El Proceso de Ramificación Continua

Juan Carlos Pardo Millán *

El propósito de este trabajo es el de presentar de manera detallada la construcción y existencia de un proceso estocástico que cumple con la propiedad fuerte de Markov, el cual es una generalización a tiempo y espacio de estados continuo de los procesos de Galton-Watson.
Dicha construcción se realiza vía sus probabilidades de transición y el semigrupo asociado a ellas.
Definición 1 : Una familia $\{P_t(x, E) : t \geq 0\}$ de funciones será llamada una función de ramificación continua o C.B. función si satisface las siguientes condiciones:

i) $P_t(x, E)$ está definida para $t \geq 0$, $x \geq 0$ y E un subconjunto de Borel de la semi-recta $[0, \infty)$.

$$P_t : \mathbb{R}^+ * \mathcal{B}([0, \infty)) \longrightarrow [0, 1] \qquad \text{para cada} \qquad t \geq 0.$$

ii) Para x y t fijas, $P_t(x, \cdot)$, es una medida de probabilidad; y para un conjunto E fijo, $P_t(x, E)$ es conjuntamente medible en x y t.

iii) La ecuación de Chapman-Kolmogorov, es decir,

$$P_{t+s}(x, E) = \int_0^\infty P_t(u, E) P_s(x, \mathrm{d}u).$$

iv) Para cualquier $x, y, t \geq 0$, $\{P_t\}$ satisface

$$\begin{aligned} P_t(x + y, E) &= \int_0^\infty P_t(x, E - u) P_t(y, \mathrm{d}u) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty 1_E(v + w) P_t(x, \mathrm{d}v) P_t(y, \mathrm{d}w) \end{aligned}$$

para cada $E \in \mathcal{B}([0, \infty))$.

v) Existen $t > 0$ y $x > 0$ tales que $P_t(x, \{0\}) < 1$.

Como una primera observación tenemos que por la propiedad (iv) se satisface

$$\int_0^\infty f(u)P_t(x+y,\mathrm{d}u) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(v+w)P_t(x,\mathrm{d}v)P_t(y,\mathrm{d}w)$$

para cualquier función f medible y acotada.
Si analizamos estas condiciones notamos que las primeras tres corresponden a la definición de función de transición de Markov. La propiedad (iv) no es más que la propiedad de ramificación ya que si el proceso empieza en el punto $x+y$ el proceso resultante es equivalente a la suma de dos procesos, uno que empieza en x y otro que empieza en y. Finalmente la propiedad (v) elimina el caso trivial, en el cual el proceso empieza en cualquier punto $x \geq 0$, muere instantáneamente y permanece ahí.
Esta función de transición dará lugar a un proceso de Markov fuerte en los reales no negativos, al cual llamaremos proceso de ramificación continua o C.B. proceso.
Para continuar con la construcción del C.B. proceso es necesario introducir la definición de medidas de probabilidad infinitamente divisibles.
Definición 2 : Una distribución de probabilidad μ, se dice que es infinitamente divisible si para cualquier entero positivo n, la distribución μ se puede escribir como la n-ésima convolución de alguna otra distribución de probabilidad μ_n, es decir, $\mu = (\mu_n *)^n$.
Sea $\{P_t(x,E)\}$ una C.B. función; por la propiedad (iv) es claro que para cada pareja (x,t) la medida $P_t(x,E)$ es infinitamente divisible, ya que dadas $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$

$$P_t(x,E) = P_t\Big(\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n},E\Big) = \Big[P_t\Big(\frac{x}{n},E\Big)*\Big]^n.$$

La transformada de Laplace de $P_t(x,E)$ está dada por

$$\Psi_t(x,\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda y}P_t(x,\mathrm{d}y) \qquad \lambda \geq 0.$$

