ , tenemos que

$$\int f d\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int \varphi_k d\mu.$$

<sup>4</sup>Muestre que  $\lambda(R_\alpha^{-1}(I)) = \lambda(I)$  para todo intervalo  $I$ . Luego use que los intervalos generan la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{S}^1$ .

Luego los números  $\mu_k := \int \varphi_k d\mu$  determinan  $\mu$ .

Si  $\mu$  es  $R_\alpha$ -invariante, tenemos que  $(R_\alpha)_*(\mu) = \mu$  y entonces

$$\int \varphi_k \circ R_\alpha(x) d\mu(x) = \int e^{2\pi i k(x+\alpha)} d\mu(x) = e^{2\pi i k\alpha} \int e^{2\pi i kx} d\mu(x).$$

$$\mu_k = ((R_\alpha)_*\mu)_k = e^{2\pi i k\alpha} \mu_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Como  $\alpha$  es irracional  $e^{2\pi i k\alpha} \neq 1$  si  $k \neq 0$ . Luego

$$\mu_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{si } k = 0. \end{cases} = \lambda_k.$$

Así,  $\mu = \lambda$ .

□

#### 1.5.4. Corolario.

*Las órbitas de una rotación irracional están uniformemente distribuídas.*

Escribiremos

$$\mu(f) := \int_X f d\mu, \quad \forall f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ } \mu\text{-integrable.}$$

#### EJERCICIOS.

- 1.5.1. Muestre que para  $\varepsilon$  pequeño el homeomorfismo  $f(x) = x + \varepsilon [1 - \cos(2\pi x)]$  de  $\mathbb{S}^1$  es únicamente ergódico pero no topológicamente transitivo.

### 1.6. Homeomorfismos del círculo.

El cubriente universal del círculo  $\mathbb{S}^1$  es la aplicación

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto e^{2\pi ix}.\end{aligned}$$

En las identificaciones  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{S}^1 = [0, 1]/_{0 \equiv 1}$  se escribe  $\pi(x) = x + \mathbb{Z}$ ,  $\pi(x) = x \pmod{1}$  respectivamente.

Si  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es un homeomorfismo, existe un *levantamiento* continuo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1\end{array}$$

conmuta. Dos levantamientos  $F, G$  de  $f$  difieren por una constante entera: i.e.  $\exists k \in \mathbb{Z} : F(x) = G(x) + k, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Un homeomorfismo de  $\mathbb{S}^1$  es siempre estrictamente creciente, i.e.  $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$  o estrictamente decreciente. Nos restringimos al caso en que  $f$  preserva orientación. El ejercicio 1.6.a3 trata el caso en que  $f$  invierte orientación. Cuando  $f$  preserva orientación,  $F$  es creciente y “ $F$  tiene grado 1”, i.e.

$$F(x + 1) = F(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esto implica que

$$F^n(x + m) = F^n(x) + m, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

#### 1.6.a. El número de rotación.

1.6.1. **Teorema.** Si  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es un homomorfismo entonces

(i) El siguiente límite existe y no depende de  $x \in \mathbb{R}$  ni de  $F$ :

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \pmod{\mathbb{Z}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ii)  $\rho(f) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \iff \text{Per}(f) \neq \emptyset$ .

A  $\rho(f)$  lo llamamos *número de rotación* de  $f$

1.6.2. **Definición.** Una sucesión  $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  es *subaditiva* si

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \quad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

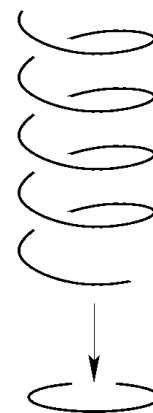


FIG. 4.

y es *casi-subaditiva* si existe  $A > 0$  tal que

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n + A, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

1.6.3. **Lema.** Si  $a_{m+n} \leq a_m + a_n + A, \forall m, n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\exists \lim_n \frac{a_n}{n} = \inf_n \frac{a_n}{n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos  $n \in \mathbb{N}$ , escribimos  $N > n$  como  $N = kn + m$  con  $0 \leq m < n$ . Por la casi-subaditividad,

$$\frac{a_{kn+m}}{kn+m} \leq \frac{a_m + k a_n}{kn+m} + \frac{k A}{kn} \xrightarrow{k \uparrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

Variando el segundo miembro:

$$\limsup_N \frac{a_N}{N} \leq \inf_n \frac{a_n}{n} \leq \liminf_n \frac{a_n}{n}.$$

□

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.6.1.

