Relación entre los Procesos de Ramificación y los Procesos de Lévy

Índice general

Introducción

En este trabajo se estudian los procesos de ramificación y la relación de estos con los procesos de Lévy, nuestro objetivo principal es el de presentar de manera detallada dicha relación, ya que pocos libros básicos mencionan esto. Esta relación es importantisima ya que es el preámbulo del estudio de los superprocesos.

Hay una manera de clasificar a los procesos de ramificación de acuerdo con su condición crítica, su parámetro del tiempo, el caso sencillo o multiple de partículas, el caracter Markoviano o no Markoviano, etc. Nosotros solamente nos limitamos al estudio del caso Markoviano y sencillo, pero en cada capítulo vamos cambiando el parámetro tiempo y el espacio de estados, así por ejemplo en el primer capítulos analizamos el caso de tiempo y espacio de estados discreto, en el segundo el caso de espacio de estados discreto y tiempo continuo y por último el caso de espacio de estado y tiempo contuinuo.

En el capítulo uno se desarrolla un poco de la teoría del proceso de Galton-Watson,el cual es el proceso de ramificación mas sencillo, básicamente damos su definición, su construcción, sus momentos, algunos ejemplos y por último la probabilidad de extinción del procesos. En el capítulo dos analizaremos a el proceso Markoviano de ramificación a tiempo cotinuo, el cual no es más que una extensión del proceso de Galton-Watson. Hay que señalar que dicho análisis no es tan simple como en el caso del proceso de Galton-Watson, pero aun así se pueden obtener sus momentos y la probabilidad de extinción.

El capítulo tres y cuatro son la parte más importante de este trabajo y estan basados en los trabajos hechos por Lamperti y Silverstein. En el capítulo tres se hace un estudio del proceso de ramificación continua. En dicho estudio vemos la construcción del proceso, su existencia, sus momentos, que es un proceso de difusión, su probabilidad de extinción y lo mas importante, que se puede ver como un proceso límite de procesos de Galton-Watson. Por último en el cuarto capítulo vemos la relación entre el proceso de ramificación continua y el proceso de Lévy con saltos no negativos.

Además se agregan dos apéndices con material auxiliar para el desarrollo de este trabajo.

Capítulo 1

El Proceso de Ramificación de Galton-Watson.

1.1. Introducción.

Fue en 1874 cuando Francis Galton y H. W. Watson trabajaron en el problema de extinción de familias, mostrando como la probabilidad puede ser aplicada al estudio de los efectos del azar en el desarrollo de familias o poblaciones. Lamentablemente este primer trabajo tenía una hipótesis que no podía ser aceptada, ya que asumía que las familias distinguidas son más dadas a desaparecer que las ordinarias. Es así como Galton vuelve a plantear el problema de la siguiente manera:

> *Sean p_0, p_1, p_2,..., las respectivas probabilidades de que un hombre tenga 0, 1, 2,..., hijos varones; donde cada hijo varón tiene las mismas probabilidades que sus padres de tener hijos varones; y así sucesivamente.¿Cuál es la probabilidad de que la línea masculina se extinga después de r-generaciones? O de una manera más general ¿Cuál es dicha probabilidad para un número de descendientes en la linea masculina de una generación dada?*

Este planteamiento da nacimiento al estudio de los procesos de ramificación. Estos trabajos fueron olvidados por varios años, pero fueron retomados extensivamente entre los años veinte y treinta de este siglo por su gran interés matemático y como una base teórica para estudios de poblaciones de individuos como serian: genes, neutrones o rayos cósmicos.

La primera correcta y completa determinación de la probabilidad de extinción para dicho proceso fue dada por J. F. Steffenson (1930, 1932). Después el modelo fue retomado por Kolmogorov y Dimitriev (1938), los cuales aumentaron notablemente su estudio y le dieron el nombre de los Procesos de Ramificación.
En este capítulo estudiaremos el proceso de ramificación más simple como una introducción al estudio de los procesos de ramificación más generales. El objetivo principal es el de mostrar con claridad el modelo, así como algunas de sus propiedades que nos serán de gran utilidad en los siguientes capítulos; además vamos a resolver el problema de extinción de familias, que es el tema principal en este capítulo.

1.2. Definición.

Para empezar con el estudio de este modelo, es necesario imaginar individuos que puedan generar nuevos individuos del mismo tipo, por ejemplo: el hombre, las bacterias reproduciéndose o neutrones en una reacción en cadena.
Primero vamos a empezar con un conjunto inicial de individuos, al cual llamaremos generación cero, si estos individuos tienen descendientes, estos nuevos integrantes van a conformar a la primera generación y los descendientes de esta primera generación van a conformar a la segunda generación y así sucesivamente. Es necesario aclarar que se estudiará al proceso de ramificación de Galton-Watson más simple.
Hay que hacer notar que seguiremos con atención el tamaño de las generaciones sucesivas, no el tiempo al cual cada individuo nace; así como tampoco la relación familiar de cada individuo.
Vamos a denotar por Z_0, Z_1, Z_2,..., como el número de individuos de la generación cero, primera generación, segunda generación, ... También vamos a agregar las siguientes dos hipótesis:

i) Si el tamaño de la n-ésima generación es conocido, entonces la ley de probabilidades que gobierna a las generaciones siguientes, no depende del tamaño de las generaciones previas a la n-ésima; en otras palabras Z_0, Z_1, Z_2,... forma una cadena de markov.

ii) La cadena de Markov considerada en este capítulo, tiene una propiedad especial, la cual consiste en que diferentes individuos no interfieren con los otros; en el sentido de que el número de descendientes de un individuo no depende en cuantos otros individuos estan presentes.

1.3. Descripción matemática.

Sean Z_0, Z_1, Z_2,..., variables aleatorias. Interpretaremos a Z_n como el número de individuos en la n-ésima generación; durante todo este capítulo vamos a suponer que el proceso inicia con un solo individuo, o de otra manera tenemos que $Z_0 = 1$.
Además vamos a definir $\{X_{i,n} : n \geq 1, i \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, las cuales representan el número de descendientes que puede tener el i-ésimo individuo de la n-ésima generación.
De esta manera vamos a escribir a Z_{n+1} como:

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n+1}$$

Por esta última relación vemos que si $Z_n = 0$, la suma siempre va a ser cero, en consecuencia vamos a afirmar que el cero es un estado absorbente.

Denotaremos por $\mathbb{P}$ como la medida de probabilidad del proceso. Entonces la función masa de probabilidad de X_i esta dada por:

$$\mathbb{P}\Big(X_{i,n} = k\Big) = \rho_k \qquad \text{para toda } k, n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = 1$$

donde ρ_k es la probabilidad de que un individuo de la n-ésima generación tenga k hijos.
Con toda esta información podemos obtener una probabilidad de transición para el proceso que denotaremos por P_{ij} la cual representa la probabilidad de que en la $(n+1)$-ésima generación haya j individuos dado que en la generación pasada (n-ésima) la población total era de i individuos. La probabilidad de transición para toda $i, j, n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ esta dada por:

$$P_{ij} = \mathbb{P}\Big(Z_{n+1} = j | Z_n = i\Big) = \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{i} X_{k,n+1} = j\Big)$$

1.4. La Función Generadora para el Proceso de Ramificación.

Definiremos a la función generadora para la variable aleatoria X_1 como:

$$f_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k s^k \qquad \text{donde} \qquad s \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

La función generadora para la variable aleatoria Z_n la vamos a definir como:

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) s^k \qquad \text{para toda } n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Como vamos a tener que $\mathbb{P}\Big(Z_0 = 1\Big) = 1$ en este capítulo, o al menos que se diga lo contrario, entonces podemos obtener la siguiente relación

$$f_0(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_0 = k) s^k = s$$

y podemos notar que la variable aleatoria Z_1 se distribuye igual que la variable aleatoria X_1 entonces

$$f_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k) s^k = f_X(s).$$

Teorema 1.4.1 (Funciones Generadoras)**.** *Sean $X_1, X_2, X_3, \dots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con valores en los enteros, y sea N otra variable aleatoria independiente de la sucesión $\{X_i\}_{i \geq 1}$ y con valores en los enteros positivos, entonces la variable aleatoria $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$ tiene por función generadora a:*

$$f_Y(s) = f_N(f_{X_1}(s)).$$

Demostración. Primero vamos a hacer una partición en el espacio de estados Ω, donde $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{N = n\}$ y definamos a $\mathbb{1}_A$ como la función indicadora del conjunto $A \subset \Omega$, es decir $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si y sólo si $x \in A$; si utilizamos el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\begin{aligned} f_Y(s) = \mathbb{E}[s^Y] &= \mathbb{E}\left[s^{\left(\sum_{k=1}^{N} X_k\right)} \mathbb{1}_\Omega\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} s^{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)} \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[s^{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)} \mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] \end{aligned}$$

Usando el hecho de que $\{X_i\}_{i\geq 1}$ son independientes entre sí e independientes de la variable aleatoria N, e identicamentes distribuidas tenemos que

$$\begin{aligned}
f_Y(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{n} s^{X_k}\Big]\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}[s^{X_k}]\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\mathbb{E}[s^{X_1}]\Big)^n \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty}[f_X(s)]^n\mathbb{P}(N=n) \\
&= f_N(f_X(s))
\end{aligned}$$

■

Para obtener la función generadora del proceso en la $(n+1)$-ésima generación es necesario recordar que $Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{k,n+1}$, así podemos aplicar el teorema de las funciones generadoras y llegar a la siguiente relación

$$f_{n+1}(s) = f_n(f_X(s)). \tag{1.1}$$

Esta relación también se puede obtener analíticamente, desarrollarlo es un ejercicio importante ya que utilizaremos algunas técnicas que necesitaremos más adelante.
Por definición tenemos

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(Z_{n+1}=k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(Z_{n+1}=k|Z_n=j)\mathbb{P}(Z_n=j)s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(Z_n=j)\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X_{1,n+1}+X_{2,n+1}+\cdots+X_{j,n+1}=k)s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(Z_n=j)\mathbb{E}\left[s^{\left(\sum_{i=1}^{j} X_{i,n+1}\right)}\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(Z_n=j)\prod_{i=1}^{j}\mathbb{E}[s^{X_{i,n+1}}] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(Z_n=j)\big(\mathbb{E}[s^{X_1}]\big)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}(Z_n=j)\big[f_X(s)\big]^j \\
&= f_n(f_X(s)).
\end{aligned}$$

Ahora podemos iterar esta función y obtener el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(s) &= f_n(f_X(s)) = f_{n-1}\big(f_X(f_X(s)\big) = f_{n-1}(f_2(s)) \\
&= f_{n-2}\big(f_X(f_2(s))\big) = f_{n-2}(f_3(s))
\end{aligned}$$

Siguiendo con este procedimiento por inducción obtenemos que para cualquier $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

$$f_{n+1}(s) = f_{n-k}(f_{k+1}(s))$$

y si $k = n - 1$ tenemos

$$f_{n+1}(s) = f_X(f_n(s)). \tag{1.2}$$

1.5. Los Momentos de Z_n.

Lema 1.5.1. *Sean $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ y $\sigma^2 = Var[X_1]$ y suponemos que son finitas. Entonces*

$$\mathbb{E}[Z_n] = \mu^n \qquad y \qquad Var[Z_n] = \begin{cases} n\sigma^2 & si\ \mu = 1, \\ \sigma^2 \mu^{(n-1)} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} & si\ \mu \neq 1. \end{cases}$$

Demostración. Hay que notar que $f'_X(1) = \mu$ y $\sigma^2 = f''_X(1) + \mu - \mu^2$. Si derivamos la ecuación (1.1) tenemos que

$$f'_{n+1}(s) = f'_n(f_X(s)) f'_X(s)$$

y si tomamos $s = 1$ tenemos

$$f'_{n+1}(1) = f'_n(1) f'_X(1)$$

si iteramos esta última relación obtenemos que

$$f'_{n+1}(1) = f'_n(1) f'_X(1) = f'_{n-1}(1) \left[f'_X(1) \right]^2 = f'_{n-2}(1) \left[f'_X(1) \right]^3$$

hasta llegar a que

$$f'_{n+1}(1) = \left[f'_X(1) \right]^n f'_X(1) = \left[f'_X(1) \right]^{n+1}.$$

como la primera derivada de la función generadora de X_1 evaluada en uno es igual a μ entonces tenemos que

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}] = \mu^{n+1}.$$

Para obtener la $Var[Z_{n+1}]$ primero hacemos notar que

$$f''_n(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{E}[Z_n^2] - \mathbb{E}[Z_n] = \mathbb{E}[Z_n^2] - f'_n(1)$$

de esta manera vamos a ver que

$$Var[Z_n] = f''_n(1) + f'_n(1) - \left(f'_n(1) \right)^2.$$

Si ahora derivamos dos veces a la ecuación (1.2) obtenemos la siguiente relación:

$$f''_{n+1}(s) = f''_X(f_n(s))\big[f'_n(s)\big]^2 + f'_X(f_n(s))f''_n(s)$$

y si tomamos $s = 1$ obtenemos

$$f''_{n+1}(1) = f''_X(1)\big[f'_n(1)\big]^2 + f'_X(1)f''_n(1)$$

sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned}
f''_{n+1}(1) &= (\sigma^2 + \mu^2 - \mu)\mu^{2n} + \mu f''_n(1) \\
&= (\sigma^2 + \mu^2 - \mu)\mu^{2n} + \mu\big[(\sigma^2 + \mu^2 - \mu)\mu^{2(n-1)} + \mu f''_{n-1}(1)\big] \\
&= (\sigma^2 + \mu^2 - \mu)(\mu^{2n} + \mu^{2n-1}) + \mu^2 f''_{n-1}(1) \\
&= (\sigma^2 + \mu^2 - \mu)(\mu^{2n} + \mu^{2n-1}) \\
&\quad + \mu^2\big[(\sigma^2 + \mu^2 - \mu)\mu^{2(n-2)} + \mu f''_{n-2}(1)\big] \\
&= (\sigma^2 + \mu^2 - \mu)(\mu^{2n} + \mu^{2n-1} + \mu^{2n-2}) + \mu^3 f''_{n-2}(1)
\end{aligned}$$

siguiendo la iteración por inducción llegamos a

$$f''_{n+1}(1) = (\sigma^2 + \mu^2 - \mu)(\mu^{2n} + \mu^{2n-1} + \mu^{2n-2} + \cdots + \mu^n).$$

Ahora, gracias a este desarrollo vamos a obtener la varianza de Z_{n+1}.

$$\begin{aligned}
Var[Z_{n+1}] &= (\sigma^2 + \mu^2 - \mu)(\mu^{2n} + \mu^{2n-1} + \mu^{2n-2} + \cdots + \mu^n) \\
&\quad + \mu^{n+1} - \mu^{2n+2} \\
&= \sigma^2(\mu^{2n} + \mu^{2n-1} + \mu^{2n-2} + \cdots + \mu^n) \\
&\quad + (\mu^{2n+2} + \mu^{2n+1} + \mu^{2n} + \cdots + \mu^{n+2}) \\
&\quad - (\mu^{2n+1} + \mu^{2n} + \mu^{2n-1} + \cdots + \mu^{n+1}) + \mu^{n+1} - \mu^{2n+2} \\
&= \sigma^2(\mu^{2n} + \mu^{2n-1} + \mu^{2n-2} + \cdots + \mu^n) \\
&= \sigma^2\mu^n(\mu^n + \mu^{n-1} + \mu^{n-2} + \cdots + 1).
\end{aligned}$$

De aquí se ve claramente que

$$Var[Z_{n+1}] = \begin{cases} \sigma^2\mu^n\frac{\mu^{n+1}-1}{\mu-1} & \text{si } \mu \neq 1, \\ \sigma^2(n+1) & \text{si } \mu = 1. \end{cases}$$

■

Observación 1.5.1. *La varianza crece o decrece geométricamente, según si $\mu > 1$ ó $\mu < 1$, y linealmente si $\mu = 1$.*

1.6. La Probabilidad de Extinción.

En esta sección vamos a calcular la probabilidad de extinción del proceso, pero antes tenemos que dar las siguientes definiciones.