Por la propiedad (iv) y por la observación ya descrita, es fácil ver que $\Psi_t(x,\lambda)$ satisface la siguiente relación

$$\Psi_t(x+y,\lambda) = \Psi_t(x,\lambda)\Psi_t(y,\lambda).$$

Sabemos por la propiedad (ii) que para t y λ fijas, $\Psi_t(x,\lambda)$ es una función medible de x. Además es claro que $\Psi_t(x,\lambda)$ es monótona decreciente en x, de aquí podemos concluir que para cada t y λ existe un número $\psi_t(\lambda)$ tal que

$$\Psi_t(x, \lambda) = e^{-x\psi_t(\lambda)}. \tag{1}$$

Usando la propiedad (iii), podemos ver que $\{\psi_t(\lambda)\}$ satisface

$$\psi_{t+s}(\lambda) = \psi_t(\psi_s(\lambda)) \qquad \text{para toda} \qquad \lambda > 0. \tag{2}$$

Ésta es la forma análoga de la iterada de la función generadora del proceso de Galton-Watson.
Para ir de una función de transición $\{P_t(x, E)\}$ a su correspondiente proceso de Markov, se utilizan las herramientas de la Teoría de Semigrupos, entonces es necesario definir un operador integral para la C.B. función, el cual, como se verá en un momento resultará un semigrupo.
Para cualquier función medible y acotada f en $[0, \infty)$ vamos a definir

$$(T_t f)(x) = \int_0^\infty f(y) P_t(x, \mathrm{d}y).$$

Como resultado tenemos a una familia de operadores lineales y acotados $\{T_t; t \geq 0\}$, de norma unitaria en el espacio de Banach L de funciones medibles y acotadas en $[0, \infty)$ con la norma $||f|| = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$.
De la ecuación de Chapman-Kolmogorov tenemos que $\{T_t\}$ satisface la relación

$$T_{t+s} = T_t T_s$$

esta propiedad del operador integral nos dice que la familia $\{T_t\}$ es un semigrupo.
Lema 1 : Una C.B. función satisface

$$P_t(x, \{0\}) < 1 \qquad \text{para todas} \qquad t, x > 0 \qquad \text{y} \qquad P_t(0, \{0\}) = 1.$$

Demostración : Sabemos que $P_t(x, \{0\})$ es una medida de probabilidad en $\mathcal{B}\big([0, \infty)\big)$, puede suceder que $P_t(x, \{0\}) > 0$ o que $P_t(x, \{0\}) = 0$.
En cualquier caso se tiene

$$e^{-x\psi_t(\lambda)} = P_t(x, \{0\}) + \int_{0^+}^\infty e^{-\lambda y} P_t(x, \mathrm{d}y).$$

Tomamos el límite cuando λ tiende a infinito en ambos lados, y

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{-x\psi_t(\lambda)} = P_t(x, \{0\}) + \lim_{\lambda \to \infty} \int_{0^+}^\infty e^{-\lambda y} P_t(x, \mathrm{d}y).$$

Es claro que si $y > 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda y} = 0$. De esta manera podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada, con lo cual obtenemos que para todas $x, \lambda, t > 0$ se cumple

$$\exp\left\{ -x \lim_{\lambda\to\infty} \psi_t(\lambda) \right\} = P_t(x, \{0\}). \tag{3}$$

Por la hipótesis (v) sabemos que existen $x_0, t_0 > 0$ tales que $P_{t_0}(x_0, \{0\}) < 1$, de donde vemos

$$\begin{aligned} \exp\left\{ -x_0 \lim_{\lambda\to\infty} \psi_{t_0}(\lambda) \right\} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -x_0 \lim_{\lambda\to\infty} \psi_{t_0}(\lambda) < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{\lambda\to\infty} \psi_{t_0}(\lambda) > 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que $P_{t_0}(x, \{0\}) < 1$ para cualquier $x > 0$.
Ahora sea $r > 0$ de tal manera que $r > t_0$ y $s = r - t_0$, entonces