Suponemos que  $f$  es creciente, si  $f$  es decreciente la prueba es similar.

(i). Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , consideremos

$$G_n(x, y) = (F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)$$

Veamos que

$$(5) \quad |G_n(x, y)| \leq 2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto implicará que el límite  $\rho(f)$  no depende de  $x \in \mathbb{R}$ .

En efecto, observemos que  $G_n$  es  $\mathbb{Z}^2$ -periódica, i.e.

$$G_n(x+k, y+\ell) = G_n(x, y), \quad \forall (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2.$$

Luego basta probar (5) para  $x \in [0, 1]$  y  $x \leq y \leq x+1$ . En este caso

$$\begin{aligned} F^n(x) &\leq F^n(y) \leq F^n(x+1) = F^n(x) + 1, \\ -x-1 &\leq -y \leq -x. \end{aligned}$$

Por tanto

$$F^n(x) - x - 1 \leq F^n(y) - y \leq F^n(x) - x + 1.$$

De esto sigue (5).

Definimos  $a_n := F^n(x) - x$ . Como

$$\begin{aligned} F^{m+n}(x) - x &= F^m(F^n(x)) - F^n(x) + F^n(x) - x \\ &\leq F^m(x) - x + 2 + F^n(x) - x, \end{aligned}$$

tenemos que

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n + 2.$$

Ahora el lemma 1.6.2 implica que el límite  $\rho(f)$  existe.

Si  $F$  y  $G$  son levantamientos de  $f$  entonces los límites  $\rho(F)$ ,  $\rho(G)$  satisfacen  $\rho(F) - \rho(G) \in \mathbb{Z}$ . Luego  $\rho(f) = \rho(F) + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  no depende del levantamiento  $F$ .

(ii).( $\Rightarrow$ ). Si  $x \in \text{Per}(f)$  entonces  $\exists p, q \in \mathbb{Z} : F^q(x) = x + p$ . Aplicando  $F^q$  repetidamente:

$$F^{nq}(x) = x + np.$$

Luego

$$\rho(f) = \lim_n \frac{F^{nq}(x)}{nq} = \frac{p}{q}.$$

( $\Leftarrow$ ). Si  $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , supongamos que  $F^q(x) \neq x + p, \forall x \in \mathbb{R}$ . Entonces  $F^q(x) > x + p, \forall x \in \mathbb{R}$ , o bien,  $F^q(x) < x + p, \forall x \in \mathbb{R}$ . Podemos suponer que vale la primera opción. Como  $G(x) = F^q(x) - x$  es 1-periódica, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$F^q(x) > x + p + \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$F^{nq}(x) > x + n(p + \varepsilon).$$

Así

$$\rho(f) = \lim_n \frac{F^{nq}(x)}{nq} \geq \frac{p + \varepsilon}{q} > \frac{p}{q}.$$

Esto contradice nuestra hipótesis.  $\square$

Si  $\rho(f) = \frac{p}{q}$  es racional entonces  $f^q$  tiene puntos fijos y la dinámica en  $\mathbb{S}^1 \setminus \text{Fix}(f^q)$  es simple: vea la figura 1.6.a y el ejercicio 1.6.a2.

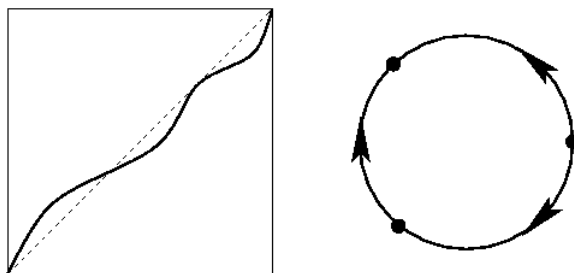


FIGURA 5. Homeomorfismo del círculo con puntos fijos.