Definición 1.6.1. *Por extinción vamos a entender como el evento en que la sucesión* $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ *de variables aleatorias consiste en ceros para toda* $n \geq n^*$ *para algún* n^* *finito.*

Como Z_n es un valor entero, la extinción es el evento tal que

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$$

Definición 1.6.2. *Tomaremos a* η *como la probabilidad de extinción de una familia, es decir,*

$$\eta = \mathbb{P}\Big(\{\omega|Z_n(\omega) = 0 \textit{ para alguna } n \geq 1\}\Big)$$

Teorema 1.6.1. *El* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0)$ *es igual a*

$$\mathbb{P}\Big(\{\omega|Z_n(\omega) = 0 \textit{ para alguna } n \geq 1\}\Big) = \eta$$

donde η *es la raíz no negativa más pequeña de la ecuación* $s = f_X(s)$*. Además* $\eta = 1$ *si* $\mu \leq 1$ *y* $\eta < 1$ *si* $\mu > 1$ *siempre y cuando* $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$*.*

Demostración. Primero vamos a definir a los conjuntos A y A_n, como:

$$A = \{\omega|Z_n(\omega) = 0 \text{ para alguna } n \geq 1\} \quad \text{y} \quad A_n = \{\omega|Z_n(\omega) = 0\},$$

y la probabilidad del evento A_n como $\eta_n = \mathbb{P}(A_n)$. Claramente se ve que $A_n \subseteq A_{n+1}$ por ser el cero un estado absorbente, entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$

así vemos que

$$\eta = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\lim_{n\to\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \eta_n$$

y además sabemos que $f_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ de esta manera tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} \eta_n$$

entonces

$$\eta_n = f_n(0) = f(f_{n-1}(0)) = f(\eta_{n-1})$$

y sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \eta$, por lo cual tenemos

$$\begin{aligned} \eta = \lim_{n\to\infty} \eta_n = \lim_{n\to\infty} f(\eta_{n-1}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[(\eta_{n-1})^{Z_1}\big] \\ = \mathbb{E}\Big[\lim_{n\to\infty} (\eta_{n-1})^{Z_1}\Big] &= \mathbb{E}[\eta^{Z_1}] = f(\eta). \end{aligned}$$

En esta última igualdad, para poder meter el límite en la esperanza se utilizó el Teorema de Convergencia Dominada.
Ahora mostraremos que si e es cualquier raíz no negativa de la ecuación $s = f(s)$ entonces $\eta \leq e$. Como $f(s)$ es no decreciente en $[0, 1]$ tenemos

$$\begin{aligned} \eta_1 = \quad & f(0) \quad \leq f(e) = e \\ \eta_2 = \quad & f(\eta_1) \quad \leq f(e) = e \end{aligned}$$

y si seguimos iterando veremos que para toda $n \in \mathbb{N}$., $\eta_n \leq e$ concluyendo que $\eta \leq e$. Entonces η es la raíz más pequeña no negativa de la ecuación $s = f_X(s)$.
Para verificar la segunda afirmación del teorema, necesitamos el hecho de que $f_X(s)$ es convexa en $[0, 1]$ y esto es fácil de ver porque

$$f''_X(s) = \mathbb{E}[Z_1(Z_1 - 1)s^{(Z_1-2)}] \geq 0 \quad \text{si} \quad s \geq 0.$$

Entonces $f_X(s)$ es convexa y no decreciente en $[0, 1]$ con $f_X(1) = 1$, además se puede verificar que las curvas $y = f_X(s)$ y $y = s$ generalmente tienen dos intersecciones en dicho intervalo y esto ocurre cuando $s = \eta$ y $s = 1$.
Ahora probaremos que si $\mu \leq 1$ y $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$ la ecuación $f_X(s) = s$ no tiene raíces en $[0, 1)$ y si $\mu > 1$, entonces tiene una única raíz η en $[0, 1)$.
Supongamos que $\mu < 1$, esto nos permite afirmar que $f'_X(1) < 1$; como $f'_X(s)$ es no decreciente afirmamos que $f'_X(s) < 1$ para toda $s \in [0, 1)$. Si suponemos que $\mu = 1$ y $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$, entonces $\mathbb{P}(Z_1 = n) > 0$ para algún $n \geq 2$, y como $f'_X(1) = 1$ afirmamos que $f'_X(s) < 1$ para toda $s \in [0, 1)$ ya que el $\lim\limits_{s\to 1} f'_X(s) = 1$ y $f_X(s)$ es estrictamente creciente.

Lo que acabamos de mostrar es que si tenemos que $\mu \leq 1$ y $\mathbb{P}(Z_1 = 1) < 1$ entonces $f'_X(s) < 1$ para toda $s \in [0, 1)$; por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f_X(s) - s) < 0 \qquad \text{para } 0 \leq s < 1.$$

Ahora tenemos que $f_X(s) - s$ es estrictamente decreciente en $[0, 1)$ y como $f_X(1) - 1 = 0$ entonces $f_X(s) - s > 0$ en $[0, 1)$. Por esta razón la función $f_X(s) = s$ no tiene raices en $[0, 1)$.
Ahora si suponemos que $\mu > 1$, lo que vamos a tener es que $\lim_{s\to 1} f'_X(s) > 1$, por continuidad de $f'_X(s)$ existe un s_0 en el intervalo $(0, 1)$ tal que para toda $s \in (s_0, 1)$, $f'_X(s) > 1$ y por el teorema del valor medio para derivadas tenemos que

$$f'_X(\xi) = \frac{f_X(1) - f_X(s_0)}{1 - s_0} > 1 \qquad \text{para alguna } \xi \in (s_0, 1)$$

y como $f_X(1) = 1$ entonces $f_X(s_0) - s_0 < 0$.
Ahora $f_X(s) - s$ es continua en s y no negativa en $s = 0$, entonces por el teorema del valor intermedio vamos a tener un cero en $\eta \in [0, s_0)$. Por lo tanto afirmamos que tenemos una raíz en η.
Si suponemos que existe otra raíz η_1 entonces $f_X(s) - s$ vale cero en η, en η_1 y en 1. Si $0 \leq \eta < \eta_1 < 1$, por el teorema de Rolle la primera derivada tiene al menos dos raíces en el intervalo $(0, 1)$ y la segunda al menos una raíz en el mismo intervalo.
Pero si $\mu > 1$, entonces al menos para una $n \geq 2$ pasa que $\mathbb{P}(Z_1 = n) > 0$, por lo cual tenemos que la segunda derivada no tiene raices en $[0, 1)$ y es aquí donde cae la contradicción. Con esto podemos afirmar que $f_X(s) = s$ tiene una única raíz en el intervalo $[0, 1)$.
Con esto hemos mostrado que si $\mu < 1$, la única raíz de $f_X(s) = s$ es cuando $\eta = 1$ en $[0, 1]$, cuando $\mu > 1$ tenemos una única raíz que es menor a uno y si $\mu = 1$ tenemos que distinguir entre el caso no aleatorio en donde $\sigma^2 = 0, f_X(s) = s$ y $\eta = 0$, y en el caso aleatorio cuando $\sigma^2 > 0, f_X(s) > s$ para $s \in [0, 1)$ y $\eta = 1$. ■

Con la teoría general podemos resumir la evolución a través del tiempo de un proceso de ramificación.
La cadena no es irreducible pero existe una única distribución estacionaria π dada por $\pi_0 = 1, \pi_i = 0$ si $i > 0$. Esto no nos dice nada acerca del comportamiento del proceso y debemos buscar en otro lado, para obtener mayor información.

Una de las dificultades, es que el proceso puede comportarse relativamente diferente dependiendo del momento en que llegue la extinción.
Una forma de atacar el problema es estudiando el comportamiento del proceso condicionado con la ocurrencia de algún evento como la extinción o el valor de una variable aleatoria como el número total de progenie.
Sean $g(k)$ y $f(s)$ la función de densidad y la función generadora de Z_1, esto es:

$$g(k) = \mathbb{P}(Z_1 = k) \qquad f_X(s) = \mathbb{E}[s^{Z_1}].$$

Sea T el tiempo en que ocurre la extinción, definido como

$$T = \begin{cases} \text{ínf}\,\{n : Z_n = 0\} & \text{si la extinción ocurre,} \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Hablando de manera estricta si $T = \infty$ entonces el proceso crecerá más allá de toda cota, en cambio si $T < \infty$ entonces el tamaño del proceso nunca llegará a ser muy grande y en consecuencia se irá a cero.
Como sabemos $\mathbb{P}(T < \infty)$ es la más pequeña raíz no negativa de la ecuación $s = f_X(s)$.
Ahora, sea $E_n = \{n < T < \infty\}$ el evento de que la extinción ocurra en algún tiempo después de n.
Debemos estudiar la distribución de Z_n condicionado a la ocurrencia de E_n, para lo cual definiremos $P_{0j}^n = \mathbb{P}(Z_n = j|E_n)$; la cual es la probabilidad condicional de que en la n-ésima generación haya j individuos dada la futura extinción del proceso.
En lo que estamos interesados es en el valor límite de dicha probabilidad, esto es

$$\pi_j^0 = \lim_{n\to\infty} P_{0j}^n$$

si es que dicho límite existe.
Para evitar algunos casos triviales supondremos que $0 < g(0) + g(1) < 1$ y $g(0) > 0$, estas condiciones implican por ejemplo que $0 < \mathbb{P}(E_n) < 1$ y que la probabilidad de extinción final $\eta = \mathbb{P}(T < \infty)$ satisface $0 < \eta \leq 1$.

Teorema 1.6.2. *Si* $\mathbb{E}[Z_1] < \infty$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} P_{0j}^n = \pi_j^0$ *existe.*
La función generadora $f^\pi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^0 s^j$ *satisface la ecuación*

$$f^\pi(\eta^{-1} f_X(s\eta)) = \lambda f^\pi(s) + 1 - \lambda \tag{1.3}$$

donde η es la probabilidad de la extinción final y $\lambda = f'_X(\eta)$.
Notemos que si $\mu = \mathbb{E}[Z_1] \leq 1$ entonces $\eta = 1$ y $\mu = \lambda$ por lo tanto la ecuación (1.3) se reduce a

$$f^\pi(f_X(s)) = f^\pi(s) + 1 - \mu.$$

Cualquiera que sea el valor de μ tenemos que $f'_X(\eta) \leq 1$ dándose la igualdad si y sólo si $\mu = 1$.

Demostración. Para $s \in [0,1)$ sea

$$f_n^\pi(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_n}\middle| E_n\right]$$

$$f_n^\pi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j P_{0j}^n = \sum_{j=0}^{\infty} s^j \frac{\mathbb{P}(Z_n = j, E_n)}{\mathbb{P}(E_n)}.$$

Donde

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(n < T < \infty) = \mathbb{P}(T < \infty) - \mathbb{P}(T \leq n) = \eta - f_n(0)$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n = j, E_n) &= \mathbb{P}(Z_n = j \text{ y todas las lineas siguientes mueran}) \\
&= \mathbb{P}(n < T < \infty | Z_n = j)\mathbb{P}(Z_n = j) \\
&= \mathbb{P}(T < \infty | Z_0 = j)\mathbb{P}(Z_n = j) \\
&= \eta^j \mathbb{P}(Z_n = j) \qquad j \geq 1
\end{aligned}$$

además tenemos que $\mathbb{P}(Z_n = 0, E_n) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, entonces

$$\begin{aligned}
f_n^\pi(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} s^j \frac{\mathbb{P}(Z_n = j, E_n)}{\mathbb{P}(E_n)} = \frac{1}{\mathbb{P}(E_n)} \sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbb{P}(Z_n = j)\eta^j \\
&= \frac{1}{\eta - f_n(0)} \sum_{j=0}^{\infty} (s\eta)^j \mathbb{P}(Z_n = j) = \frac{f_n(s\eta) - f_n(0)}{\eta - f_n(0)}.
\end{aligned}$$

Ahora, vamos a definir dos funciones de gran utilidad para la demostración de este teorema de la siguiente manera:

$$H_n(s) = \frac{\eta - f_n(s)}{\eta - f_n(0)} \qquad \text{y} \qquad h(s) = \frac{\eta - f_X(s)}{\eta - s} \qquad 0 \leq s < \eta.$$

De esta manera renombramos a $f_n^{\pi}(s)$ de la siguiente relación

$$f_n^{\pi}(s) = 1 - H_n(s\eta) \tag{1.4}$$

veamoslo

$$\begin{aligned} 1 - H_n(s\eta) &= 1 - \frac{\eta - f_n(s\eta)}{\eta - f_n(0)} = \frac{\eta - f_n(0) - \eta + f_n(s\eta)}{\eta - f_n(0)} \\ &= \frac{f_n(s\eta) - f_n(0)}{\eta - f_n(0)} = f_n^{\pi}(s) \end{aligned}$$

Nótese que H_n tiene dominio en el intervalo $[0, \eta)$ y $f_n^{\pi}(s)$ tiene dominio en el intervalo $[0, 1)$.
Ahora proponemos la siguiente relación

$$\frac{H_n(s)}{H_{n-1}(s)} = \frac{h(f_{n-1}(s))}{h(f_{n-1}(0))}$$

esto por que

$$\frac{H_n(s)}{H_{n-1}(s)} = \frac{\dfrac{\eta - f_n(s)}{\eta - f_n(0)}}{\dfrac{\eta - f_{n-1}(s)}{\eta - f_{n-1}(0)}} = \frac{(\eta - f_n(s))(\eta - f_{n-1}(0))}{(\eta - f_{n-1}(s))(\eta - f_n(0))}.$$

Por el otro lado tenemos

$$\begin{aligned} \frac{h(f_{n-1}(s))}{h(f_{n-1}(0))} &= \frac{\dfrac{\eta - f_X(f_{n-1}(s))}{\eta - f_{n-1}(s)}}{\dfrac{\eta - f_X(f_{n-1}(0))}{\eta - f_{n-1}(0)}} = \frac{(\eta - f_X(f_{n-1}(s)))(\eta - f_{n-1}(0))}{(\eta - f_{n-1}(s))(\eta - f_X(f_{n-1}(0)))} \\ &= \frac{(\eta - f_n(s))(\eta - f_{n-1}(0))}{(\eta - f_{n-1}(s))(\eta - f_n(0))} \end{aligned}$$

de cualquier modo $f_{n-1}(s)$ es no decreciente y $h(s)$ es no decreciente porque $f(s)$ es convexa en $[0, \eta)$.
Por lo tanto tenemos para $s < \eta$

$$H_n(s) \geq H_{n-1}(s)$$

entonces por la ecuación (1.4) tenemos

$$f^{\pi}(s) = 1 - H(s\eta) \qquad \text{si } 0 \le s < 1$$

si se satisfacen estos límites para $s \in [0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} H_n(s\eta) = H(s\eta) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n^{\pi}(s) = f^{\pi}(s)$$

pero claramente se ve que sucede.
Entonces el coeficiente π_j^0 de s^j en $f^{\pi}(s)$ existe para toda j como se deseaba.
Aún más, si $0 \le s < \eta$ tenemos

$$H_n(f(s)) = \frac{\eta - f_n(f_X(s))}{\eta - f_n(0)} = \frac{\eta - f_X(f_n(0))}{\eta - f_n(0)} \frac{\eta - f_{n+1}(s)}{\eta - f_{n+1}(0)} = h(f_n(0))H_{n+1}(s). \tag{1.5}$$

Cuando n tiende a infinito $f_n(0)$ tiende a η y entonces podemos decir

$$\lim_{n\to\infty} h(f_n(0)) = \lim_{s\to\eta} \frac{\eta - f_X(s)}{\eta - s} = f'_X(\eta)$$

haciendo tender n a infinito en (1.5) obtenemos

$$H(f(s)) = f'_X(\eta)H(s) \qquad \text{si } 0 \le s < \eta$$

y

$$f^{\pi}(s) = 1 - H(s\eta).$$

Con esto podemos ver que

$$\begin{aligned} f^{\pi}(\eta^{-1} f_X(s\eta)) &= 1 - H(\eta^{-1}\eta f_X(s\eta)) = 1 - H(f_X(s\eta)) \\ &= 1 - f'_X(\eta)H(s\eta) = 1 - \lambda H(s\eta) \\ &= 1 - \lambda(1 - f^{\pi}(s)) = 1 - \lambda + f^{\pi}(s)\lambda \end{aligned}$$

lo cual era a lo que queríamos llegar.

■

1.7. Ejemplos

Ejemplo 1.7.1 (Cálculo de Esperanzas).

Sea un proceso de ramificación Z con $\mathbb{E}[Z_1] = \mu < \infty$. Para calcular $\mathbb{E}[Z_m Z_n]$ para $m \leq n$ primero tenemos que mostrar que $\mathbb{E}[Z_n|Z_m] = Z_m \mu^{n-m}$, lo cual haremos por inducción.
Para demostrar que es válido para $n = m + 1$ primero veremos que

$$\mathbb{E}[Z_{m+1}|Z_m = j] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{j} X_i \Big| Z_m = j\Big] = \sum_{i=1}^{j} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{j} \mu = j\mu.$$

De esta manera tenemos que $\mathbb{E}[Z_{m+1}|Z_m] = \mu Z_m$. Ahora supondremos que es válido para un $n > m + 1$ y lo probaremos para $n + 1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}|Z_m] &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Z_{n+1}|Z_n]\big|Z_m\big] = \mathbb{E}[\mu Z_n|Z_m]\\ &= \mu Z_m \mu^{n-m} = \mu^{n+1-m} Z_m\end{aligned}$$

entonces, con este resultado podemos calcular lo siguiente

$$\mathbb{E}[Z_m Z_n|Z_m] = Z_m \mathbb{E}[Z_n|Z_m] = Z_n^2 \mu^{n-m}$$

y es así como obtenemos

$$\mathbb{E}[Z_n Z_m] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Z_n Z_m|Z_m]\big] = \mathbb{E}[Z_m^2 \mu^{n-m}] = \mu^{n-m} \mathbb{E}[Z_m^2].$$

Lo cual era lo que queriamos calcular.

Ejemplo 1.7.2 (Probabilidad de un ancestro común).

Consideremos un procesos de ramificación Z en el cual $\mathbb{P}(Z_0 = 1) = 1$ y $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Tomamos dos individuos aleatoriamente (con reemplazo) de la n-ésima generación y sea L el indicador de la generación que contiene su más reciente ancestro común. Para probar que

$$\mathbb{P}(L = r) = \mathbb{E}[Z_r^{-1}] - \mathbb{E}[Z_{r+1}^{-1}] \qquad \text{para } 0 \leq r < n$$

supongamos $0 \leq r \leq n$, y que todo es conocido en el proceso hasta la generación r. Condicionando con esta información, se toma aleatoriamente a un individuo en la n-ésima generación con probabilidad $\frac{1}{Z_r}$ de tener un ancestro en la r-ésima generación, para cualquier miembro de la r-ésima generación. La probabilidad de que dos individuos de la n-ésima generación, tomados aleatoriamente e independientemente uno del otro, tengan el mismo ancestro en la r-ésima generación es entonces $\frac{1}{Z_r}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L<r) &= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(L<r, Z_r=i) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(L<r|Z_r=i)\mathbb{P}(Z_r=i)\\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{P}(L<r|Z_r)\big] = \mathbb{E}[1-Z_r^{-1}]\end{aligned}$$

de esta manera para $0\leq r<n$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L=r) &= \mathbb{P}(L<r+1)-\mathbb{P}(L<r) = \mathbb{E}[1-Z_{r+1}^{-1}]-\mathbb{E}[1-Z_r^{-1}]\\ &= \mathbb{E}[Z_r^{-1}]-\mathbb{E}[Z_{r+1}^{-1}].\end{aligned}$$

Si ahora tenemos que $0<\mathbb{P}(Z_1=0)<1$ entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L<r|Z_n>0) &= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(L<r, Z_r=i|Z_n>0)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(L<r|Z_n>0, Z_r=i)\mathbb{P}(Z_r=i|Z_n>0)\\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{P}(L<r|Z_n>0, Z_r)\big|Z_n>0\big]\\ &= \mathbb{E}[1-Z_r^{-1}|Z_n>0] = 1-\mathbb{E}[Z_r^{-1}|Z_n>0]\end{aligned}$$

con este resultado obtenemos que

$$\mathbb{P}(L=r|Z_n>0) = \mathbb{E}[Z_r^{-1}|Z_n>0]-\mathbb{E}[Z_r^{-1}|Z_n>0].$$

Ejemplo 1.7.3 (Tiempo de extinción).