$$P_r(x, \{0\}) = \int_0^\infty P_{t_0}(u, \{0\}) P_s(x, \mathrm{d}u)$$

como sabemos que $P_{t_0}(u, \{0\}) < 1$ para cualquier $u > 0$, concluimos que $P_r(x, \{0\}) < 1$ para toda $r > t_0$.
Si $0 < r < t_0$ podemos afirmar que existe n tal que $(t_0/n) < r$; basta ver que $P_{t_0/n}(x, \{0\}) < 1$ para una $x > 0$, en consecuencia tendremos que vale para toda $x > 0$; y por un razonamiento análogo al anterior obtendremos que $P_r(x, \{0\}) < 1$.
Por definición tenemos que

$$P_{t_0}(x, \{0\}) = \int_0^\infty P_{t_0/n}(u, \{0\}) P_{(n-1)t_0/n}(x, \mathrm{d}u) < 1$$

Supongamos que $P_{\frac{t_0}{n}}(u, \{0\}) = 1$ para toda $u > 0$, en consecuencia se tendría que $P_{t_0}(x, \{0\}) = 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $P_{t_0/n}(x, \{0\}) < 1$ para una $x > 0$.
De esta manera queda probado que $P_t(x, \{0\}) < 1$ para todas $t, x > 0$. Para mostrar que $P_t(0, \{0\}) = 1$ basta sustituir $x = 0$ en la relación (3). ■
Para la demostración del siguiente teorema es necesario definir el espacio de las funciones continuas que se van a cero cuando x se va a infinito, al cual denotaremos por C_0, es decir,

$$C_0 = \left\{ f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \text{ continua} \;\middle|\; \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \right\}.$$

Teorema 1 : Si $\{P_t(x,E)\}_{t\geq 0}$ es una C.B. función , el operador

$$T_t f(x) = \int_0^\infty f(y) P_t(x, \mathrm{d}y)$$

define un semigrupo de contracción en el espacio C_0, es decir, si $f \in C_0$ entonces $T_t f \in C_0$.

Demostración : Primero vamos a ver que $T_t f$ define un semigrupo de contracción, es decir que cumple con

$$||T_t f|| \leq ||f||.$$

Sabemos que

$$|T_t f(x)| = \left| \int_0^\infty f(y) P_t(x, \mathrm{d}y) \right| \leq \int_0^\infty \big|f(y)\big| P_t(x, \mathrm{d}y)$$

$$\leq \int_0^\infty \big|\big|f\big|\big| P_t(x, \mathrm{d}y) \leq ||f||.$$

Si al lado izquierdo de la desigualdad le aplicamos el supremo sobre todas las $x \in [0, \infty)$, obtenemos el resultado.
Ahora solamente es necesario mostrar que T_t "vive" en el espacio C_0. Si $f(x)$ es de la forma $f(x) = e^{-\lambda x}$, $T_t f(x)$ es una función continua en x, ya que el lado derecho de (1) es continua en x.
Por el teorema de continuidad para la transformada de Laplace-Stieltjes, es claro que $T_t f(x)$ es continua en x para toda $f \in C_0$.
Lo único que nos hace falta ver es que

$$\lim_{x \to \infty} T_t f(x) = 0.$$

Por el lema anterior tenemos que $\psi_t(\lambda) > 0$ para cada $\lambda > 0$, entonces cuando x tiende a infinito la transformada de Laplace de $P_t(x, \cdot)$ tiende a cero para $\lambda > 0$. Esto implica que la medida $P_t(x, \cdot)$ tiene su masa en infinito, en consecuencia tenemos que $T_t f(x)$ tiende a cero. ■
Para demostrar que la C.B. función es estocásticamente continua voy a necesitar las siguientes definiciones.