Sea  $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$  el conjunto de homeomorfismos de  $\mathbb{S}^1$  provisto de la topología  $C^0$ , inducida por la métrica

$$d_{C^0}(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{S}^1} d(f(x), g(x)).$$

1.6.4. **Proposición.**

- I. El número de rotación  $\rho : \text{Homeo}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{S}^1$  es continuo.  
 II. El número de rotación es invariante por conjugación.

DEMOSTRACIÓN.

I. Observe que

$$(6) \quad r \leq F^q x - x \leq p \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \frac{r}{q} \leq \rho(f) \leq \frac{p}{q},$$

pues

$$nr \leq F^{nq} x - x = \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k+1)q} x - F^{kq} x \leq np.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , sean  $p, q \in \mathbb{N}$  con  $\frac{p-2}{q} < \rho(f) < \frac{p}{q}$  y con  $\frac{1}{q} < \frac{1}{4}\varepsilon$ . Por (6) existe  $x_0$  con  $F^q x_0 - x_0 < p$ .

Para un homeomorfismo  $g$  suficientemente cercano a  $f$  tendremos que  $g$  tiene un levantamiento  $G$  que satisface

$$(7) \quad G^q x_0 - x_0 < p.$$

Sea  $K_q(x) = G^q(x) - x$ . Veamos que

$$(8) \quad |K_q(x) - K_q(y)| \leq 1 \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En efecto, como  $K_q$  es 1-periódica, basta probarlo para  $x \leq y \leq x + 1$ . Y en ese caso,

$$\begin{aligned} G^q x &\leq G^q y && \leq G^q x + 1 \\ -x - 1 &\leq -y && \leq -x \\ K_q(x) &\leq K_q(y) && \leq K_q(x). \end{aligned}$$

Luego de (7) y (8) se obtiene que

$$G^q x - x \leq p + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y por (6) tenemos que

$$\rho(g) \leq \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < \rho(f) + \frac{3}{q} < \rho(f) + \varepsilon.$$

La otra desigualdad se obtiene similarmente.

II. Sea  $h$  una conjugación entre  $f$  y  $g$  y sea  $H$  su levantamiento. Como  $H - I$  es 1-periódica,  $\exists A > 0: |H(z) - z| \leq A, \quad \forall z \in \mathbb{R}$ . Sean  $x \in \mathbb{R}, y := H^{-1}x$ .

$$\begin{aligned} G^n x - x &= HF^n H^{-1}x - HH^{-1}x = HF^n y - Hy, \\ &= (HF^n y - F^n y) + (F^n y - y) - (Hy - y). \end{aligned}$$

El 1er y el 3er términos están acotados por  $A$ . Dividiendo entre  $n$  y tomando límites obtenemos que  $\rho(f) = \rho(g)$ .  $\square$

## EJERCICIOS.

- 1.6.a1. Muestre que para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\rho(f^n) = n\rho(f)$ .
- 1.6.a2. Muestre que si  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  es un homeomorfismo con número de rotación racional  $\rho(f) = \frac{p}{q}$ , entonces todo punto de  $\mathbb{S}^1$  tiene como  $\omega$ -límite una órbita periódica en  $\text{Fix}(f^q)$ .
- 1.6.a3. Muestre que si  $f$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{S}^1$  que invierte orientación, entonces  $\rho(f^2) = 0$ . Describa la dinámica de  $f$  usando el ejercicio 1.6.a2.
- 1.6.a4. Si  $h \in \text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$  y  $H$  es un levantamiento de  $h$ , entonces
- $|H(x) - x| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
  - $|H(x) - H(y)| \leq d(x, y) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$
- 1.6.a5. Si  $f \in \text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$  y  $F$  es un levantamiento de  $f$ , pruebe que equivalen:
- $\frac{p-1}{q} \leq \rho(f) \leq \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}^+, q \neq 0.$
  - $x + p + 1 \leq F^q x \leq x + p, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- 1.6.a6. Use el ejercicio 1.6.a5 para probar que  $\rho : \text{Homeo}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{S}^1$  es continua.



### 1.6.b. Clasificación de Poincaré.

1.6.5. **Definición.** Dadas dos funciones  $f : X \leftrightarrow X$ ,  $g : Y \leftrightarrow Y$ , una *semiconjugación* de  $f$  a  $g$  es una aplicación continua suryectiva  $h : X \rightarrow Y$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

conmuta. Decimos que  $f$  es *semiconjugada* a  $g$ .