Consideremos un proceso de ramificación Z cuyo tamaño de familia tiene una función geométrica $g(k)=qp^k$, para $k\geq 0$ y donde $p+q=1$. Sea $T=\text{mín}\{n: Z_n=0\}$ el tiempo de extinción del proceso de ramificación Z, y supongamos $Z_0=1$. Para calcular $\mathbb{P}(T=n)$ primero se mostrará que el número de descendientes de la n-ésima generación satisface la siguiente relación:

$$\mathbb{P}(Z_n=0) = \begin{cases}\frac{n}{n+1} & \text{si } p=q\\ \frac{q(p^n-q^n)}{p^{n+1}-q^{n+1}} & \text{si } p\neq q\end{cases}$$

Este hecho se demostrará por inducción. Cuando $n = 1$ se ve claramente que esta relación se satisface

$$\mathbb{P}(Z_1 = 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } p = q \\ q & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

Ahora suponemos que es válida para $n = k$ y demostraremos que se cumple para $n = k + 1$

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 0) = f_{k+1}(0) = f(f_k(0)) = \sum_{j=0}^{\infty} [f_k(0)]^j \mathbb{P}(Z_1 = j).$$

Si $p = q$ vamos a tener que

$$\begin{aligned} f_{k+1}(0) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{k}{2(k+1)}\right]^j = \frac{1}{2 - \frac{2k}{2(k+1)}} \\ &= \frac{k+1}{2(k+1) - k} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Si $p \neq q$ vamos a ver que

$$\begin{aligned} f_{k+1}(0) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{q(p^n - q^n)}{p^{n+1} - q^{n+1}}\right]^j \mathbb{P}(Z_1 = j) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{q(p^n - q^n)}{p^{n+1} - q^{n+1}}\right]^j qp^j \\ &= q \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{qp(p^n - q^n)}{p^{n+1} - q^{n+1}}\right]^j = \frac{q}{1 - \frac{qp(p^n - q^n)}{p^{n+1} - q^{n+1}}} \\ &= \frac{q(p^{n+1} - q^{n+1})}{p^{n+1} - q^{n+1} - [qp(p^n - q^n)]} = \frac{q(p^{n+1} - q^{n+1})}{p^{n+1} - q^{n+1} - qp^{n+1} + pq^{n+1}} \\ &= \frac{q(p^{n+1} - q^{n+1})}{p^{n+1}(1-q) - q^{n+1}(1-p)} = \frac{q(p^{n+1} - q^{n+1})}{p^{n+2} - q^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ya demostrado lo anterior, ahora vamos a realizar el siguiente cálculo

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(Z_n = 0) - \mathbb{P}(Z_{n-1} = 0).$$

Si $p = q$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Y para $p \neq q$ vamos a tener que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = n) &= \frac{q(p^n - q^n)}{p^{n+1} - q^{n+1}} - \frac{q(p^{n-1} - q^{n-1})}{p^n - q^n} \\
&= \frac{q(p^n - q^n)^2 - q(p^{n-1} - q^{n-1})(p^{n+1} - q^{n+1})}{(p^n - q^n)(p^{n+1} - q^{n+1})} \\
&= \frac{q(p^{n-1}q^{n+1} - 2p^n q^n + q^{n-1}p^{n+1})}{(p^n - q^n)(p^{n+1} - q^{n+1})} \\
&= \frac{q^n p^{n-1}(q^2 - 2pq + p^2)}{(p^n - q^n)(p^{n+1} - q^{n+1})} \\
&= \frac{q^n p^{n-1}(p - q)^2}{(p^n - q^n)(p^{n+1} - q^{n+1})}.
\end{aligned}$$

Con este resultado se puede ver que $\mathbb{E}(T) < \infty$ si y sólo si $p < q$ aplicando el criterio del cociente.

Ejemplo 1.7.4 (Funciones generadoras)**.**

Para un proceso de ramificación con $Z_0 = 1$, encontraremos una expresión para la función generadora f_n de Z_n, en los casos en que Z_1 tiene función generadora dada por:

i) $f(s) = 1 - \alpha(1 - s)^\beta \qquad 0 < \alpha, \beta < 1.$
Lo primero que tenemos que hacer para resolver este ejercicio es proponer una relación para la n-ésima iterada de la función generadora. Para proponer dicha relación nos será de gran utilidad analizar los casos cuando $n = \{2, 3\}$.

$$\begin{aligned}
f_2(s) = f(f(s)) &= 1 - \alpha\{[1 - \alpha(1 - s)^\beta]\}^\beta \\
&= 1 - \alpha[\alpha(1 - s)^\beta]^\beta = 1 - \alpha^{(\beta+1)}(1 - s)^{\beta^2}, \\
f_3(s) = f(f_2(s)) &= 1 - \alpha\{1 - [1 - \alpha^{(\beta+1)}(1 - S)^{\beta^2}]\}^\beta \\
&= 1 - \alpha[\alpha^{(\beta+1)}(1 - s)^{\beta^2}]^\beta = 1 - \alpha^{(\beta^2+\beta+1)}(1 - s)^{\beta^3}.
\end{aligned}$$

El analizar estos dos casos nos dio una idea de como podría ser la n-ésima iterada de la función generadora, la cual proponemos como

$$f_n(s) = 1 - \alpha^{(\beta^{n-1}+\beta^{n-2}+\cdots+\beta+1)}(1 - s)^{\beta^n}.$$

Ahora sólo falta demostrar que esta relación se cumple, lo cual haremos por inducción. Supongamos que se cumple para $n = k$ y demostraremos que es válido para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} f_{k+1}(s) = f(f_k(s)) &= 1 - \alpha[1 - \alpha^{(\beta^{k-1}+\beta^{k-2}+\cdots+\beta+1)}(1-s)^{\beta^n}]^\beta \\ &= 1 - \alpha[\alpha^{(\beta^{k-1}+\beta^{k-2}+\cdots+\beta+1)}(1-s)^{\beta^n}]^\beta \\ &= 1 - \alpha^{(\beta^n+\beta^{n-1}+\cdots+\beta+1)}(1-s)^{\beta^{n+1}}. \end{aligned}$$

ii) $f(s) = g^{-1}(P(g(s)))$ donde P es una función generadora y g es una función conveniente que satisface $g(1) = 1$.
De la misma manera que en el caso anterior, tenemos que proponer una relación para la n-ésima iterada, entonces vamos a analizar los casos cuando $n = \{2, 3\}$. Como P es una función generadora tenemos que $P(P(s)) = P_2(s)$

$$\begin{aligned} f(s) &= g^{-1}(P(g(s))) \\ f_2(s) &= f(f(s)) = g^{-1}(P(g(g^{-1}(P(g(s)))))) \\ &= g^{-1}(P(P(g(s)))) = g^{-1}(P_2(g(s))), \\ f_3(s) &= f(f_2(s)) = g^{-1}(P(g(g^{-1}(P_2(g(s)))))) \\ &= g^{-1}(P(P_2(g(s)))) = g^{-1}(P_3(g(s))). \end{aligned}$$

De esta manera vamos a proponer a la n-ésima iterada de la función generadora como

$$f_n(s) = g^{-1}(P_n(g(s))) \qquad \text{para } n \geq 1$$

la cual se va a demostrar por inducción.
Vamos a suponer que es válido para $n = k$ y demostraremos que se cumple para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} f_{k+1}(s) = f(f_k(s)) &= g^{-1}(P(g(g^{-1}(P_k(f(s)))))) \\ &= g^{-1}(P(P_k(f(s)))) = g^{-1}(P_{k+1}(f(s))). \end{aligned}$$

iii) Para el caso (ii) calcular la respuesta explícita cuando $g(x) = x^m$ y $P(s) = s(\gamma - (\gamma - 1)s)^{-1}$ donde $\gamma > 1$.
Como podemos ver este ejemplo es un caso particular del ejemplo anterior. Para resolverlo va ser necesario proponer la n-ésima iterada para

la función generadora P, nuevamente va ser de gran utilidad analizar los casos cuando $n = \{2, 3\}$. Pero antes vamos a hacer un cambio de variable dado por $\alpha = \frac{1}{\gamma}$, entonces tenemos que

$$P(s) = \frac{s}{\gamma(1-(1-\frac{1}{\gamma})s)} = \frac{s\alpha}{1-(1-\alpha)s}.$$

De esta manera va ser más fácil analizar estos casos

$$P_2(s) = P(P(s)) = \frac{\alpha\left[\frac{s\alpha}{1-(1-\alpha)s}\right]}{1-(1-\alpha)\left[\frac{s\alpha}{1-(1-\alpha)s}\right]}$$

$$= \frac{\alpha\left[\frac{s\alpha}{1-(1-\alpha)s}\right][1-(1-\alpha)s]}{1-(1-\alpha)s-(1-\alpha)s\alpha} = \frac{s\alpha}{1-s+s\alpha^2} = \frac{s\alpha}{1-(1-\alpha^2)s},$$

$$P_3(s) = P(P_2(s)) = \frac{\left[\frac{s\alpha^2}{1-(1-\alpha^2)s}\right]\alpha}{1-(1-\alpha)\left[\frac{s\alpha^2}{1-(1-\alpha^2)s}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{s\alpha^3}{1-(1-\alpha^2)s}\right][1-(1-\alpha^2)s]}{1-(1-\alpha^2)s-(1-\alpha)s\alpha^2} = \frac{s\alpha^3}{1-s+s\alpha^3} = \frac{s\alpha^3}{1-(1-\alpha^3)s}.$$

Entonces proponemos la siguiente relación:

$$P_n(s) = \frac{s\alpha^n}{1-(1-\alpha^n)s}.$$

La demostración de que esta relación se cumple la haremos por inducción. Suponemos que es válido para $n = k$ y demostraremos que se cumple para $n = k+1$,

$$P_{n+1}(s) = P(P_n(s)) = \frac{\alpha\left[\frac{s\alpha^n}{1-(1-\alpha^n)s}\right]}{1-(1-\alpha)\left[\frac{s\alpha^n}{1-(1-\alpha^n)s}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{s\alpha^{n+1}}{1-(1-\alpha^n)s}\right][1-(1-\alpha^n)s]}{1-(1-\alpha^n)s-(1-\alpha)s\alpha^n}$$

$$= \frac{s\alpha^{n+1}}{1-s+s\alpha^{n+1}} = \frac{\alpha^{n+1}}{1-(1-\alpha^{n+1})s}$$

Como tenemos que $g(x) = x^m$ y conocemos la n-ésima iterada para la función generadora P, entonces concluimos que

$$f_n(s) = g^{-1}(P_n(g(s))) = \big[P_n(s^m)\big]^{\frac{1}{m}} = \Big[\frac{\alpha^n s^m}{1-(1-\alpha^n)s^m}\Big]^{\frac{1}{m}}.$$

Ejemplo 1.7.5 (Ramificación con migración).

Cada generación de un proceso de ramificación (con un solo progenitor), aumenta por un número aleatorio de inmigrantes los cuales son indistinguibles de los otros miembros de la población. Supongamos que el número de inmigrantes en diferentes generaciones son independientes de cada uno, en la historia pasada del proceso, dado tal número se tiene la función generadora $H(s)$.
Sea Z_n el número de miembros de la n-ésima generación. La $n+1$-ésima generación tiene tamaño $C_{n+1} + I_{n+1}$ donde C_n es el número de descendientes naturales de la generaciones previa, e I_n es el número de inmigrantes. Entonces por independencia tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}|Z_n] &= \mathbb{E}[s^{C_{n+1}+I_{n+1}}|Z_n] = \mathbb{E}[s^{C_{n+1}}|Z_n]\mathbb{E}[s^{I_{n+1}}|Z_n]\\ &= \mathbb{E}[s^{C_{n+1}}|Z_n]H(s) = f(s)^{Z_n}H(s)\end{aligned}$$

y de esta manera tenemos que $f_{n+1}(s)$ queda determinada por

$$f_{n+1}(s) = \mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[s^{Z_{n+1}}|Z_n]\big] = \mathbb{E}[f(s)^{Z_n}]H(s) = f_n(f(s))H(s).$$

Ejemplo 1.7.6 (Martingala).

Consideremos a $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ un proceso de ramificación con $\mathbb{E}[Z_1] = \mu$. Sabemos que $\mathbb{E}[Z_{n+r}|Z_n] = Z_n\mu^r$ donde $r, n \in \mathbb{N}$. Si definimos a $W_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$ se puede ver que $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una martingala, veamoslo

$$\mathbb{E}[W_{n+r}|W_n] = \frac{1}{\mu^{n+r}}\mathbb{E}[Z_{n+r}|Z_n] = \frac{1}{\mu^{n+r}}Z_n\mu^r = W_n.$$

Ejemplo 1.7.7 (Función generadora fraccional lineal.).

Consideremos un proceso de ramificación Z cuyo tamaño de familia tiene una función de densidad dada por $\mathbb{P}(Z_1 = k) = bc^{(k-1)}$ donde $b, c > 0$ y $b + c < 1$. Lo que deseamos ver es que para la n-ésima generación la función generadora $f_n(s)$ y $\mathbb{P}(T = n)$ donde $T = \text{ínf}\{n : Z_n = 0\}$ y s_0 es la raíz no negativa mas pequeña de $f(s) = s$, cumplen con

i) Si $\mu \neq 1$

$$f_n(s) = 1 - \frac{\mu^n(1-s_0)}{\mu^n - s_0} + \frac{\mu^n s \dfrac{1-s_0}{\mu^n - s_0}}{1 - s\dfrac{\mu^n - 1}{\mu^n - s_0}}$$

y

$$\mathbb{P}(T = n) = \mu^{(n-1)} s_0 \frac{(\mu - 1)(1 - s_0)}{(\mu^n - s_0)(\mu^{(n-1)} - s_0)}$$

ii) Si $\mu = 1$

$$f_n(s) = \frac{nc - s[(n+1)c - 1]}{1 + (n-1)c - ncs}$$

y

$$\mathbb{P}(T = n) = \frac{c(1-c)}{[1 + (n-1)c][1 + (n-2)c]}$$

Como $\rho_k = bc^{(k-1)}$ para toda $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ entonces

$$\begin{aligned}\rho_0 &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} bc^{(i-1)} = 1 - b\sum_{i=1}^{\infty} c^{(i-1)} \\ &= 1 - b\sum_{j=0}^{\infty} c^j = 1 - \frac{b}{1-c}.\end{aligned}$$

La función generadora para Z_1 esta dada por

$$\begin{aligned}f(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_1 = i)s^i = 1 - \frac{b}{1-c} + \sum_{i=1}^{\infty} bc^{(i-1)}s^i \\ &= 1 - \frac{b}{1-c} + bs\sum_{i=1}^{\infty} (cs)^{(i-1)} = 1 - \frac{b}{1-c} + bs\sum_{j=0}^{\infty} (cs)^j \\ &= 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}.\end{aligned}$$

La esperanza de Z_1 esta dada por $f'(1) = \mu$ entonces

$$f'(s) = \frac{(1-cs)b - bs(-c)}{(1-cs)^2} = \frac{b}{(1-cs)^2}$$

de aquí que

$$\mu = \frac{b}{(1-c)^2}.$$

Ahora tenemos que para todad $u \in [-1,1]$ se cumple la siguiente relación:

$$\begin{aligned} f(s)-f(u) &= 1-\frac{b}{1-c}+\frac{bs}{1-cs}-1+\frac{b}{1-c}-\frac{bu}{1-cu} \\ &= \frac{bs(1-cu)-bu(1-cs)}{(1-cs)(1-cu)} = \frac{b(s-u)}{(1-cs)(1-cu)} \end{aligned}$$

entonces también tenemos que para toda $v \in [-1,1]$ se cumple

$$f(s)-f(v) = \frac{b(s-v)}{(1-cs)(1-cv)}.$$

De esta manera llegamos a la siguiente relación

$$\frac{f(s)-f(u)}{f(s)-f(v)} = \frac{\dfrac{b(s-u)}{(1-cs)(1-cu)}}{\dfrac{b(s-v)}{(1-cs)(1-cv)}} = \frac{(s-u)(1-cv)}{(s-v)(1-cu)}.$$

Como ya sabemos que la ecuación $f(s)=s$ tiene raíces en s_0 y en 1 afirmamos que si $\mu > 1$ tenemos que $s_0 < 1$, si $\mu = 1$ entonces $s_0 = 1$ y finalmente si $\mu < 1$ la raíz $s_0 > 1$. Si tomamos a $u = s_0$ y $v = 1$ entonces para $\mu \neq 1$ la relación que se acaba de obtener queda

$$\frac{f(s)-s_0}{f(s)-1} = \frac{(s-s_0)(1-c)}{(s-1)(1-cs_0)}$$

por lo tanto tenemos que

$$\frac{1-c}{1-cs_0} = \frac{f(s)-s_0}{f(s)-1}\frac{s-s_0}{s-1} = \frac{f(s)-s_0}{s-1}\frac{s-s_0}{f(s)-1}.$$

Aplicando el límite cuando s tiende a 1 a toda la igualdad se puede ver que

$$\frac{1-c}{1-cs_0} = \lim_{s\to 1}\frac{f(s)-s_0}{s-s_0}\frac{s-1}{f(s)-1} = \lim_{s\to 1}\frac{f(s)-s_0}{s-s_0}\lim_{s\to 1}\frac{s-1}{f(s)-1} = \frac{1}{\mu}$$

Ya que tenemos que al aplicar la regla de L'Hospital para el segundo límite obtenemos

$$\lim_{s\to 1}\frac{s-1}{f(s)-1} = \lim_{s\to 1}\frac{1}{f'(s)} = \frac{1}{\mu}$$

y el otro límite claramente es 1. Estos resultados nos permite afirmar que

$$\frac{f(s)-s_0}{f(s)-1}=\frac{1}{\mu}\frac{s-s_0}{s-1}.$$

Este último resultado va ser de gran utilidad para obtener una fórmula explícita para $f_n(s)$. Primero vamos analizar los casos $n=\{2,3\}$ para proponer dicha forma explícita para $f_n(s)$. Para f_2 tenemos

$$\frac{f_2(s)-s_0}{f_2(s)-1}=\frac{f(f(s))-s_0}{f(f(s))-1}=\frac{1}{\mu}\frac{f(s)-s_0}{f(s)-1}=\frac{1}{\mu^2}\frac{s-s_0}{s-1}.$$