Definición 3 : Sea $\mathcal{E}$ un espacio métrico, $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel. Una función de transición $P(t, x, \Gamma)$, donde $\Gamma \in \mathcal{B}$, en $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ se dice estocásticamente continua si

$$\lim_{t \to 0^+} P(t, x, N_\epsilon(x)) = 1 \qquad \text{para todas } \epsilon > 0, x \in \mathcal{E}$$

donde $N_\epsilon(x) = \{y \in \mathcal{E} : \rho(y,x) < \epsilon\}$ y ρ es una métrica.
Si este límite se cumple uniformemente en x para cada $\epsilon > 0$ fija, la función de transición es llamada estocástica y uniformente continua.
Definición 4 : Sea E un intervalo arbitrario. Una función u_t, donde $t \in E$, con valores en un espacio de Banach L es llamada medible débilmente si para cualquier funcional lineal l, $l(u_t)$ es una función numérica medible con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{B}_E$ generada por todos los subintervalos de E.
Definición 5 : Sea L un espacio de Banach. Sea u_t, donde $a \leq t \leq b$, una función con valores en L. Vamos a decir que la función u_t es fuertemente continua en el punto t si

$$\lim_{h \to 0} ||u_{t+h} - u_t|| = 0.$$

Teorema 2 : Una C.B. función es estocásticamente continua.
Demostración : Vamos a entender por continuidad estocástica que para cada x, la medida $P_t(x,\cdot)$ converge débilmente a una unidad de masa en x cuando t tiende a 0^+. Observemos que, por la propiedad (ii), la función

$$g(t) = \int_0^\infty \mu(\mathrm{d}x) \int_0^\infty f(y) P_t(x, \mathrm{d}y)$$

es medible en $t > 0$ para cualquier medida de Borel finita μ en $[0,\infty)$ y cualquier $f \in C_0$. Esto es equivalente a la afirmación de que el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es medible débilmente. Por un resultado conocido se tiene que la medibilidad débil implica que $\{T_t\}$ es en efecto fuertemente continua para $t > 0$.
Fijándonos en el caso $f(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, la continuidad fuerte implica que la función $\psi_t(\lambda)$ es continua en $t > 0$ para cada λ fija. Usando la relación (2) vemos que esto se puede escribir como

$$\lim_{h \to 0^+} \psi_h(\psi_t(\lambda)) = \psi_t(\lambda)$$

para cada $t > 0$, $\lambda > 0$. En otra palabras

$$\lim_{h \to 0^+} \psi_h(u) = u$$

para cada número u, el cual puede ser representado como $\psi_t(\lambda)$ para alguna t y para alguna λ. Pero por la ecuación (1) y por el lema ya visto, el conjunto formado por los valores de u, contiene algún intervalo $[0,a]$, $a > 0$. De esta manera para cada x y cada $\lambda \in [0, a]$, la transformada de Laplace de $P_h(x, \cdot)$ converge a $e^{-x\lambda}$ cuando h tiende a 0^+, entonces aplicando el teorema de continuidad tenemos la conclusión a la cual se quería llegar. ■

Mostrando que una C.B. función es estocásticamente continua y que mapea el espacio de las funciones continuas en $[0, \infty)$ que se van a cero cuando x se va a infinito, en él mismo, se obtiene que la C.B. función tiene asociado un proceso de Markov fuerte, al cual como ya se había mencionado llamaremos C.B. proceso.

Bibliografía.

[1] Athreya, K. B.; Ney, P. E. ***Branching Processes***, Springer-Verlag, 1972.

[2] Jirina, M. ***Stochastic Branching Processes whit Continuos State Space***, Czech. Math. J., 8 (1958) 292 – 313.

[3] Lamperti, Jhon ***Continuos State Branching Processes***, Bull. Am. Math. Soc., 73 (1967) 382 – 386.

[4] Lamperti, Jhon ***The Limit of a Sequence of Branching Processes*** , Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 7 (1967) 271 – 288.

* **Estudiante de Maestría.**
Asesor: Dra. María Emilia Caballero Acosta.
Temas de interés: Probabilidad y Procesos Estocásticos.
Fecha de paticipación en el seminario: 7 de junio de 2000.