Si  $h$  es un homeomorfismo decimos que  $h$  es una *conjugación* y que  $f$  es *conjugada* a  $g$ .

Una conjugación es como un cambio de coordenadas continuo que transporta la dinámica de  $f$  en la de  $g$  vea por ejemplo el ejercicio 1.6.b1. En una semiconjugación decimos que la dinámica de  $g$  es un factor de la dinámica de  $f$ .

1.6.6. **Teorema.** Sea  $f : \mathbb{S}^1 \leftrightarrow \mathbb{S}^1$  es un homeomorfismo con número de rotación  $\rho(f) = \alpha$  irracional.

- I. Existe una semiconjugación monótona

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{R_\alpha} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

a la rotación  $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $R_\alpha(x + \mathbb{Z}) = x + \alpha + \mathbb{Z}$ .

- II. Si  $f$  es topológicamente transitivo,  $h$  es una conjugación.

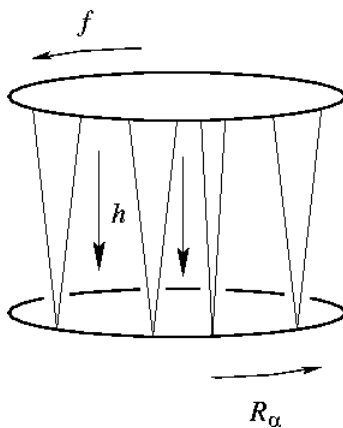


FIGURA 6. Semiconjugación a una rotación irracional.

DEMOSTRACIÓN.

I. Fijemos  $x \in \mathbb{R}$  y un levantamiento  $F : \mathbb{R} \leftrightarrow$  de  $f$ . Podemos suponer que  $f$  preserva orientación. Sean

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}(\alpha) &:= \{n\alpha + m : n, m \in \mathbb{Z}\}, \\ A &:= \{F^n x + m : n, m \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

*Afirmación:* La aplicación  $H : A \rightarrow \mathbb{Z}(\alpha)$ ,  $H(F^n x + m) = n\alpha + m$  es estrictamente creciente.

En efecto, basta probar que la inversa  $H^{-1}$  es estrictamente creciente. Supongamos que

$$(9) \quad n_1 \alpha + m_1 < n_2 \alpha + m_2,$$

pero que

$$(10) \quad F^{n_1} x + m_1 \geq F^{n_2} x + m_2.$$

Las aplicaciones  $F^{-n_2}$  y  $F^{n_1-n_2}$  son crecientes y de grado 1. Aplicando  $F^{-n_2}$  y luego  $F^{n_1-n_2}$  obtenemos

$$\begin{aligned}F^{n_1-n_2} x &\geq x + (m_2 - m_1), \\ F^{k(n_1-n_2)} x &\geq x + k(m_2 - m_1), \quad \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Supongamos que  $n_1 - n_2 > 0$ . Si  $n_1 - n_2 < 0$  la prueba es similar, trabajando en el segundo miembro de (10). Entonces

$$\alpha = \rho(f) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{F^{k(n_1-n_2)}(x) - x}{k(n_1-n_2)} \geq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

Esto contradice (9).

Extendemos  $H$  a  $\mathbb{R}$  por

$$H(y) := \inf\{n\alpha + m : y < F^n x + m\}.$$

Tenemos que  $H$  es creciente y

$$H(y+1) = H(y) + 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Esto implica que  $H$  desciende a una función  $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Además

$$H(F(y)) = \alpha + H(y).$$

Luego  $h \circ f = R_\alpha \circ h$ .

Veremos que  $H$  es continua. Entonces  $h$  será continua. Como  $\alpha$  es irracional, el conjunto  $\mathbb{Z}(\alpha) \subset h(\mathbb{S}^1)$  es denso en  $\mathbb{R}$ . Luego  $h$  será suryectiva.