Para $f_3(s)$ tenemos que

$$\frac{f_3(s)-s_0}{f_3(s)-1}=\frac{f_2(f(s))-s_0}{f_2(f(s))-1}=\frac{1}{\mu^2}\frac{f(s)-s_0}{f(s)-1}=\frac{1}{\mu^3}\frac{s-s_0}{s-1}.$$

Entonces proponemos a $f_n(s)$ como

$$\frac{f_n(s)-s_0}{f_n(s)-1}=\frac{1}{\mu^n}\frac{s-s_0}{s-1}.$$

Esta relación se va a demostrar por inducción, entonces vamos a suponer que es válido para $n=k-1$ y probaremos que se cumple para $n=k$, veamoslo.

$$\frac{f_k(s)-s_0}{f_k(s)-1}=\frac{f_{k-1}(f(s))-s_0}{f_{k-1}(f(s))-1}=\frac{1}{\mu^{(k-1)}}\frac{f(s)-s_0}{f(s)-1}=\frac{1}{\mu^k}\frac{s-s_0}{s-1}.$$

Si resolvemos esta ecuación vamos a ver que nos queda como:

$$f_n(s)=\frac{\mu^n s_0(s-1)-(s-s_0)}{\mu^n(s-1)-(s-s_0)}.$$

Para obtener el resultado al cual queremos llegar tenemos que manipular esta ecuación, entonces tenemos que

$$f_n(s)=\frac{\mu^n s_0(s-1)-(s-s_0)}{\mu^n(s-1)-(s-s_0)}=\frac{s_0-\dfrac{(s-s_0)}{\mu^n(s-1)}}{1-\dfrac{(s-s_0)}{\mu^n(s-1)}}$$

$$=\frac{1-\dfrac{(s-s_0)}{\mu^n(s-1)}+s_0-1}{1-\dfrac{(s-s_0)}{\mu^n(s-1)}}=1-\frac{1-s_0}{1-\dfrac{(s-s_0)}{\mu^n(s-1)}}$$

$$\begin{aligned}
f_n(s) &= 1 - \frac{\mu^n(1-s_0)(s-1)}{s(\mu^n-1)+s_0-\mu^n} = 1 + \frac{\mu^n(1-s_0)(s-1)}{\mu^n-s_0-s(\mu^n-1)} \\
&= 1 + \frac{\mu^n-s_0}{\mu^n-s_0}\frac{\mu^n(1-s_0)(s-1)}{\mu^n-s_0-s(\mu^n-1)} \\
&= 1 + \frac{\mu^n(1-s_0)}{\mu^n-s_0}\frac{(\mu^n-s_0)(s-1)}{\mu^n-s_0-s(\mu^n-1)} \\
&= 1 + \frac{\mu^n(1-s_0)}{\mu^n-s_0}\frac{\mu^n(s-1)-s_0(s-1)}{\mu^n-s_0-s(\mu^n-1)} \\
&= 1 + \frac{\mu^n(1-s_0)}{\mu^n-s_0}\frac{\mu^n(s-1)-s_0(s-1)+s-s}{\mu^n-s_0-s(\mu^n-1)} \\
&= 1 + \frac{\mu^n(1-s_0)}{\mu^n-s_0}\frac{(1-s_0)s-(\mu^n-\mu^n s-s_0+s)}{\mu^n-s_0-s(\mu^n-1)} \\
&= 1 + \frac{\dfrac{\mu^n s(1-s_0)^2}{\mu^n-s_0} - \mu^n(1-s_0)\dfrac{\mu^n-\mu^n s-s_0+s}{\mu^n-s_0}}{\mu^n-s_0-s(\mu^n-1)} \\
&= 1 - \frac{\mu^n(1-s_0)}{\mu^n-s_0} + \frac{s\mu^n\dfrac{1-s_0}{\mu^n-s_0}}{1-s\dfrac{\mu^n-1}{\mu^n-s_0}}.
\end{aligned}$$

De esta manera demostramos la forma explícita para $f_n(s)$ a la cual queriamos llegar si $\mu \neq 1$. Esta relación nos servira para obtener $\mathbb{P}(T=n)$.
Sea $A = \{\omega | T(\omega) \leq n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
A &= \{\omega | T(\omega) \leq n\} \\
&= \{\omega | \text{existe una } s \in \{1,2,3,\ldots,n\} \text{tal que } Z_s(\omega) = 0\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega | Z_i(\omega) = 0\} = \{\omega | Z_n(\omega) = 0\}
\end{aligned}$$

De esta manera tenemos que $\mathbb{P}(T \leq n) = \mathbb{P}(Z_n = 0) = f_n(0)$ y $f_n(0)$ es equivalente a

$$f_n(0) = 1 - \mu^n \frac{1-s_0}{\mu^n-s_0}.$$

Con todos estos resultados, vamos a calcular $\mathbb{P}(T = n)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}(T \leq n) - \mathbb{P}(T \leq n-1) = f_n(0) - f_{n-1}(0) \\
&= 1 - \mu^n \frac{1 - s_0}{\mu^n - s_0} - 1 + \mu^{n-1} \frac{1 - s_0}{\mu^{(n-1)} - s_0} \\
&= \mu^{n-1} \frac{(1 - s_0)(\mu^n - s_0) - \mu(1 - s_0)(\mu^{n-1} - s_0)}{(\mu^{n-1} - s_0)(\mu^n - s_0)} \\
&= \mu^{n-1} s_0 \frac{(\mu - 1)(1 - s_0)}{(\mu^n - s_0)(\mu^{n-1} - s_0)}.
\end{aligned}$$

Ahora veremos el caso en que $\mu = 1$. En este caso podemos ver que $b = (1-c)^2$ y solamente tenemos una única raíz, la cual es $s_0 = 1$, con toda esta información vemos que $f(s)$ nos queda como:

$$\begin{aligned}
f(s) &= \frac{1 - c - (1-c)^2}{1 - c} + \frac{s(1-c)^2}{1 - cs} = c + \frac{s(1-c)^2}{1 - cs} \\
&= \frac{c(1 - cs) + s(1-c)^2}{1 - cs} = \frac{c - s(2c - 1)}{1 - cs},
\end{aligned}$$

para $f_2(s)$ tenemos

$$\begin{aligned}
f_2(s) = f(f(s)) = \frac{c - (2c-1)f(s)}{1 - cf(s)} &= \frac{c - (2c-1)\dfrac{c - (2c-1)s}{1 - cs}}{1 - c\dfrac{c - (2c-1)s}{1 - cs}} \\
&= \frac{c(1 - cs) - (2c-1)(c - s(2c-1))}{1 - cs - c^2 + cs(2c-1)} \\
&= \frac{2c - 2c^2 + s[(2c-1)^2 - c^2]}{1 - c^2 + cs(2c - 2)} \\
&= \frac{2c(1-c) + s(3c^2 - 4c + 1)}{(1-c)(1+c) + 2cs(c-1)} = \frac{2c - (3c-1)s}{1 + c - 2cs}.
\end{aligned}$$

y para $f_3(s)$ tenemos

$$f_3(s) = f_2(f(s)) = \frac{2c-(3c-1)f(s)}{1+c-2cf(s)} = \frac{2c-(3c-1)\dfrac{c-(2c-1)s}{1-cs}}{1+c-2c\dfrac{c-(2c-1)s}{1-cs}}$$

$$= \frac{2c(1-cs)-(3c-1)[c-s(2c-1)]}{(1+c)(1-cs)-2c[c-s(2c-1)]}$$

$$= \frac{3c-3c^2+s[(2c-1)(3c-1)-2c^2]}{1+c-2c^2+cs[2(2c-1)-1-c]}$$

$$= \frac{3c(1-c)+s(4c^2-5c+1)}{1-c+2c(1-c)+3cs(c-1)} = \frac{3c-(4c-1)s}{1+2c-3sc}.$$

Entonces vamos a proponer la siguiente relación para $f_n(s)$:

$$f_n(s) = \frac{nc-[(n+1)c-1]s}{1+(n-1)c-ncs}.$$

Esta función la vamos a probar por inducción. Supongamos que se cumple para $k-1$, entonces basta ver que se cumple para k

$$f_k(s) = f_{k-1}(f(s)) = \frac{(k-1)c-(kc-1)f(s)}{1+(k-2)c-(k-1)cf(s)}$$

$$= \frac{(k-1)c-(kc-1)\dfrac{c-s(2c-1)}{1-cs}}{1+(k-2)c-(k-1)c\dfrac{c-s(2c-1)}{1-cs}}$$

$$= \frac{(k-1)c(1-sc)-c(kc-4)+s(kc-1)(2c-1)}{1-cs+(k-2)c(1-cs)-(k-1)c^2+s(2c-1)(k-1)c}$$

$$= \frac{kc-kc^2+s[(2c-1)(kc-1)-(k-1)c^2]}{1-c+(k-1)c-(k-1)c^2+cs[(2c-1)(k-1)-1-(k-2)c]}$$

$$= \frac{kc(1-c)+s[(k+1)c^2-(k+2)c+1]}{1-c+(k-1)c(1-c)+csk(c-1)} = \frac{kc-s((k+1)c-1)}{1+(k-1)c-kcs}.$$

Ya demostrada la n-ésima iterada,vamos a calcular $f_n(0)$ la cual es necesaria para obtener $\mathbb{P}(T=n)$

$$f_n(0) = \frac{nc}{1+(n-1)c}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T=n) = f_n(0) - f_{n-1}(0) &= \frac{nc}{1+(n-1)c} - \frac{(n-1)c}{1+(n-2)c} \\
&= \frac{nc(1+(n-2)c) - c(n-1)[1+(n-1)c]}{[1+(n-2)c][1+(n-1)c]} \\
&= \frac{c(1-c)}{[1+(n-1)c][1+(n-2)c]}.
\end{aligned}$$

Lo cual era a lo que queriamos llegar.

Capítulo 2

El Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo

2.1. Introducción.

En el capítulo anterior estudiamos el proceso de ramificación de Galton-Watson más simple, en el cual el tiempo de vida de cada individuo es de una unidad de tiempo. Como podemos darnos cuenta, este proceso no es suficiente para modelar el crecimiento de muchas poblaciones físicas o biológicas, es por esto, que ahora se presenta una extensión a tiempo continuo del proceso de ramificación de Galton-Watson, el cual llamaremos el *Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo.*

Será de gran interés ver que tanto el proceso de ramificación de Galton-Watson como el Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo tienen propiedades muy similares y que en algunas ocasiones no es más que el resultado de una extensión. Además se analizará el problema de como definir la n-ésima iterada de una función cuando n no es un entero, que desde tiempo atrás ha interesado a un gran número de matemáticos.

Este proceso también modela el crecimiento de una población, salvo que ahora el tiempo de vida de cada individuo es una variable aleatoria. Nuevamente no tenemos un mecanismo matemático para representar las relaciones entre los individuos de la población total, aunque se tengan en mente cuando se plantea el modelo. La primera formulación del proceso markoviano de ramificación a tiempo continuo aparece en los trabajos de Kolmogorov y Dimitriev en 1947.

2.2. Definición.

Como se había señalado, en el proceso de ramificación de Galton-Watson el tiempo de vida de cada individuo es de una unidad de tiempo, una generalización natural para la construcción del proceso markoviano de ramificación a tiempo continuo es la de permitir que estos tiempos de vida sean aleatorios. En el capítulo anterior se consideró una cadena de Markov a tiempo discreto $\{Z_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$, ahora definiremos un proceso $\{Z(t) : t \geq 0\}$ donde $Z(t)$ es el número de individuos al tiempo t. Este proceso en general no es de Markov, al menos que los tiempos de vida sean independientes y se distribuyan como variables aleatorias exponenciales, que para nuestros fines es lo que se va a suponer.

Definición 2.2.1. *Un proceso estocástico $\{Z(t, \omega) : t \geq 0\}$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$ es llamado como el Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo Unidimensional si:*

i) *Su espacio de estados esta dado por el conjunto de enteros no negativos.*

ii) *Es una cadena de Markov estacionaria con respecto a los campos- $\Im_t = \sigma\{Z(s, \omega) : s \leq t\}$, (para cualquier colección D de valores reales, variables aleatorias Borel medibles definidas en $(\Omega, \Im, \mathbb{P})$, $\sigma(D)$ denota la sub-σ-álgebra generada por D).*

iii) *Las probabilidades de transición $P_{ij}(t) = \mathbb{P}(Z(t) = j | Z(0) = i)$ satisfacen:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)s^j = \left(\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t)s^j \right)^i$$

para toda $i \geq 0$ y $|s| \leq 1$.

Los incisos (i) y (ii) nos dicen que $Z(t)$ es un Proceso Markoviano a Tiempo Continuo en los enteros, y el inciso (iii) caracteriza la propiedad básica de ramificación.

Como era de esperarse gran parte de la teoría del proceso de ramificación de Galton-Watson se puede desarrollar en el caso continuo con técnicas similares a las ya vistas. Será de gran interés ver que el Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo tiene una estructura mucho más compleja.

2.3. Construcción

Para la construcción del Procesos Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo es indispensable estudiar las probabilidades de transición, las cuales estan dadas por

$$P_{ij}(\tau, \tau + t) = \mathbb{P}(Z(\tau + t) = j | Z(\tau) = i)$$

para toda $i, j \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Debido a la hipótesis de homogeneidad del tiempo estas satisfacen que

$$P_{ij}(\tau, \tau + t) = P_{ij}(t) \qquad t \geq 0.$$

Estudiaremos las probabilidades de transición mediante los dos sistemas de ecuaciones diferenciales, las ecuaciones *backward* y *forward* de Kolmogorov. Para escribir de una manera explícita dichas ecuaciones, primero obtendremos a ciertas funciones $a_i(t)$ y $\rho_{ij}(t)$, con $i, j = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Si se tiene que $Z(t) = i$, entonces la probabilidad de que un cambio de estado ocurra en un intervalo de tiempo $(t, t+h)$ es $a_i(t)h + o(h)$. Si nosotros sabemos que el cambio ocurre al tiempo t cuando el estado es i, entonces $\rho_{ij}(t)$ es la probabilidad de que el nuevo estado sea j.

Ahora vamos a suponer que un individuo presente al tiempo t tiene una probabilidad $a(t)h + o(h)$ de morir en el intervalo de tiempo $(t, t+h)$, donde $a(t)$ es una función continua y no negativa. Si este individuo muere en un tiempo τ, las probabilidades de que sea reemplazado por $0, 2, 3, \dots$ individuos son $\rho_0(t), \rho_2(t), \rho_3(t), \dots$ Se omitirá la posibilidad de muerte seguida de un sólo reemplazo, debido a la falta de dependencia en la edad, ya que parecería que no hubo cambio alguno. Por esta misma razón, la muerte de un individuo y su reemplazo por n nuevos individuos ($n \geq 2$), es equivalente a que dicho individuo no muera y tenga $(n-1)$ nuevos descendientes.

Es importante notar que si un individuo nace en un tiempo t_1, la probabilidad de que dicho individuo tenga un tiempo de vida adicional τ esta dada por

$$a(t_1 + \tau) \exp\left\{ -\int_{t_1}^{t_1+\tau} a(x)\mathrm{d}x \right\}$$

la cual se convierte en una función de densidad exponencial si a es constante.

Si ahora en vez de tener un sólo individuo, tenemos i presentes a un tiempo t, entonces la probabilidad de que mueran $0, 1$ y un número mayor a 2 en un intervalo de tiempo $(t, t+h)$ son $1 - ia(t)h + o(h)$, $ia(t)h + o(h)$ y $o(h)$

respectivamente. Si ocurre una muerte al tiempo τ, entonces la probabilidad de que el tamaño de la población sea j dado que a cierto tiempo antes a τ el número de individuos era i, es $\rho_{j-i+1}(\tau)$. Al obtener estos resultados podemos concluir que $a_i(t) = a(t)$ y $\rho_{ij}(t) = \rho_{j-i+1}(t)$.

Las $\rho_k(t)$ son llamadas las probabilidades infinitesimales, las cuales para nuestro proceso en estudio no dependen del tiempo; lo mismo le sucede a $a(t)$ la cual no le queda más que ser una constante. Las probabilidades infinitesimales y el parámetro a deben cumplir con las siguientes propiedades:

$$0 < a < \infty, \qquad 0 < \rho_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = 1.$$

Las probabilidades infinitesimales determinan a las probabilidades de transición como soluciones de las ecuaciones de Kolmogorov, dichas ecuaciones son

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{ij}(t) = -jaP_{ij}(t) + a \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{j+1} kP_{ik}(t)\rho_{j-k+1} \qquad \textit{forward} \tag{2.1}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{ij}(t) = -iaP_{ij}(t) + ia \sum_{k=i-1}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_{k-i+1} \qquad \textit{backward} \tag{2.2}$$

con condiciones en la frontera

$$P_{ij}(0^+) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Las probabilidades infinitesimales nos dan una interpretación probabilista en términos de un proceso de ramificación, el cual construiremos de la siguiente manera. Supongamos que se empieza con un cierto número de individuos a un determinado tiempo, la longitud de vida adicional de cada individuo es una variable aleatoria exponencial con párametro a. Al morir cada individuo deja k descendientes con probabilidad ρ_k, donde $k = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Como en el capítulo anterior el comportamiento de cada individuo es independiente al de otros individuos y de la historia del proceso.

Ahora supongamos que el proceso está en el estado i a un tiempo dado, este continúa ahí por una cantidad de tiempo el cual se distribuye exponencialmente con parámetro ia. Si el proceso salta a los estados $j \geq i - 1$, estos saltos estan determinados por las probabilidades ρ_{j-i+1}, entonces la probabilidad de transición está dada por

$$P_{ij}(\tau) = ia\rho_{j-i+1}\tau + o(\tau)$$

cuando $\tau \to 0$ y para $j \geq i-1$ con $j \neq i$.