Veamos que  $H$  es continua. Si  $z_k \uparrow y$  converge a  $y$  por la izquierda, como  $H$  es creciente,

$$\lim_k H(z_k) = \sup_k H(z_k) \leq H(y).$$

Si  $a < H(y)$ , como  $\mathbb{Z}(\alpha)$  es denso en  $\mathbb{R}$ , existen  $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}$  tales que

$$a < n_1 \alpha + m_1 < n_2 \alpha + m_2 < H(y).$$

Entonces

$$F^{n_1}x + m_1 < F^{n_2}x + m_2 \leq y.$$

Para  $k$  grande

$$F^{n_1}x + m_1 < z_k \leq y.$$

Luego

$$a < n_1 \alpha + m_1 \leq H(z_k) \leq H(y).$$

Por tanto  $\lim_k H(z_k) = H(y)$ . El caso  $z_k \downarrow y$  es similar.

II. Si  $h$  es constante en un intervalo  $I$  entonces  $I \cap f^n(I) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ . En ese caso  $f$  no puede ser transitiva. Luego  $H$  es estrictamente creciente y  $h$  es un homeomorfismo. □

### EJERCICIOS.

1.6.b1. Pruebe que si  $h : X \rightarrow Y$  es una conjugación entre  $f$  y  $g$  entonces  $h(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$ ,  $h(\omega(f)) = \omega(g)$  y  $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$ .

1.6.b2. Un intervalo abierto  $]x, y[ \subset \mathbb{S}^1$  es

$$]x, y[ := \{ \pi(z) \mid \tilde{x} < z < \tilde{y} \},$$

donde  $\tilde{x} \in \pi^{-1}\{x\}$ ,  $\tilde{x} \in \pi^{-1}\{x\}$ ,  $\tilde{x} < \tilde{y} < \tilde{x} + 1$ . Muestre que si  $f \in \text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ ,  $m > n$  y  $\rho(f)$  es irracional, entonces la órbita positiva de  $x \in \mathbb{S}^1$  intersecta  $]f^n x, f^m x[$ .

1.6.b3. Si  $\rho(f) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  entonces vale una de las siguientes opciones:

- (a) Todo  $x \in \mathbb{S}^1$  tiene órbita positiva  $\mathcal{O}_f(x)$  densa en  $\mathbb{S}^1$ .
- (b) Para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ ,  $\mathcal{O}_f(x)$  es un conjunto ralo<sup>5</sup> y perfecto<sup>6</sup>.

## 1.7. Difeomorfismos del círculo

Denotamos por  $\text{Diff}_+^1(\mathbb{S}^1)$  el conjunto de difeomorfismos de  $\mathbb{S}^1$  que preservan orientación de clase  $C^1$ .

La *variación total* de una función  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  es

$$\text{Var}(g) := \sup \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})|,$$

donde el supremo se toma sobre todo  $n \in \mathbb{N}$  y toda partición  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$ . Decimos que  $g$  tiene *variación acotada* si  $\text{Var}(g) < \infty$ .

Observe que las funciones Lipschitz, en particular las de clase  $C^1$ , tienen *variación acotada*.

<sup>5</sup>Un conjunto  $A$  es *ralo* o *nunca-denso* sii su clausura no contiene abiertos

<sup>6</sup>Un conjunto  $A$  es *perfecto* sii  $A \subset \text{Acum}(A) =: \overset{\circ}{A}$ .

**1.7.1. Lema.**

Si  $f \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{S}^1)$  e  $J \subset \mathbb{S}^1$  es un intervalo tal que  $J, f(J), \dots, f^N(J)$  son disjuntos, entonces

$$\forall x, y \in J, \quad \frac{Df^N(y)}{Df^N(x)} \leq \exp[\text{Var}(\log Df)].$$

DEMOSTRACIÓN.

Como los intervalos  $]y, x[, f(]y, x[), \dots, f^N(]y, x[)$  son disjuntos,

$$\begin{aligned} \log \frac{Df^N(y)}{Df^N(x)} &= \log \frac{\prod_{k=0}^{N-1} Df(f^k y)}{\prod_{k=0}^{N-1} Df(f^k x)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \log Df(f^k y) - \log Df(f^k x) \\ &\leq \text{Var}(\log Df). \end{aligned}$$

□

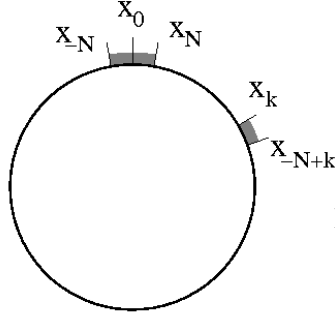


FIG. 7. Intervalos disjuntos.

**1.7.2. Lema.**

Si  $f \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{S}^1)$  y  $\rho(f)$  es irracional, existen infinitos  $n \in \mathbb{N}$  tales que

- I.  $\forall x \in \mathbb{S}^1$  los intervalos  $]x_{-n}, x_0[, ]x_{-n+1}, x_1[, \dots, ]x_0, x_n[$  son disjuntos, donde  $x_k := f^k(x)$ .
- II.  $\forall x \in \mathbb{S}^1, \quad Df^n(x) \cdot Df^{-n}(x) \geq \exp[-\text{Var}(\log Df)].$

DEMOSTRACIÓN.

I. Por la semiconjugación del teorema 1.6.6, los puntos  $x_k = f^k x$  están en el mismo orden que en la rotación  $R_\alpha$ ,  $\alpha = \rho(f)$ . Basta tomar  $n$  tal que  $d(x, R_\alpha^{-n}(x)) < d(x, R_\alpha^k(x))$  para todo  $0 < |k| < n$ . Como  $\alpha$  es irracional y las órbitas de  $R_\alpha$  son densas, existen infinitos de tales  $n$ .

II. Tomamos  $n$  del ítem I. Si  $y = f^{-n}(x)$  aplicando el lema 1.7.1 con  $J = ]f^{-n}x, x[$ ,

$$Df^n(x) \cdot Df^{-n}(x) = \frac{Df^n(x)}{Df^n(y)} \geq \exp[-\text{Var}(\log Df)].$$

□

### 1.7.3. Teorema (Denjoy).

Sea  $f \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{S}^1)$  con  $\alpha = \rho(f)$  irracional y  $\text{Var}(\log Df) < \infty$ . Entonces  $f$  es topológicamente conjugado a la rotación  $R_\alpha$ .

Observe que si  $f \in C^2$  entonces  $\log Df$  tiene variación acotada. Este es nuestro primer ejemplo de variación drástica de la dinámica en términos de la clase de diferenciabilidad de la aplicación.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $f$  no es conjugado a  $R_\alpha$ . Entonces existe un intervalo abierto  $I \subset \mathbb{S}^1$  tal que la conjugación  $R_\alpha$  del teorema 1.6.6 lo colapsa:  $\#h(I) = 1$ . Observe que todos los iterados  $f^n(I)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  son disjuntos y por tanto  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell(f^n(I)) < \infty$ .

Si  $n \in \mathbb{N}$  es como en el lemma 1.7.2II, tenemos que

$$\begin{aligned} \ell(f^n(I)) + \ell(f^{-n}(I)) &= \int_I Df^n(x) + Df^{-n}(x) \, dx \\ &\geq \int_I \sqrt{Df^n(x) \cdot Df^{-n}(x)} \, dx \\ &\geq \exp\left[-\frac{1}{2} \text{Var}(\log Df)\right] \cdot \ell(I) =: A > 0. \end{aligned}$$

Como existen infinitos de tales  $n$ , esto contradice que  $\sum_n \ell(f^n(I)) < \infty$ .

□

### 1.7.4. Ejemplo de Denjoy.

Para todo  $\alpha$  irracional existe  $f \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{S}^1)$  no transitivo con  $\rho(f) = \alpha$ .

DEMOSTRACIÓN.

1. Escojamos números  $\ell_n > 0$  tales que

- (a)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1$ .  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$ .

La segunda condición (1b) se usa para hacer que  $f$  sea continuamente diferenciable.

2. Coloquemos intervalos  $I_n = [a_n, b_n]$  de longitud  $\ell_n$  en  $\mathbb{S}^1$  dispuestos en el mismo orden que la órbita de 0 por la rotación  $R_\alpha$ , i.e.  $a_0 = 0$ ,

$$a_n = \sum_{\{k \in \mathbb{Z} \mid R_\alpha^k(0) < R_\alpha^n(0)\}} \ell_k, \quad b_n = a_n + \ell_n.$$

Observe que los intervalos  $I_n$  son disjuntos,  $\mathbb{S}^1 \setminus \cup_n I_n$  tiene medida cero y  $\cup_n I_n$  es denso en  $\mathbb{S}^1$ .