Si el proceso se encuentra en el estado i y continúa ahí por cierta cantidad de tiempo, pero ahora no hay salto alguno, entonces la probabilidad de transición queda determinada por

$$P_{ii}(\tau) = 1 - ia\tau + o(\tau)$$

cuando $\tau \to 0$.

Y si el proceso se encuentra en el estado i y continúa ahí por cierta cantidad de tiempo, pero ahora salta a los estados $j < i-1$, entonces la probabilidad de transición queda determinada por

$$P_{ij} = o(\tau)$$

cuando $\tau \to 0$ y para $j < i-1$.

Este proceso que se acaba de construir se llama el proceso minimal. Nosotros acabamos de mencionar la construcción de Harris de un espacio de probabilidad para un proceso de ramificación. En esta construcción cada punto en el espacio muestral representa un completo arbol familiar, especificando el tiempo de nacimiento, longitud de vida, ancestros y descendientes de cada individuo, y una apropiada medida de probabilidad es construida en la extensión de Borel en los conjuntos cilíndricos de estos espacios.

Cuando la distribución del tiempo de vida es exponencial, Harris prueba que el proceso es de Markov, y tiene una función de transición que satisface las ecuaciones de Kolmogorov.

El obtuvo un proceso markoviano con el mismo mecanismo de transición ya descrito, pero en espacios muestrales subyacentes específicamente identificados como espacios de árboles de familias.

Esta identificación será de utilidad para nosotros. Por ejemplo ésta nos posibilitará para definir variables aleatorias como

$$Z(t+\tau,\omega) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{Z(t,\omega)} Z_t^{(i)}(\tau,\omega) & \text{si } Z(t,\omega) > 0 \\ 0 & \text{si } Z(t,\omega) = 0 \end{cases}$$

donde $Z_t^{(i)}(\tau,\omega)$ es el número de descendientes que estan vivos hasta el tiempo $(t+\tau)$ del i-ésimo individuo de los $Z(t,\omega)$ existentes al tiempo t.

Los procesos $Z(t,\omega)$ y $\{Z_t^{(i)}(\tau,\omega);\tau\geq 0\}$ son independientes y equivalentes a $\{Z(u,\omega);u\geq 0\}$, con la hipótesis usual de que $Z(0,\omega)=1$.

2.4. Las Ecuaciones Backward y Forward de Kolmogorov

En esta sección vamos a construir a las ecuaciones de Kolmogorov. El proceso minimal es indispensable para dicha construcción.

Proposición 2.4.1. *El proceso markoviano de ramificación a tiempo continuo satisface la ecuación forward de Kolmogorov dada por*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t)=-jaP_{ij}(t)+a\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{j+1}kP_{ik}(t)\rho_{j-k+1}$$

Demostración. Supongamos que $Z(t+h)=j$ y $Z(t)=i$ para cualquier $i\in\{1,2,3,\ldots\}$ y $j\in\{0,1,2,3,\ldots\}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}P_{ij}(t+h)&=\mathbb{P}(Z(t+s+h)=j|Z(s)=i)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(Z(t+s+h)=j,Z(t+s)=k|Z(s)=i)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(Z(t+s+h)=j|Z(t+s)=k)\mathbb{P}(Z(t+s)=k|Z(s)=i)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(t+h) = & \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{j+1} \mathbb{P}(Z(t+s+h)=j|Z(t+s)=k)P_{ik}(t)+ \\
& + \mathbb{P}(Z(t+s+h)=j|Z(t+s)=j)P_{ij}(t)+ \\
& + \sum_{k=j+2}^{\infty} \mathbb{P}(Z(t+s+h)=j|Z(t+s)=k)P_{ik}(t) \\
= & \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{j+1} P_{ik}(t)(kah\rho_{j-k+1}+o(h))+ \\
& + P_{ij}(t)(1-jah+o(h)) + \sum_{k=j+2}^{\infty} o(h)P_{ik}(t) \\
= & \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{j+1} akhP_{ik}(t)\rho_{j-k+1} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{j+1} P_{ik}(t)o(h) + P_{ij}(t)- \\
& - jahP_{ij}(t) + o(h) + \sum_{j+2}^{\infty} o(h)P_{ik}(t) \\
= & P_{ij}(t) - jaP_{ij}(t)h + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{j+1} kahP_{ik}(t)\rho_{j-k+1} + o(h)
\end{aligned}
$$

Ahora si restamos en ambos lados $P_{ij}(t)$ y dividimos entre h, entonces la ecuación nos queda

$$\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h} = -jaP_{ij}(t) + a\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{j+1} kP_{ik}(t)\rho_{j-k+1} + o(1)$$

y si a h la hacemos tender a cero tenemos a la ecuación *forward* de Kolmogorov

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t) = -jaP_{ij}(t) + a\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{j+1} kP_{ik}(t)\rho_{j-k+1}$$

■

Proposición 2.4.2. *El proceso markoviano de ramificación a tiempo continuo satisface la ecuación backward de Kolmogorov dada por*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t) = -iaP_{ij}(t) + ia\sum_{\substack{k=i-1 \\ k\neq i}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_{k-i+1}$$

Demostración. Para obtener la ecuación *backward* de Kolmogorov, nuevamente vamos a suponer que $Z(t+h) = j$ y $Z(t) = i$ para cualquier $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $j \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t+h) &= \mathbb{P}(Z(t+s+h) = j | Z(s) = i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z(t+s+h) = j, Z(h+s) = k | Z(s) = i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z(t+s+h) = j | Z(h+s) = k)\mathbb{P}(Z(h+s) = k | Z(s) = i) \\
&= \sum_{k=1}^{i-2} P_{kj}(t)\mathbb{P}(Z(h+s) = k | Z(s) = i) + \\
&\quad + P_{ij}(t)\mathbb{P}(Z(h+s) = i | Z(s) = i) + \\
&\quad + \sum_{\substack{k=i-1 \\ k \neq i}}^{\infty} P_{kj}(t)\mathbb{P}(Z(h+s) = k | Z(s) = i) \\
&= \sum_{k=1}^{i-2} P_{kj}(t)o(h) + P_{ij}(t)(1 - iah + o(h)) + \\
&\quad + \sum_{\substack{k=i-1 \\ k \neq i}}^{\infty} P_{kj}(iah\rho_{k-i+1} + o(h)) \\
&= P_{ij}(t) - iahP_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=i-1 \\ k \neq i}}^{\infty} P_{kj}(t)iah\rho_{k-i+1}h + o(h)
\end{aligned}$$

Ahora si restamos $P_{ij}(t)$ en ambos lado de la igualdad y dividimos entre h, entonces la ecuación nos queda

$$\frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} = -iaP_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=i-1 \\ k \neq i}}^{\infty} P_{kj}(t)ia\rho_{k-i+1} + o(1)$$

y si hacemos tender h a cero vamos a tener a la ecuación *backward* de Kolmogorov.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t) = -iaP_{ij}(t) + ia\sum_{\substack{k=i-1 \\ k \neq i}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_{k-i+1}$$

■

Definición 2.4.1. *Llamaremos al conjunto de funciones $\{P_{ij}(t)\}$ una solución de las ecuaciones backward y forward de Kolmogorov si son no negativas,* *absolutamente continuas en* 0 *y en* t*, satisfacen las ecuaciones de Kolmogorov y las siguientes condiciones*

i) $P_{ij}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ik}(t_1)P_{kj}(t) \qquad i,j = 0,1,2,\ldots \qquad 0 \le t_1 \le t$
(ecuación de Chapman-Kolmogorov)

ii) $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) \le 1 \qquad i = 0,1,2,\ldots$

2.5. Función Generadora

Por el momento vamos a suponer que $\{P_{ij}(t)\}$ es una única solución de las ecuaciones de Kolmogorov, por ser única satisface

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1.$$

La función generadora juega un papel importante en el análisis de los procesos continuos. Antes de definir a la función generadora del proceso, vamos a definir una función $f(s)$ como

$$f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho_j s^j \qquad \text{donde} \qquad |s| \le 1$$

y otra función $u(s)$ como

$$u(s) = a[f(s) - s].$$

El número a, que toma valores en el intervalo $(0,\infty)$, y la función $\{\rho_j : j = 0,1,2,\ldots\}$ son los datos totales del proceso $\{Z(t) : t \ge 0\}$.

Definiremos a la función generadora del proceso $\{Z(t) : t \ge 0\}$ como

$$\begin{aligned} F_k(s,t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z(t) = j | Z(0) = k) s^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj}(t) s^j \\ &= \mathbb{E}[s^{Z(t)}]. \end{aligned}$$

Si $k = 1$ entonces la funcion generadora se denota por $F(s,t)$. Por las ecuaciones de Kolmogorov podemos ver que $F(s,t)$ satisface las siguientes relaciones las cuales demostraremos mas adelante

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = u(F(s,t)) \qquad \text{(ecuación } \textit{backward}\text{)} \tag{2.3}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = u(s)\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) \qquad \text{(ecuación } \textit{forward}\text{)} \tag{2.4}$$

con condición de frontera

$$F(s,0) = s.$$

Proposición 2.5.1. *El Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo con solución única satisface la ecuacion backward de Kolmogorov para la función generadora*

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = u(F(s,t)).$$

Demostración. Para la construcción de la ecuación *backward* para la función generadora, primero tenemos que ver que de la ecuación *backward* original

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t) = -iaP_{ij}(t) + ia\sum_{\substack{k=i-1\\k\neq i}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_{k-i+1}$$

se puede afirmar que $\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t)$ converge uniformemente en $(0,t)$ a $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t)$, porque $\sum_{j=0}^{n}P_{ij}(t)$ converge uniformemente en $(0,t)$ a $\sum_{j=0}^{\infty}P_{ij}(t)$ y en consecuencia $\sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{k=i-1\\k\neq i}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_{k-i+1}$ converge uniformemente en el mismo intervalo a $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\substack{k=i-1\\k\neq i}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_{k-i+1}$.

Si la ecuación *backward* original es multiplicada por s^j en ambos lados, al introducir la suma finita hasta n podemos ver que esta nueva relación converge uniformemente en el intervalo $(0,t)$ a $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t)s^j$, ya que $|s| \leq 1$, es decir,

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t)s^j \xrightarrow{c.u.} \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t)s^j.$$

De esta manera podemos aplicar el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1. *Sean $a < b$ y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones derivables en (a,b) tal que la sucesión $\{f'_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente en (a,b) y existe un punto $x_0 \in (a,b)$ tal que la sucesión $\{f_n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ converge. Entonces la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente en (a,b) y*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n$$

Demostración. Para demostrar que la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente, es suficiente mostrar que dicha sucesión es de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$. La sucesión $\{f_n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ converge, entonces es de Cauchy, y existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $m, n \geq N_1$.

También, la sucesión $\{f'_n : n \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy; sea $N \geq N_1$ tal que

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

para todo $m, n \geq N$ y $x \in (a,b)$.

Para todo $n, m \geq N$ y $x \in (a,b)$ ahora tenemos

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x_0)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_0) - f_m(x) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\
&\leq |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)| + \frac{\epsilon}{2} \\
&= |(f_n - f_m)'(\xi)||x - x_0| + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2(b-a)}|x - x_0| + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

donde $\xi \in (x_0, x)$; la existencia de ξ se deduce del Teorema del Valor Medio.

Entonces, la sucesión $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente, es decir

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Para finalizar la demostración tenemos que mostrar que f es diferenciable y que $f' = \lim_{n\to\infty} f'_n$. Sea $g = \lim_{n\to\infty} f'_n$; lo que tenemos que verificar es

$$f(x+t) = f(x) + g(x)t + o(t) \qquad t \to 0$$

para todo $x \in (a.b)$; esto es equivalente a la siguiente afirmación:

Para toda $x \in (a,b)$ y $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$|f(x+t) - f(x) - g(x)t| \leq \epsilon|t|$$

para toda t con $|t| < \delta$. Sean $x \in (a,b)$ y $\epsilon > 0$. Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n = g$ existe, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$

$$|f'_n(\xi) - f_N(\xi)| < \frac{\epsilon}{4}$$

para toda $\epsilon \in (a,b)$. Entonces, cuando $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\big|f_n(x+t) - f_n(x) - f'_n(x)t - \big(f_N(x+t) - f_N(x) - f'_N(x)t\big)\big| \\
&= |(f_n - f_N)(x+t) - (f_n - f_N)(x) - (f_n - f_N)'(x)t| \\
&\leq |(f_n - f_N)(x+t) - (f_n - f_N)(x)| + |(f_n - f_N)'(x)|t \\
&\leq 2\sup\{|(f_n - f_N)'(\xi)| : \epsilon \in (a,b)\}t \\
&< \frac{\epsilon t}{2}
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando n se va a infinito en la desigualdad

$$\big|f_n(x+t) - f_n(x) - f'_n(x)t - \big(f_N(x+t) - f_N(x) - f'_N(x)t\big)\big| < \frac{\epsilon t}{2}$$

obtenemos

$$\big|f(x+t) - f(x) - g(x)t - \big(f_N(x+t) - f_N(x) - f'_N(x)t\big)\big| < \frac{\epsilon t}{2}.$$

La función f_N es diferenciable en x, entonces existe $\delta > 0$ tal que para toda t con $|t| < \delta$,

$$|f_N(x+t) - f_N(x) - f'_N(x)t| < \frac{\epsilon t}{2}$$

de donde

$$|f(x+t) - f(x) - g(x)t| < |f_N(x+t) - f_N(x) - f'_N(x)t| + \frac{\epsilon t}{2} < \epsilon t$$

para toda t tal que $|t| < \delta$. ∎

Si tomamos $f_n(t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)s^j$ y $f_n'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{ij}(t)s^j$ y aplicamos el teorema 2.5.1, entonces tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)s^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{ij}(t)s^j.$$

Ahora, con este resultado ya se puede obtener la ecuación *backward* de Kolmogorov para la función generadora. Sea la ecuación *backward* de Kolmogorov original

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{ij}(t) = -iaP_{ij}(t) + ia \sum_{\substack{k=i-1 \\ k\neq i}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_{k-i+1}$$

para $i = 1$ tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{1j}(t) = -aP_{1j}(t) + a \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_k.$$

Si multiplicamos en ambos lados por s^j tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{1j}(t)s^j = -aP_{1j}(t)s^j + a \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_k s^j$$

ahora vamos a introducir la suma sobre j, lo cual nos da

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{1j}(t)s^j = -a\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t)s^j + a \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_k s^j$$

aplicando el teorema 2.5.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t)s^j &= -a\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t)s^j + a \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{\infty} P_{kj}(t)\rho_k s^j \\
&= -aF(s,t) + a\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{\infty} \rho_k \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj}(t)s^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t)s^j &= -aF(s,t) + a\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{\infty} \rho_k F_k(s,t) \\
&= -aF(s,t) + a\sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{\infty} \rho_k [F(s,t)]^k \\
&= -aF(s,t) + af(F(s,t))
\end{aligned}$$

Gracias a esta última relación tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = u(F(s,t))$$

que es a lo que se quería llegar. ■

Proposición 2.5.2. *El Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo con solución única satisface la ecuación forward de Kolmogorov para la función generadora*

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = u(s)\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)$$

Demostración. Para obtener a la ecuación *forward* de Kolmogorov de la función generadora se tiene que hacer el mismo análisis que en el caso de la ecuación *backward*, para así aplicar el teorema 2.5.1.

Sea la ecuación *forward* de Kolmogorov

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{ij}(t) = -jaP_{ij}(t) + a\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{j+1} kP_{ik}\rho_{j-k+1}$$

para $i = 1$ tenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{1j}(t) = -jaP_{1j}(t) + a\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{j+1} kP_{1k}\rho_{j-k+1}.$$

Si ahora multiplicamos en ambos lados por s^j tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{1j}(t)s^j = -jaP_{1j}(t)s^j + a\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{j+1} kP_{1k}\rho_{j-k+1}s^j$$

e introducimos la suma sobre j, lo cual nos da

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P_{1j}(t)s^j = -a\sum_{j=0}^{\infty} jP_{1j}(t)s^j + a\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{j+1} kP_{1k}\rho_{j-k+1}s^j$$

aplicando el teorema 2.5.1 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t)s^j &= -a\sum_{j=0}^{\infty} jP_{1j}(t)s^j + a\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{j+1} kP_{1k}\rho_{j-k+1}s^j \\
&= -as\sum_{j=1}^{\infty} jP_{1j}(t)s^{j-1} + a\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{j+1} kP_{1k}\rho_{j-k+1}s^j
\end{aligned}
$$

sea $y = k - 1$ tenemos

$$
\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = -as\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) + a\sum_{j=0}^{\infty} s^j \sum_{\substack{y=0\\y\neq j-1}}^{j} (y+1)P_{1(y+1)}\rho_{j-y}
$$

en el último término de la derecha vemos que es una multiplicación de series, entonces la igualdad nos queda

$$
\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = -as\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) + a\Big[\sum_{j=0}^{\infty} s^j(j+1)P_{1(j+1)}(t)\Big]\Big[\sum_{j=0}^{\infty} s^j\rho_j\Big]
$$

ahora sea $r = j + 1$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) &= -as\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) + a\Big[\sum_{r=1}^{\infty} rs^{(r-1)}P_{1r}(t)\Big]\Big[\sum_{j=0}^{\infty} s^j\rho_j\Big] \\
&= -as\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) + a\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)f(s) \\
&= a[f(s) - s]\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) \\
&= u(s)\frac{\partial}{\partial s}F(s,t)
\end{aligned}
$$

■

Para obtener la iterada de la función generadora es necesario utilizar la ecuación de Chapman-Kolmogorov, de esta manera tenemos que

$$\begin{aligned}
F(s,t+u) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{1k}(t+u)s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(u)P_{jk}(t)s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P_{1j}(u)P_{jk}(t)s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(u)\sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}(t)s^k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(u)\big[F(s,t)\big]^j \\
&= F(F(s,t),u)
\end{aligned}$$

Dicha relación es análoga a la fórmula iterada para $f_n(s)$ en el Proceso de Ramificación de Galton-Watson.