3. Construimos primero  $g = Df$ . Sea  $g|_{I_n}$  una función continua tal que

$$g > 0, \quad g(a_n) = g(b_n) = 1, \quad \int_{I_n} g = \ell_{n+1}.$$

La extendemos a una función continua  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g|_{\mathbb{S}^1 \setminus \cup_n I_n} = 1$ .

4. Definimos  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  por

$$f(x) = a_1 + \int_{a_0}^x g(t) dt.$$

Tenemos que  $f(I_n) = I_{n+1}$ ,  $f \in \text{Diff}_+^1(\mathbb{S}^1)$  pues  $Df = g > 0$  es  $C^0$ . La órbita  $\langle a_n \rangle$  de  $a_0$  tiene el mismo orden que  $\langle R_\alpha^n(0) \rangle$ , luego

$$|F^n a_0 - n \alpha| \leq 1$$

para un levantamiento  $F$  de  $f$ . Esto implica que  $\rho(f) = \alpha$ . Además  $f$  no es transitivo (ejercicio 1.7.1).

□

#### EJERCICIOS.

1.7.1. Muestre que en el ejemplo de Denjoy  $f$  no es transitivo y que  $\Lambda = \mathbb{S}^1 \setminus \cup_n ]a_n, b_n[$  es un conjunto cerrado, invariante, perfecto y de medida cero.

## Bibliografía.





## Índice de cuadros.



## Índice de figuras.

1	Sección de Poincaré.	9
2	Suspensión de una aplicación.	9
3	Rotación racional.	10
4	Cubriente universal de $\mathbb{S}^1$ .	20
5	Homeomorfismo del círculo con puntos fijos.	22
6	Semiconjugación a una rotación irracional.	25
7	Sección de Poincaré.	28



## Índice alfabético.

$C^0(X) = C^0(X, \mathbb{R})$ , 14  
 $C^0(X)^*$ , 17  
 $S_N f$ , 17  
 $\text{Fix}(f)$ , 7, 22  
 $\text{Per}(\phi)$ , 8  
 $\text{Per}(f)$ , 7, 20  
 $\alpha(x)$ , 7, 8  
 $\mathcal{M}(T)$ , 14  
 $\mathcal{T}_X$ , 13  
 $\delta_p$ , 13  
 $\text{Diff}_+^1(\mathbb{S}^1)$ , 26  
 $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ , 22  
 $\|f\|_0$ , 14  
 $\|f\|_{\text{sup}}$ , 14  
 $\mu(f)$ , 19  
 $\mu_{x.N}$ , 17  
 $\omega(x)$ , 7, 8  
 $\rho(f)$ , 20  
 $d_{C^0}(f, g)$ , 22  
 $f_*(\mu)$ , 13  
 $\mathcal{P}(X)$ , 14

### A

$\alpha$ -límite, 7, 8  
 $\alpha(x)$ , 7, 8  
adherencia, 7  
aplicación  
de grado 1, 20  
de Poincaré, 9  
de primer retorno, 9  
iteración de, 7  
minimal, 11

### B

Birkhoff  
media de, 17  
 $S_N f$ , 17  
suma de, 17  
 $S_N f$ , 17

### C

círculo  
cubriente universal, 20  
difeomorfismos del, 26–29  
homeomorfismos del, 20–26  
clasificación  
de Poincaré, 24  
compacidad  
de  $\mathcal{P}(X)$ , 16  
conjugación, 23  
conjunto  
invariante, 11  
minimal, 11  
no-errante, 8  
perfecto, 26n  
ralo, 26n  
cubriente universal  
del círculo, 20

### D

delta  
de Dirac, 13  
 $\delta_p$ , 13  
Denjoy  
ejemplo de, 28  
teorema de, 28  
difeomorfismo  
del círculo, 26–29  
 $\text{Diff}_+^1(\mathbb{S}^1)$ , 26  
Dirac  
delta de, 13  
 $\delta_p$ , 13

### E

ejemplo  
de Denjoy, 28  
empuje  
de una medida, 13  
 $f_*(\mu)$ , 13  
ergódica