2.6. Existencia y Unicidad de las Soluciones.

De algunos resultados de Feller (1940)[1] tenemos que siempre existe una solución $\{P_{ij}(t)\}$ común para ambas ecuaciones de Kolmogorov. Más adelante veremos que cualquier solución de la ecuación (2.1) tiene la propiedad

$$P_{ij}(t) = \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=j} P_{1r_1}(t)P_{1r_2}(t)\cdots P_{1r_k}(t). \tag{2.5}$$

Lo que nos dice esta relación es que si la población a un cierto tiempo t, que empieza con i individuos al tiempo inicial 0, se distribuye como la suma de i poblaciones independientes que empiezan con un sólo individuo.

Desafortunadamente aunque las ecuaciones de Kolmogorov siempre tengan una solución que satisface $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) \leq 1$ estas soluciones pueden no ser únicas. Relacionado con esta dificultad está el hecho de que la interpretación probabilística de todo lo anterior puede no ser siempre válido. Este problema surge con la posible producción infinita de partículas en un tiempo finito, es decir al explotar, una situación que existe cuando hay soluciones para las

[1] Ver [7]

ecuaciones de Kolmogorov que satisfacen la desigualdad $\sum\limits_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) < 1$.

Si tenemos que existen soluciones para la cuales se satisface $\sum\limits_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) < 1$, entonces la ecuación (2.2) tiene muchas soluciones, aunque la ecuación (2.1) tenga solamente una. En el caso en que la solución de la ecuación (2.1) satisfaga $\sum\limits_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1$, entonces la ecuación (2.2) tiene una única solución, este resultado se verá a continuación pero antes demostraremos el siguiente lema.

Lema 2.6.1. *Si* $\{P_{ij}(t)\}$ *es una solución de la ecuación (2.1) entonces*

$$P_{ij}(t) \geq e^{-at} \tag{2.6}$$

Demostración. De la ecuación (2.1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{ij}(t) = -jaP_{ij}(t) + a \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{j+1} kP_{ik}\rho_{j-k+1}$$

si tenemos que $i = j = 1$ entonces la ecuación queda de la siguiente manera

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{11}(t) = -aP_{11}(t) + 2aP_{12}\rho_0.$$

Con esto afirmamos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_{11}(t) \geq -aP_{11}(t).$$

Al resolver esta desigualdad con técnicas de ecuaciones diferenciales ordinarias tenemos que

$$P_{11}(t) \geq e^{-at} \qquad \blacksquare$$

Ahora como tenemos que $F_i(s,t) = \big[F(s,t)\big]^i$ entonces podemos obtener una relación para $\frac{\partial}{\partial t} F_i(s,t)$, suponiendo que tenemos una solución para la ecuación (2.1). De la ecuación (2.4) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} F(s,t) = u(s) \frac{\partial}{\partial s} F(s,t).$$

Y para $F_i(s,t)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F_i(s,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\big[F(s,t)\big]^i\\ &= i\big[F(s,t)\big]^{i-1}\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)\\ &= i\big[F(s,t)\big]^{i-1}u(s)\frac{\partial}{\partial s}F(s,t).\end{aligned}$$

Pero tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial s}F_i(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\big[F(s,t)\big]^i = i\big[(F(s,t)\big]^{i-1}\frac{\partial}{\partial s}F(s,t),$$

entonces tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}F_i(s,t) = u(s)\frac{\partial}{\partial s}F_i(s,t). \tag{2.7}$$

Teorema 2.6.1. *Existe una única solución $\{P_{ij}(t)\}$ de la ecuación forward de Kolmogorov si la función generadora $F_i(s,t)$ satisface la ecuación (2.7) para $|s|<1$, $F_i(s,t)=\big[F(s,t)\big]^i$ para toda $i\in\{0,1,2,\ldots\}$ y como consecuencia tenemos que la ecuación (2.5) se satisface*

Demostración. Sea s_0 un punto fijo en el intervalo $(0,1)$, y t esta en el intervalo $(0,T)$ donde T es un número positivo fijo y arbitrario. Además vamos a considerar a i como un entero positivo fijo.

Sea

$$A = \sup_{-s_0\le s\le s_0}\Big|u(s)\Big|$$

y sea n un entero positivo tan grande que se cumple que $s_0 - A\frac{T}{n} > 0$.

Hay que notar que

$$\sup_{-s_0\le s\le s_0}\Big|\tfrac{\partial}{\partial s}u(s)\Big| < \infty$$

Ahora de un resultado muy bien conocido de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales (Kamke [9]), la ecuación (2.7) tiene exactamente una solución en el trapezoide $0\le t\le \frac{T}{n}$, $-(s_0-At)\le s\le s_0-At$, tomando como valor inicial a $F_i(s,0^+)=s^i$.

Si $F_i^*(s,t)$ es una solución tal que es una serie de potencias en s, convergente para $|s|\le s_0$, entonces nosotros tendremos que $F_i^*(s,t)=F_i(s,t)$

en el rectangulo $0 \leq t \leq \frac{T}{n}$, $-s_0 \leq s \leq s_0$, ya que $F_i^*(s,t) = F_i(s,t)$ en el trapezoide.

Podemos utilizar el mismo argumento para demostrar la unicidad en el siguiente rectangulo con $\frac{T}{n}$ de ancho, y seguir así hasta llegar a T. Como T es arbitrario podemos ver que la ecuación (2.7) tiene una única solución en la región $-s_0 \leq s \leq s_0$, $t \geq 0$, y esto es para cada t en una serie de potencias en s que es convergente para $|s| \leq s_0$.

Si la equación *forward* tuviese una segunda solución $\{P_{ij}^*(t)\}$ su correspondiente función generadora $F_i^*(s,t)$ es una solución de la serie de potencias de la ecuación (2.7) que tiene que coincidir con $F_i(s,t)$, entonces $\{P_{ij}^*(t)\} = \{P_{ij}(t)\}$. Esto prueba la unicidad de la solución para la ecuación *forward* de Kolmogorov.

Si $F(s,t)$ es solución de la ecuación (2.7) con valor inicial s, entonces $\big[F(s,t)\big]^i$ es una solución con el valor inicial s^i. Por la propiedad de la unicidad tenemos que $\big[F(s,t)\big]^i = F_i(s,t)$, y esto prueba que la ecuación (2.5) se satisface. ■

Lema 2.6.2. *La función generadora $F(s,t)$ satisface la desigualdad para $|s| \leq 1$*

$$\big|F(s,t)\big| \leq (1 - P_{11}(t))(1 - |s|) + |s|$$

y si t esta en un intervalo finito, entonces existe una constante $c \in (0,1)$, tal que

$$\big|F(s,t)\big| \leq 1 - c(1 - |s|).$$

Demostración. Primero vamos a ver que la desigualdad para $\big|F(s,t)\big|$ se cumple para toda t en un intervalo finito

$$\begin{aligned}
\left|F(s,t)\right| &= \Big|\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t)s^j\Big| \\
&= \Big|\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t)s^j\Big| - P_{11}(t)|s| + P_{11}(t)|s| \\
&\leq P_{11}(t)|s| - P_{11}(t) + \Big|\sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t)s^j\Big| \\
&\leq P_{11}(t)|s| - P_{11}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \left|P_{1j}(t)\right| \\
&\leq P_{11}(t)|s| - P_{11}(t) + 1 \\
&\leq P_{11}(t)|s| - P_{11}(t) + 1 - |s| + |s| \\
&\leq (1 - P_{11}(t))(1 - |s|) + |s|.
\end{aligned}$$

Ahora nosotros sabemos que $P_{11}(t)$ satisface la siguiente desigualdad por el Lema 2.6.1

$$P_{11}(t) \geq e^{-at}$$

por lo tanto tenemos que

$$1 - P_{11}(t) \leq 1 - e^{-at}$$

Como t está en un intervalo finito y la función $1 - e^{-at}$ es monótona creciente y su dominio es $[0, 1)$ para toda $t > 0$, entonces existe un número c en $(0, 1)$ tal que $1 - e^{-at} \leq c$ para toda t en el intervalo finito. Con esto tenemos que

$$\left|F(s,t)\right| \leq (1 - P_{11}(t))(1 - |s|) + |s| \leq c(1 - |s|) + |s| \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.6.2. *La ecuación backward de Kolmogorov tiene exactamente una única solución que satisface la propiedad de ramificación (2.5), y ésta es la solución única de la ecuación forward de Kolmogorov. La función generadora .$F(s,t)$ satisface a la ecuación (2.3) para $|s| \leq 1$.*

Demostración. Si $|s| < 1$ entonces por el Lema 2.6.2, $\left|F(s,t)\right|$ está acotada por una constante $\alpha < 1$, cuando t está en un intervalo finito.

Si s y t_1 son números fijos, el lado derecho de la ecuación (2.3) satisface la condición de Lipschitz en la región $-\alpha \leq F(s,t) \leq \alpha$, $0 \leq t \leq t_1$. Entonces la ecuación (2.3) tiene para cada s con $|s| < 1$ una única solución que está acotada por alguna constante menor a uno. Pero si la ecuación (2.2) tiene otra solución $\{P^*_{ij}(t)\}$ que satisface la ecuación (2.7), su correspondiente función generadora $F^*(s,t)$ va a ser una solución a la ecuación (2.3), la cual está acotada por una constante menor a uno, entonces $F^*(s,t) = F(s,t)$ y $\{P_{1j}(t)\} = \{P^*_{1j}(t)\}$.

Desde que $\{P^*_{ij}(t)\}$ está determinada por $\{P_{1j}(t)\}$ entonces por la propiedad (2.7) la unicidad esta probada. ■

La siguiente condición asegura que la única solución de la ecuación *forward* satisface $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1$. En este caso la solución es una única solución para la ecuación *backward*.

Condición 2.6.1. *La serie* $\sum_{j=0}^{\infty} j\rho_j(t)$ *converge uniformemente en cada intervalo finito* $(0,t)$.

Supongamos una t_1 fija y $t \in (0,t_1)$, y sea $F(1,t) = G(t)$. Entonces $G(t)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = -au(G(t))$$

con $G(t_1^-) = 1$ y $0 \leq G(t) \leq 1$.

El lado derecho de la ecuación diferencial satisface la condición de Lipschitz en la región $-1 \leq G(t) \leq 1$ y $0 \leq t \leq t_1$, gracias a la condición 2.6.1 y de la definición de $f(s)$. Entonces la solución es única y como 1 es una solución tenemos que $G(t) = 1$.

2.7. Hipótesis de no explosión.

En esta sección veremos que bajo la hipótesis de no explosión vamos a tener que la solución a las ecuaciones de Kolmogorov van a satisfacer $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1$ para $t \geq 0$, lo cual nos dice que dicha solución va a ser única.

De la ecuación 2.3 tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = a\big[f(F(s,t)) - F(s,t)\big]$$

con condición en la frontera $F(s,0) = s$, de donde se sigue que Entonces afirmamos que

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)}{f(F(s,t)) - F(s,t)} = a$$

y de aquí vemos que

$$\int_s^{F(s,t)} \frac{\mathrm{d}x}{f(x) - x} = at$$

Hipótesis de no explosión : Para toda $\epsilon > 0$ tenemos

$$\int_{1-\epsilon}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{f(x) - x} = \infty$$

Teorema 2.7.1. *La hipotesis de no explosión es necesaria y suficiente para que se satisfaga que* $\mathbb{P}(Z(t) < \infty) = 1$ *ó* $F(1,t) = 1$

Demostración. Primero hay que ver la equivalencia entre $\mathbb{P}(Z(t) < \infty)$ y $F(1,t)$

$$\begin{aligned}
F(1,t) &= \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z(t) = j|Z(0) = 1) \\
&= \mathbb{P}(Z(t) < \infty|Z(0) = 1) \\
&= \mathbb{P}(Z(t) < \infty).
\end{aligned}$$

Ahora tomamos un $s_0 \in (0,1)$, de tal manera que $f(x) - x$ no se acerque mucho a cero para cualquier $x \in [s_0, 1)$.

Tomamos s_1 y t_1 tal que $s_0 < s_1 < 1$, $t_1 > 0$ y $s_1 - at_1 > s_0$, entonces vemos que $\left|\frac{\partial}{\partial t}F(s,t)\right| \leq a$, de esta manera afirmamos que $F(s,t) \geq s - at > s_0$ para $s_1 \leq s < 1$ y $0 \leq t \leq t_1$. Del Lema 2.6.2 podemos ver que $|F(s,t)| < 1$ si $|s| < 1$, entonces aplicamos

$$\int_s^{F(s,t_1)} \frac{1}{f(x) - x} dx = at_1 \qquad \text{para} \qquad s_1 \leq s < 1$$

Para poder retener el valor at_1 cuando s tiende a 1, debemos tener que $F(1, t_1) < 1$ si la integral del fenomeno de no explosión converge, cuando t_1 es positiva; y vamos a tener que $F(1, t_1) = 1$ si dicha integral diverge donde t_1 es finita. ■

Corolario 2.7.1. *Si $f'(1) < \infty$, entonces $F(1, t) = 1$*

Demostración. Solamente tenemos que ver que la relación

$$f(h) - h = (f'(1) - 1)(u - 1) + o(u - 1) \qquad u \to 1$$

se va a cero cuando u tiende a 1, de esta manera utilizando el Teorema que acabamos de demostrar, afirmamos que $F(1, t) = 1$. ■

2.8. Los Momentos de $Z(t)$

Vamos a definir el k-ésimo momento factorial de $Z(t)$, donde $k = 1, 2, 3, \ldots$, como

$$m_k(t) = \mathbb{E}\big[Z(t)(Z(t) - 1) \cdots (Z(t) - k + 1)\big|Z(0) = 1\big].$$

Si la serie $\sum_{j=0}^{\infty} j^k \rho_k$ converge uniformemente en cada intervalo finito $(0, t)$, entonces $m_k(t)$ es finito y se puede obtener derivando a las ecuaciones de Kolmogorov para la función generadora k veces con respecto a s y evaluando en $s = 1$.

Teorema 2.8.1. *Sea $b = a[f'(1) - 1]$ y tomamos $Z(0) = 1$, entonces*

$$\mathbb{E}[Z(t)] = e^{bt}$$

y

$$Var[Z(t)] = \begin{cases} \frac{f''(1) - f'(1) + 1}{f'(1) - 1} e^{bt}(e^{bt} - 1) & si\ b \neq 0, \\ f''(1)at & si\ b = 0. \end{cases}$$

Demostración. Definimos para $|s| < 1$

$$m_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} F(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} k P_{1k}(t) s^{k-1},$$

entonces de la ecuación (2.3) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = a\big[f(F(s,t)) - F(s,t)\big].$$

Si a esta ecuación le calculamos la derivada parcial con respecto a s vamos a tener

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) &= a\left[\frac{\partial}{\partial s}f(F(s,t)) - \frac{\partial}{\partial s}F(s,t)\right] \\
&= a\left[f'(F(s,t)\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) - \frac{\partial}{\partial s}F(s,t)\right] \\
&= a\big[f'(F(s,t)) - 1\big]\frac{\partial}{\partial s}F(s,t) \\
&= a\big[f'(F(s,t)) - 1\big]m_1(s,t)
\end{aligned}$$

y además se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}F(s,t) = \frac{\partial}{\partial t}m_1(s,t).$$

El intercambio de derivadas es válido para $|s| < 1$ por la convergencia absoluta y uniforme de las series. La condición $P_{ij}(0^+) = \delta_{ij}$ implica que $m_1(s,0^+) = 1$.

La solución a esta ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial}{\partial t}m_1(s,t) = a\big[f'(F(s,t)) - 1\big]m_1(s,t)$$

se obtiene fijando a s y utilizando técnicas de ecuaciones diferenciales ordinarias, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m_1(s,t) &= a\big[f'(F(s,t)) - 1\big] m_1(s,t) \\
\frac{\mathrm{d}m_1(s,t)}{m_1(s,t)} &= a\big[f'(F(s,t)) - 1\big]\mathrm{d}t \\
\int_1^{m_1(s,t)} \frac{\mathrm{d}x}{x} &= a\int_0^t \big[f'(F(s,y)) - 1\big]\mathrm{d}y \\
\ln\big|m_1(s,t)\big| &= a\int_0^t \big[f'(F(s,y)) - 1\big]\mathrm{d}y \\
m_1(s,t) &= \exp\left\{a\int_0^t \big[f'(F(s,y)) - 1\big]\mathrm{d}y\right\}
\end{aligned}$$

Si hacemos a s tender a 1, la condición de que la $\sum_{j=1}^{\infty} j\rho_j$ converge uniformemente implica que el integrando en la ecuación a la cual se acaba de llegar esta acotado y se aproxima a un límite acotado, por lo tanto

$$m_1(1,t) = \exp\left\{a\int_0^t \big[f'(1) - 1\big]\mathrm{d}y\right\}$$

y como sabemos que $b = a\big[f'(1) - 1\big]$, entonces

$$m_1(1,t) = \exp\left\{b\int_0^t \mathrm{d}y\right\} = e^{bt}$$

Con esto hemos demostrado la relación para la esperanza. Para la varianza primero vamos a suponer que $b \neq 0$. Al calcular la primera derivada parcial con respecto a s de la ecuación *backward* de Kolmogorov para la función generadora tenemos la siguiente relación

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial F(s,t)}{\partial t} = a\big[f'(F(s,t)) - 1\big] m_1(s,t).$$

Si a esta última ecuación le calculamos la derivada parcial con respecto a s tenemos

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s \partial t} = a\big[f'(F(s,t)) - 1\big]\frac{\partial m_1(s,t)}{\partial s} + af''(F(s,t)) m_1^2(s,t)$$

y además vemos que

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s \partial t} = \frac{\partial m_2(s,t)}{\partial t}.$$

Nuevamente el intercambio de derivadas es válido para $|s| < 1$ por la convergencia absoluta y uniforme de las series. La solución a la ecuación

$$\frac{\partial m_2(s,t)}{\partial t} = a(f'(F(s,t)) - 1)m_2(s,t) + af''(F(s,t))m_1^2(s,t)$$

se obtiene fijando a s y por técnicas de ecuaciones diferenciales ordinarias, entonces tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}m_2(s,t)}{\mathrm{d}t} = a\big[f'(F(s,t)) - 1\big]m_2(s,t) + af''(F(s,t))m_1^2(s,t).$$

Ahora multiplicamos por una función $\mu(s,t)$ con $\mu(s,0) = 1$, la ecuación nos queda

$$\mu(s,t)\frac{\mathrm{d}m_2(s,t)}{\mathrm{d}t} - a\big[f'(F(s,t)) - 1\big]\mu(s,t)m_2(s,t) = af''(F(s,t))\mu(s,t)m_1^2(s,t)$$

y de esta manera tenemos que del segundo termino de la izquierda no le queda mas que ser la derivada de $\mu(s,t)$ con respecto a t, es decir:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mu(s,t)}{\mathrm{d}t} &= -a\big[f'(F(s,t)) - 1\big]\mu(s,t) \\
\frac{\mathrm{d}\mu(s,t)}{\mu(s,t)} &= -a\big[f'(F(s,t)) - 1\big]\mathrm{d}t \\
\int_1^{\mu(s,t)} \frac{\mathrm{d}x}{x} &= -a\int_0^t \big[f'(F(s,y)) - 1\big]\mathrm{d}y \\
\ln\big|\mu(s,t)\big| &= -a\int_0^t \big[f'(F(s,y)) - 1\big]\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

De este modo

$$\mu(s,t) = \exp(-a\int_0^t (f'(F(s,y)) - 1)\mathrm{d}y)$$

entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_2(s,t)\mu(s,t)] = \mu(s,t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_2(s,t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(s,t)m_2(s,t).$$

Regresando a nuestra ecuación original vemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[m_2(s,t)\mu(s,t)\big] &= af''(F(s,t))m_1^2(s,t)\mu(s,t) \\
m_2(s,t)\mu(s,t) &= \int_0^t af''(F(s,y))m_1^2(s,y)\mu(s,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Si hacemos a s tender a 1, la condición de que $\sum_{j=1}^{\infty} j\rho_j$ y que $\sum_{j=1}^{\infty} j(j-1)\rho_j$ convergen uniformemente implica que ambos integrandos en la ecuación a la cual se acaba de llegar estan acotados y se aproximan a un límite acotado, de esta manera

$$
\begin{aligned}
m_2(1,t)e^{-bt} &= \int_0^t af''(1)m_1^2(1,y)e^{-by}\mathrm{d}y \\
&= af''(1)\int_0^t e^{by}\mathrm{d}y \\
&= \frac{af''(1)}{b}e^{by}\Big|_0^t \\
&= \frac{af''(1)}{b}(e^{bt}-1)
\end{aligned}
$$

entonces

$$
m_2(t) = \frac{af''(1)}{b}e^{bt}(e^{bt}-1).
$$

Ahora para obtener la varianza solamente tenemos que sustituir en la siguiente relación

$$
Var[Z(t)] = m_2(t) + m_1(t) - m_1^2(t).
$$

Al sustituir vemos

$$
\begin{aligned}
Var[Z(t)] &= \frac{af''(t)}{b}e^{bt}(e^{bt}-1)+e^{bt}-e^{2bt} \\
&= \frac{f''(t)}{f'(1)-1}e^{bt}(e^{bt}-1)-e^{bt}(e^{bt}-1) \\
&= \frac{f''(t)}{f'(1)-1}e^{bt}(e^{bt}-1)-\frac{f'(1)-1}{f'(1)-1}e^{bt}(e^{bt}-1) \\
&= \frac{f''(t)-f'(1)+1}{f'(1)-1}e^{bt}(e^{bt}-1)
\end{aligned}
$$

Si suponemos que $b=0$, entonces

$$m_2(t)=\int_0^t af''(1)\mathrm{d}y = af''(1)t$$

y

$$m_1(t)=1$$

de esta manera vamos a tener que

$$Var[Z(t)] = af''(1)t$$

Por lo tanto hemos demostrado el teorema. ■

2.9. Probabilidad de Extinción

En esta sección vamos a resolver el problema de extinción de familias para el Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo. Primero vamos a asumir que $\rho_0 > 0$, ya que de otra manera la extinción sería imposible. También vamos a considerar el caso en donde el proceso al tiempo cero empieza con un solo individuo.

Por propiedad del Proceso de Ramificación vamos a tener que

$$P_{i0}(t) = \big[P_{10}(t)\big]^i.$$

Intuitivamente podemos considerar que $P_{i0}(t)$ es una función no decreciente al tiempo t. Nosotros podemos probarlo formalmente considerando que para una $h>0$ tenemos

$$P_{i0}(t*h) = F_i(0,t+h) = \big[F(0,t+h)\big]^i = \big[F(F(0,h),t)\big]^i \geq \big[P_{10}(t)\big]^i$$

Definición 2.9.1. *La probabilidad de extinción puede definirse como la probabilidad de que la familia generada por un solo individuo va a desaparecer, o sea*

$$\eta = \lim_{t\to\infty} P_{10}(t)$$

Utilizando la teoría del proceso de ramificación de Galton-Watson, resultara fácil determinar la probabilidad de extinción en el caso continuo.

Teorema 2.9.1. *La probabilidad de extinción η del proceso markoviano de ramificación a tiempo continuo $Z(t)$ es la raíz no negativa más pequeña de la ecuación $F(s,t_0) = s$, donde t_0 es cualquier número positivo*

Demostración. Sea t_0 un número positivo fijo y consideremos a el proceso de Galton-Watson $Z(0), Z(t_0), Z(2t_0), \ldots, Z(nt_0), \ldots$, donde $Z(t)$ es la población al tiempo t correspondiente al Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo original, que empieza con un sólo individuo al tiempo $t = 0$. Como $Z(t)$ es un proceso de Markov, el proceso a tiempo discreto $Y_n = Z(nt_0)$ obviamente sera una cadena de Markov y describe a un proceso de Galton-Watson. Por la hipótesis de homogeneidad del tiempo y por la propiedad de ramificación podemos obtener

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_{n+1} = k|Y_n = i)s^k &= \mathbb{E}[s^{Y_{n+1}}|Y_n = i] \\
&= \mathbb{E}[s^{Z((n+1)t_0)}|Z(nt_0) = i] \\
&= \mathbb{E}[s^{Z(t_0)}|Z(0) = i] \\
&= \left(\mathbb{E}[s^{Z(t_0)}|Z(0) = 1]\right)^i \\
&= \left(\mathbb{E}[s^{Y_1}|Y_0 = 1]\right)^i
\end{aligned}$$

Esto muestra que Y_n es un proceso de ramificación y la función generadora de el número de descendientes de un solo individuo es $F(s,t_0)$. Nosotros sabemos que la probabilidad de extinción para Y_n es la raíz no negativa más pequeña de la ecuación $F(s,t_0)=s$. Pero

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_n=0 \text{ para algún } n\in\mathbb{N}) &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Y_n=0)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(Z(nt_0)=0)\\ &= \lim_{t\to\infty}\mathbb{P}(Z(t)=0)\\ &= \eta\end{aligned}$$

Entonces la probabilidad de extinción η del Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo $Z(t)$ es la raíz no negativa más pequeña de la ecuación $F(s,t_0)=s$, donde t_0 es cualquier número positivo. ■

Como η es la raíz de $F(s,t_0)=s$ para cualquier t_0, podemos pensar que se podría calcular a η de una ecuación que no dependa del tiempo. Lo cual si sucede y se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 2.9.2. *La probabilidad de extinción η es la raíz no negativa más pequeña de la ecuación $u(s)=0$. Donde $\eta=1$ si y sólo si $u'(1)\leq 0$.*

Demostración. Como η satisface $F(s,t_0)=s$ para cualquier t_0, podemos afirmar que $u(\eta)=0$.

Como

$$u''(s)=a\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\rho_j^{(j-2)}\geq 0$$

$u(s)$ es convexa en el intervalo $[0,1]$. Si $u(1)=0$ y $u(0)=a\rho_0$, $u(s)$ tiene a lo más una raíz en $[0,1)$.

Hay que notar que $\mathbb{E}(Z(t_0))=\mathbb{E}(Y_1)>1$ si y sólo si $u'(1)>0$. Esto significa que para el Proceso de Ramificación de tiempo discreto $Z(nt_0)$, $n=0,1,2,\ldots$ y $t_0>0$ fijo, tiene una única raíz en el intervalo $(0,1)$ y en consecuencia también se vale para el Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo $Z(t)$. De manera similar se tiene que $\mathbb{E}(Z(t_0))=\mathbb{E}(Y)\leq 1$ si y sólo si $u'(1)\leq 0$, entonces $\eta=1$. ■

2.10. Ejemplos

Resolver las ecuaciones de Kolmogorov resulta en la mayoría de los casos una tarea muy difícil y por ello la distribución de $Z(t)$ muy pocas veces puede determinarse de manera explícita.

Sin embargo, existen dos ejemplos importantes que si se pueden resolver, estos son el Proceso de Yule y el Proceso de Nacimiento y Muerte.

Ejemplo 2.10.1 (El Proceso de Yule de Fisión Binaria).

Definamos a $\{Z(t) : t \geq 0\}$ como un proceso markoviano de ramificación a tiempo continuo, en donde cada partícula vive una longitud de tiempo que se distribuye de manera exponencial y enseguida se divide en dos partículas. Lo que queremos ver es que la función generadora es de la forma

$$F(s,t) = \frac{se^{-at}}{1 - s(1 - e^{-at})} \qquad \text{con} \qquad F(s,0) = s$$

Como cada partícula al morir se divide en dos partículas podemos afirmar que $\rho_2 = 1$, como consecuencia vemos que $f(s) = s^2$. Con todos estos resultados la ecuación *backward* de Kolmogorov para la función generadora queda de la siguiente manera

$$\frac{\partial F(s,t)}{\partial t} = a\big[F^2(s,t) - F(s,t)\big]$$

Para obtener la solución a está ecuación diferencial parcial vamos a fijar a s, entonces el problema se restringe a solucionar una ecuación diferencial ordinaria. Primero vamos a proponer una función $\mu(t)$ con $\mu(0) = 1$, entonces

$$\mu(t)\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{\mathrm{d}t} + a\mu(t)F(s,t) = a\mu(t)F^2(s,t)$$

y

$$\mu(t)\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{\mathrm{d}t}\frac{1}{F^2(s,t)} + \frac{a\mu(t)}{F(s,t)} = a\mu(t).$$

Entonces proponemos a $\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t}$ como

$$\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mathrm{d}t} = -a\mu(t)$$

cuya solución se obtiene de la siguiente manera

$$\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mu(t)} = -a\mathrm{d}t$$
$$\ln\left|\mu(t)\right| = -at$$
$$\mu(t) = e^{-at}.$$

De esta manera tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-e^{-at}}{F(s,t)}\right) = ae^{-at}$$
$$\left.\frac{-e^{-ay}}{F(s,y)}\right|_0^t = -e^{-ax}\Big|_0^t$$
$$\frac{-e^{-at}}{F(s,t)} - \frac{1}{s} = -e^{-at} + 1$$

multiplicando por un menos y al desarrollar esta relación tenemos

$$\frac{e^{-at}}{F(s,t)} = \frac{1-(1-e^{-at})s}{s}$$

de aquí se ve claramente que

$$F(s,t) = \frac{se^{-at}}{1-(1-e^{-at})s}$$

que era a lo que queriamos llegar.

Ejemplo 2.10.2 (El Proceso de Nacimiento y Muerte)**.**

Definamos a $\{Z(t); t \geq 0\}$ como un Proceso Markoviano de Ramificación a Tiempo Continuo en donde cualquier individuo en un cierto tiempo t tiene una probabilidad $\mu\mathrm{d}t$ de morir en un intervalo $(t, t+\mathrm{d}t)$ y una probabilidad $\lambda\mathrm{d}t$ de desaparecer y ser reemplazado por dos nuevos individuos en el mismo intervalo de tiempo. Vamos a ver que la función generadora esta determinada por

$$F(s,t) = \frac{\mu(s-1) - e^{(\mu-\lambda)t}(\lambda s - \mu)}{\lambda(s-1) - e^{(\mu-\lambda)t}(\lambda s - \mu)} \qquad \text{con} \qquad F(s,0) = s$$

Como tenemos que cualquier individuo tiene una probabilidad de morir sin reproducirse μ, entonces $\rho_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$, pero si se reproduce solamente tiene dos descendientes, entonces $\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$. De esta manera vemos que

$$f(s) = \frac{\mu + \lambda s^2}{\mu + \lambda} \qquad \text{y} \qquad a = \mu + \lambda.$$

Entonces la ecuación *backward* de Kolmogorov para la función generadora nos queda como

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(s,t)}{\partial t} &= (\mu+\lambda)\left(\frac{\mu + \lambda F^2(s,t)}{\mu+\lambda} - F(s,t)\right) \\ &= \lambda F^2(s,t) - (\mu+\lambda)F(s,t) + \mu.\end{aligned}$$

El lado derecho de la ecuación se puede factorizar y nos queda como

$$\frac{\partial F(s,t)}{\partial t} = \lambda(F(s,t)-1)\left(F(s,t) - \frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Para resolver esta ecuación diferencial parcial fijamos a s, de esta manera nos limitaremos a resolver una ecuacion diferencial ordinaria, entonces vamos a tener que

$$\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{(F(s,t)-1)\big(F(s,t)-\frac{\mu}{\lambda}\big)} = \lambda \mathrm{d}t$$

Por el método de fracciones parciales vamos a tener que

$$\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{(F(s,t)-1)(F(s,t)-\frac{\mu}{\lambda})} = \frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{F(s,t)-1} + \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{F(s,t)-\frac{\mu}{\lambda}}$$

entonces nos limitaremos a solucionar la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{F(s,t)-1} + \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{F(s,t)-\frac{\mu}{\lambda}} &= \lambda \mathrm{d}t \\ -\frac{\mathrm{d}F(s,t)}{F(s,t)-1} + \frac{\mathrm{d}F(s,t)}{F(s,t)-\frac{\mu}{\lambda}} &= (\mu-\lambda)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

de esta manera

$$\int_s^{F(s,t)} \frac{\mathrm{d}x}{x-\frac{\mu}{\lambda}} - \int_s^{F(s,t)} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = (\mu-\lambda)\int_0^t \mathrm{d}y$$

$$\left[\ln\left|x-\frac{\mu}{\lambda}\right| - \ln\left|x-1\right|\right]\Bigg|_s^{F(s,t)} = (\mu-\lambda)t$$

$$\ln\left|\frac{\lambda x-\mu}{\lambda(x-1)}\right|\Bigg|_s^{F(s,t)} = (\mu-\lambda)t$$

$$\ln\left|\frac{\lambda F(s,t)-\mu}{\lambda(F(s,t)-1)}\right| - \ln\left|\frac{\lambda s-\mu}{\lambda(s-1)}\right| = (\mu-\lambda)t$$

$$\ln\left|\frac{\lambda F(s,t)-\mu}{\lambda(F(s,t)-1)}\frac{\lambda(s-1)}{\lambda s-\mu}\right| = (\mu-\lambda)t$$

$$\frac{\lambda F(s,t)-\mu}{\lambda(F(s,t)-1)}\frac{\lambda(s-1)}{\lambda s-\mu} = e^{(\mu-\lambda)t}$$

Ahora la único que nos hace falta por hacer es obtener una forma explícita para $F(s,t)$, de esta manera vamos a tener que

$$\lambda F(s,t)-\mu = \frac{\lambda(F(s,t)-1)(\lambda s-\mu)e^{(\mu-\lambda)t}}{\lambda(s-1)}$$

$$\lambda F(s,t) - \frac{\lambda F(s,t)(\lambda s-\mu)e^{(\mu-\lambda)t}}{\lambda(s-1)} = \frac{\mu\lambda(s-1)-\lambda(\lambda s-\mu)e^{(\mu-\lambda)t}}{\lambda(s-1)}$$

$$F(s,t)\left(\frac{\lambda^2(s-1)-\lambda(\lambda s-\mu)e^{(\mu-\lambda)t}}{\lambda(s-1)}\right) = \frac{\mu\lambda(s-1)-\lambda(\lambda s-\mu)e^{(\mu-\lambda)t}}{\lambda(s-1)}$$

entonces vemos que

$$F(s,t) = \frac{\mu(s-1)-(\lambda s-\mu)e^{(\mu-\lambda)t}}{\lambda(s-1)-(\lambda s-\mu)e^{(\mu-\lambda)t}}$$

Lo cual era a lo que queriamos llegar.

Capítulo 3

El C.B. Proceso

3.1. Introducción

En este capítulo vamos a estudiar al Proceso de Ramificación Continua o C. B. Proceso, donde básicamente vamos a analizar y desarrollar sus principales propiedades.

Primero vamos a definir a la función de ramificación continua, a la cual vamos a asociarle un semigrupo de contracción y gracias a este, veremos que tiene asociado un proceso de Markov fuerte, al que llamaremos Proceso de Ramificación Continua o C.B. proceso. Después vamos a obtener sus momentos, veremos que este proceso ,en especial, es un Proceso de Difusión y gracias a esta propiedad obtendremos la probabilidad de extinción del proceso.

Un problema importante es el de analizar la relación que existe entre el Proceso de Ramificación de Galton-Watson con el C.B. Proceso, ya que este último se puede ver como un proceso límite de Procesos de Galton-Watson normalizados. Tenemos un proceso de Galton-Watson $\{Z_n\}$ y definimos

$$Z_t^{(r)} = \frac{Z_{[rt]} - a_r}{b_r} \qquad \text{donde} \qquad Z_0^{(r)} = c_r$$

y donde $a_r \in \mathbb{R}$, $b_r > 0$ son constantes normalizadoras y c_r son enteros positivos cuyo límite se va a infinito cuando r crece a infinito.

Es claro que para cada $r > 0$ fija, $\{Z_t^{(r)} : t > 0\}$ es un proceso estcástico que denotaremos por U^r. Lo que nos va a interesar es el comportamiento límite de U^r cuando r tiende a infinito. En particular veremos los casos en que $a_r = 0$ y $\lim\limits_{r\to\infty} a_r/b_r = \infty$, los cuales nos daran diferentes resultados.