únicamente, 17, 17–19  
 ergodicidad  
 única, 17, 17–19  
 errante, 8  
 existencia  
 de medidas invariantes, 17

**F**

factor, 24  
 flujo, 8  
 suspendido, 9  
 tiempo  $t$  del, 8  
 vertical, 9  
 Fourier  
 serie de, 18  
 función  
 $\mathbb{Z}^2$ -periódica, 21  
 1-periódica, 21  
 de grado 1, 20  
 de variación acotada, 26  
 iteración de, 7  
 Lipschitz, 26  
 minimal, 11  
 techo, 9  
 tiempo de retorno, 9

**G**

grado 1, 20

**H**

homeomorfismo  
 del círculo, 20–26  
 $\text{Homeo}(\mathbb{S}^1)$ , 22

**I**

intervalo  
 en  $\mathbb{S}^1$ , 26  
 invariancia  
 de  $\rho(f)$ , 20  
 por conjugación, 20  
 invariante  
 conjunto, 11  
 para el futuro, 11  
 +invariante, 11  
 iteración  
 de aplicaciones, 7

**J****K****L**

lema  
 de Urysohn, 15

levantamiento, 20  
 Lipschitz, 26

**LL****M**

métrica  
 $C^0$ , 22  
 $d_{C^0}(f, g)$ , 22  
 en  $\mathcal{P}(X)$ , 16  
 media  
 de Birkhoff, 17  
 $S_N f$ , 17  
 temporal, 17  
 $S_N f$ , 17  
 medida  
 de Lebesgue, 18  
 invariante, 13  
 de una órbita periódica, 13  
 existencia, 17  
 unicidad, 17  
 minimal, 11

**N**

número  
 de rotación, 20  
 $\rho(f)$ , 20  
 invariancia por conjugación, 20  
 no-errante, 8  
 norma  
 $C^0$ , 14  
 $\|f\|_0$ , 14  
 $\|f\|_{\text{sup}}$ , 14  
 supremo, 14

 **$\tilde{N}$** **O**

órbita, 7, 8  
 periódica, 7, 8

**P**

perfecto, 26n  
 Poincaré  
 aplicación de, 9  
 clasificación de, 24  
 sección de, 9  
 pre-órbita, 7  
 probabilidad  
 invariante, 13  
 punto  
 errante, 8  
 fijo, 7, 22

no-errante, 8  
 periódico, 7, 8, 20  
 recurrente, 8  
 push-forward  
 de una medida, 13  
 $f_*(\mu)$ , 13

**Q**

**R**  
 ralo, 26n  
 recurrente, 8  
 Riesz, 14, 18  
 rotación, 10  
 irracional, 10  
 unicidad ergódica, 18  
 semiconjugación a una, 24  
 número de, 20  
 $\rho(f)$ , 20  
 racional, 10

**S**  
 sección  
 de Poincaré, 9  
 transversal, 9  
 semiconjugación, 23  
 a rotación irracional, 24  
 semiconjugado, 23  
 semigrupo, 11n  
 serie  
 de Fourier, 18  
 Stone-Weierstrass, 16  
 subgrupo  
 de  $S^1$ , 10  
 sucesión  
 casi-subaditiva, 20  
 subaditiva, 20  
 suma de Birkhoff, 17  
 suspensión, 9

**T**  
 techo, 9  
 teorema  
 de clasificación de Poincaré, 24  
 de Denjoy, 28  
 de Riesz, 14, 18  
 de Stone-Weierstrass, 16  
 de Tychonoff, 16n  
 tiempo de retorno, 9  
 topológicamente  
 transitiva, 11  
 topología, 13  
 $C^0$ , 14, 22

de convergencia uniforme, 14  
 debil\*, 14  
 Tychonoff, 16n

**U**  
 unicidad  
 ergódica, 17, 17–19  
 de la rotación irracional, 18  
 Urysohn, 15

**V**  
 variación  
 acotada, 26  
 total, 26

**W**  
 Weierstrass  
 Stone-Weierstrass, 16

**X**

**Y**

**Z**

**$\Omega$**   
 $\omega$ -límite, 7, 8  
 $\omega(x)$ , 7, 8