El C.B. proceso fue estudiado por primera vez por Jirina en 1957, cuya definición es más general que la que se presenta en este capítulo y la relación de los procesos de ramificación de Galton-Watson y los C.B. procesos por Lamperti a finales de los años sesenta.

3.2. Definición

El proceso va a ser definido a través de sus funciones de transición.

Definición 3.2.1. *Una familia* $\{P_t(x,E) : t \geq 0\}$ *de funciones será llamada una función de ramificación continua o C.B. función si satisface las siguientes condiciones:*

i) $P_t(x,E)$ *esta definida para* $t \geq 0$*,* $x \geq 0$ *y* E *un subconjunto de Borel de la semi-recta* $[0,\infty)$*.*

$$P_t : \mathbb{R}^+ * \mathcal{B}([0,\infty)) \longrightarrow [0,1] \qquad \textit{para cada} \qquad t \geq 0.$$

ii) Para x *y* t *fijas,* $P_t(x,\cdot)$*, es una medida de probabilidad; y para un conjunto* E *fijo,* $P_t(x,E)$ *es conjuntamente medible en* x *y* t*.*

iii) La ecuación de Chapman-Kolmogorov, es decir,

$$P_{t+s}(x,E) = \int_0^\infty P_t(u,E)P_s(x,\mathrm{d}u)$$

iv) Para cualquier $x,y,t \geq 0$*,* $\{P_t\}$ *satisface*

$$\begin{aligned} P_t(x+y,E) &= \int_0^\infty P_t(x,E-u)P_t(y,\mathrm{d}u) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}_E(v+w)P_t(x,\mathrm{d}v)P_t(y,\mathrm{d}w) \end{aligned}$$

para cada $E \in \mathcal{B}([0,\infty))$*.*

v) Existen $t > 0$ *y* $x > 0$ *tal que* $P_t(x,\{0\}) < 1$

Observación 3.2.1. *Por la propiedad (*iv*) tenemos que*

$$\int_0^\infty f(u)P_t(x+y,\mathrm{d}u)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(v+w)P_t(x,\mathrm{d}v)P_t(y,\mathrm{d}w)$$

para cualquier función f medible y acotada.

Si examinamos estas condiciones lo primero que vamos a notar es que las primeras tres condiciones corresponden a la definición de función de transición de Markov[1]. La propiedad (*iv*) es la propiedad de ramificación; la cual nos dice que si empezamos en $x+y$ el proceso resultante es equivalente a la suma de dos procesos, uno que empieza en x y otro que empieza en y. Y finalmente la propiedad (v) elimina el caso trivial, en el cual el proceso empieza en cualquier $x \geq 0$, muere instantaneamente y permanece ahí.

En este capítulo vamos a ver que una C.B. función va dar lugar a un proceso fuerte de Markov en los reales no negativos. Este proceso va a ser llamado Proceso de Ramificación con Espacio de Estados Continuo o simplemente C.B. proceso.

Uno de las principales propiedades de este proceso es que se puede ver como un proceso límite de una sucesión de procesos de Galton-Watson, en los cuales la población inicial va a infinito y la escala del tiempo se encoge de una manera específica.

3.3. Existencia y Construcción del C.B. proceso

Para la construcción del C.B. proceso es necesario introducir la definición de medidas de probabilidad infinitamente divisibles.

Definición 3.3.1. *Sea Y una variable aleatoria, con función de distribución $\mathbb{P}_Y$ y transformada de Laplace $\Psi_Y(\lambda)$, se dice que es infinitamente divisible si para todo $n\in\mathbb{N}$ existe una sucesión $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas tal que Y tiene la misma distribución que la suma de estas ($Y=\xi_1+\cdots+\xi_n$) o de manera equivalente si $\Psi_Y(\lambda)=\left(\Psi_{\xi_1}\right)^n$ ó $\mathbb{P}_Y=\mathbb{P}_{\xi_1}*\mathbb{P}_{\xi_2}*\cdots*\mathbb{P}_{\xi_n}$.*

[1] Ver apéndice A

Sea $\{P_t(x,E)\}$ una C.B. función; por la propiedad (iv) es claro que para cada pareja (x,t) la medida $P_t(x,E)$ es infinitamente divisible, ya que dado $x>0$ y $n\in\mathbb{N}$

$$P_t(x,E)=P_t\Big(\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n},E\Big)=\Big[P_t\Big(\frac{x}{n},E\Big)\Big]^{*(n)}$$

La transformada de Laplace de $P_t(x,E)$ es

$$\Psi_t(x,\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda y}P_t(x,\mathrm{d}y)\qquad \lambda\geq 0$$

Vamos a ver que por la propiedad (iv) $\Psi_t(x,\lambda)$ satisface la siguiente relación

$$\Psi_t(x+y,\lambda)=\Psi_t(x,\lambda)\Psi_t(y,\lambda)$$

Veamoslo

$$\begin{aligned}
\Psi_t(x+y,\lambda)&=\int_0^\infty e^{-\lambda z}P_t(x+y,\mathrm{d}z)\\
&=\int_0^\infty e^{-\lambda z}P_t(x,\mathrm{d}z)*P_t(y,\mathrm{d}z)\\
&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda(u+v)}P_t(x,\mathrm{d}u)P_t(y,\mathrm{d}v)\\
&=\int_0^\infty e^{-\lambda v}\int_0^\infty e^{-\lambda u}P_t(x,\mathrm{d}u)P_t(y,\mathrm{d}v)\\
&=\Psi_t(x,\lambda)\int_0^\infty e^{-\lambda v}P_t(y,\mathrm{d}v)\\
&=\Psi_t(x,\lambda)\Psi_t(y,\lambda)
\end{aligned}$$

esto prueba la relación.

Sabemos por la propiedad (ii) que para una t y λ fijas, $\Psi_t(x,\lambda)$ es una función medible de x. Además es claro que $\Psi_t(x,\lambda)$ es monótona decreciente en x y podemos concluir por la relación anterior, que para cada t y λ existe un número $\psi_t(\lambda)$ tal que

$$\Psi_t(x,\lambda)=e^{-x\psi_t(\lambda)}\tag{3.1}$$

Usando la propiedad (*iii*), podemos ver que $\{\psi_t(\lambda)\}$ satisface

$$\psi_{t+s}(\lambda) = \psi_t(\psi_s(\lambda)) \qquad \text{para toda} \qquad \lambda > 0 \tag{3.2}$$

ya que

$$\begin{aligned} e^{-x\psi_{t+s}(\lambda)} &= \int_0^\infty e^{-\lambda z} P_{t+s}(x, \mathrm{d}z) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda z} \int_0^\infty P_s(u, \mathrm{d}z) P_t(x, \mathrm{d}u) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda z} P_s(u, \mathrm{d}z) P_t(x, \mathrm{d}u) \\ &= \int_0^\infty e^{-u\psi_s(\lambda)} P_t(x, \mathrm{d}u) \\ &= e^{-x\psi_t(\psi_s(\lambda))} \end{aligned}$$

esto prueba la relación.

Esta es la forma análoga de la iterada de la función generadora del proceso de Galton-Watson.

Para ir de una función de transición $\{P_t(\cdot,\cdot)\}$ a un proceso de Markov que corresponde a esta, se utilizan las herramientas de la Teoría de Semigrupos. Para cualquier función medible y acotada f en $[0,\infty)$ definimos

$$(T_t f)(x) = \int_0^\infty f(y) P_t(x, \mathrm{d}y)$$

Esto define a una familia de operadores lineales acotados $\{T_t; t \geq 0\}$, de norma unitaria en el espacio de Banach L de funciones medibles y acotadas en $[0,\infty)$ con la norma $||f|| = \sup_{x\geq 0} |f(x)|$.

De la ecuación de Chapman-Kolmogorov tenemos que $\{T_t\}$ satisface la relación

$$T_{t+s} = T_t T_s$$

y esto hace que la familia $\{T_t\}$ sea un semigrupo[2].

[2] Ver apéndice A

Usando la definición

$$
\begin{aligned}
(T_{t+s}f)(x) &= \int_0^\infty f(y)P_{t+s}(x,\mathrm{d}y)\\
&= \int_0^\infty f(y)\int_0^\infty P_s(u,\mathrm{d}y)P_t(x,\mathrm{d}u)\\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f(y)P_s(u,\mathrm{d}y)P_t(x,\mathrm{d}u)\\
&= \int_0^\infty (T_sf)(u)P_s(x,\mathrm{d}u)\\
&= T_t(T_sf(x))
\end{aligned}
$$

demostrando que $\{T_t\}$ es un semigrupo.

Lema 3.3.1. *Una C.B. función satisface*

$$
P_t(x,\{0\})<1 \qquad \textit{para toda} \qquad t,x>0 \qquad y \qquad P_t(0,\{0\})=1
$$

Demostración. Sabemos que $P_t(x,\{0\})$ es una medida de probabilidad en $\mathcal{B}\big([0,\infty)\big)$, puede suceder que $P_t(x,\{0\})>0$ ó que $P_t(x,\{0\})=0$.

En cualquier caso se tiene

$$
e^{-x\psi_t(\lambda)} = P_t(x,\{0\}) + \int_{0^+}^\infty e^{-\lambda y}P_t(x,\mathrm{d}y)
$$

Tomamos el límite cuando λ tiende a infinito en ambos lados, y tenemos que

$$
\lim_{\lambda\to\infty} e^{-x\psi_t(\lambda)} = P_t(x,\{0\}) + \lim_{\lambda\to\infty}\int_{0^+}^\infty e^{-\lambda y}P_t(x,\mathrm{d}y)
$$

Es claro que si $y>0$, tenemos que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda y}=0$. De esta manera podemos aplicar el Teorema de Convergencia Dominada, con lo cual vamos a obtener que para toda $x,\lambda,t>0$ se cumple

$$
\exp\Big\{-x\lim_{\lambda\to\infty}\psi_t(\lambda)\Big\} = P_t(x,\{0\}) \tag{3.3}
$$

Por la hipótesis (v) sabemos que existe $x_0, t_0 > 0$ tal que $P_{t_0}(x_0, \{0\}) < 1$, de donde vemos que

$$\begin{aligned} &\exp\left\{ -x_0 \lim_{\lambda\to\infty} \psi_{t_0}(\lambda)\right\} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -x_0 \lim_{\lambda\to\infty} \psi_{t_0}(\lambda) < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lim_{\lambda\to\infty} \psi_{t_0}(\lambda) > 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que $P_{t_0}(x, \{0\}) < 1$ para cualquier $x > 0$.

Ahora sea $r > 0$ de tal manera que $r > t_0$ y $s = r - t_0$, entonces

$$P_r(x, \{0\}) = \int_0^\infty P_{t_0}(u, \{0\}) P_s(x, \mathrm{d}u)$$

como sabemos que $P_{t_0}(u, \{0\}) < 1$ para cualquier $u > 0$, concluimos que $P_r(x, \{0\}) < 1$ para toda $r > t_0$.

Si $0 < r < t_0$ podemos afirmar que existe n tal que $(t_0/n) < r$; basta ver que $P_{\frac{t_0}{n}}(x, \{0\}) < 1$ para una $x > 0$, ya que por consecuencia tendremos que vale para toda $x > 0$ y por un razonamiento análogo al anterior obtendremos que $P_r(x, \{0\}) < 1$.

Por definición tenemos que

$$P_{t_0}(x, \{0\}) = \int_0^\infty P_{\frac{t_0}{n}}(u, \{0\}) P_{\frac{(n-1)t_0}{n}}(x, \mathrm{d}u) < 1$$

Supongamos que $P_{\frac{t_0}{n}}(u, \{0\}) = 1$ para toda $u > 0$, en consecuencia tendriamos que $P_{t_0}(x, \{0\}) = 1$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $P_{\frac{t_0}{n}}(x, \{0\}) < 1$ para una $x > 0$.

Es así como hemos probado que $P_t(x, \{0\}) < 1$ para toda $t, x > 0$. Para mostrar que $P_t(0, \{0\}) = 1$ basta sustituir $x = 0$ en la relación (3.3).

■

Sea $C_0 = \left\{ f : [0, \infty) \to \mathbb{R} \,\middle|\, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \right\}$

Teorema 3.3.1. *Si* $\{P_t(x, E)\}_{t\geq 0}$ *es una C.B. función , el operador*

$$T_t f(x) = \int_0^\infty f(y) P_t(x, \mathrm{d}y)$$

define un semigrupo de contracción en el espacio C_0*, es decir, si* $f \in C_0$ *entonces* $T_t f \in C_0$*.*

Demostración. Primero vamos a ver que $T_t f$ define un semigrupo de contracción, o sea que tiene que cumplir con

$$||T_t f|| \leq ||f||.$$

Nosotros sabemos que

$$\begin{aligned} |T_t f(x)| &= \left| \int_0^\infty f(y) P_t(x, \mathrm{d}y) \right| \\ &\leq \int_0^\infty \big|f(y)\big| P_t(x, \mathrm{d}y) \\ &\leq \int_0^\infty \big|\big|f\big|\big| P_t(x, \mathrm{d}y) \\ &\leq ||f||. \end{aligned}$$

Ahora si al lado izquierdo de la ecuación le aplicamos el supremo sobre las $x \in [0, \infty)$, tenemos

$$||T_t f|| \leq ||f||$$

esto afirma que es un semigrupo de contracción.

Ahora solamente es necesario mostrar que T_t "vive.$^{\text{en}}$ el espacio C_0. Si $f(x)$ es de la forma $f(x) = e^{-\lambda x}$, $T_t f(x)$ es una función continua en x, ya que el lado derecho de (3.1) es continua en x.

Por el teorema de continuidad para la transformada de Laplace-Stielges, es claro que $T_t f(x)$ es continua en x para toda $f \in C_0$.

Lo único que nos hace falta ver es que

$$\lim_{x \to \infty} T_t f(x) = 0.$$

Por el Lema 3.3.1 tenemos que $\psi_t(\lambda) > 0$ para cada $\lambda > 0$, entonces cuando x tiende a infinito la transformada de Laplace de $P_t(x, \cdot)$ tiende a cero para $\lambda > 0$. Esto implica que la medida $P_t(x, \cdot)$ tiene su masa en infinito, en consecuencia tenemos que $T_t f(x)$ tienda a cero.

∎

Teorema 3.3.2. *Una C.B. función es estocásticamente continua.*

Demostración. Vamos a entender por continuidad estocástica[3] que para cada x, la medida $P_t(x,\cdot)$ converge débilmente a una unidad de masa en x cuando t tiende a 0^+. Vamos a empezar con la observación de que, por la propiedad (ii), la función

$$g(t) = \int_0^\infty \mu(\mathrm{d}x) \int_0^\infty f(y) P_t(x, \mathrm{d}y)$$

es medible en $t > 0$ para cualquier medida de Borel finita μ en $[0, \infty)$ y cualquier $f \in C_0$. Esto es equivalente a la afirmación de que el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es medible débilmente[4]. Un resultado conocido es el de que la medibilidad débil implica que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es en efecto fuertemente continua[5] para $t > 0$.

Fijandonos en el caso $f(x) = e^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$, la continuidad fuerte implica que la función $\psi_t(\lambda)$ es continua en $t > 0$ para cada λ fijo. Usando la relación (3.2) vemos que esto se puede escribir como

$$\lim_{h\to 0^+} \psi_h(\psi_t(\lambda)) = \psi_t(\lambda)$$

para cada $t > 0$, $\lambda > 0$. En otra palabras

$$\lim_{h\to 0^+} \psi_h(u) = u$$

para cada número u el cual puede ser representado como $\psi_t(\lambda)$ para alguna t y para alguna λ. Pero por la ecuación (3.1) y por el Lema 3.3.1 el conjunto formado por los valores de u contiene algún intervalo $[0, a]$, $a > 0$. De esta manera para cada x y cada $\lambda \in [0, a]$, la transformada de Laplace de $P_h(x, \cdot)$ converge a $e^{-x\lambda}$ cuando h tiende a 0^+, entonces aplicando el teorema de continuidad tenemos la conclusión a la cual se quería llegar.

■

Mostrando que una C.B. función es estocásticamente continua y que mapea el espacio de la funciones continua en $[0, \infty)$ y que se van a cero en infinito, en el mismo, entonces afirmamos que es un proceso de Markov fuerte.

[3] Ver apéndice A

[4] Ver apéndice A

[5] La definición de continuidad fuerte y el teorema se encuentran en el apéndice A

3.4. Los Momentos del C.B. Proceso

Los momentos se van a obtener a través de las ecuaciones (3.1) y (3.2), si es que existen.

Proposición 3.4.1. *Si el primer y segundo momento existen entonces*

$$\mathbb{E}_x[Z(t)] = \mathbb{E}[Z(t)|Z(0) = x] = xe^{\alpha t}$$

y

$$Var_x[Z(t)] = Var[Z(t)|Z(0) = x] = \begin{cases} \beta x t & si\ \alpha = 0 \\ \frac{\beta}{\alpha} x(e^{2\alpha t} - e^{\alpha t}) & si\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Demostración. Lo primero que vamos a observar es que $\psi_t(0) = 0$, que es una consecuencia directa de la ecuación (3.1).

Si derivamos a la ecuación (3.1) con respecto a λ, lo cual es permisible ya que el nuevo integrando es continuo y acotado, tenemos

$$\int_0^\infty y e^{-\lambda y} P_t(x, \mathrm{d}y) = x\psi_t'(\lambda)e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

donde $\psi_t'(\lambda)$ significa la derivada con respecto a λ y si evaluamos cuando $\lambda = 0$ vemos

$$\int_0^\infty yP_t(x, \mathrm{d}y) = x \lim_{\lambda \downarrow 0} \psi_t'(\lambda) = x\psi_t'(0^+).$$

Ahora si derivamos a la ecuación (3.2) con respecto a λ, tenemos

$$\psi_{t+s}'(\lambda) = \psi_t'(\psi_s(\lambda))\psi_s'(\lambda)$$

y si $\lambda = 0$, entonces

$$\psi_{t+s}'(0^+) = \psi_t'(0^+)\psi_s'(0^+)$$

de esta manera si $\psi_t'(0^+)$ es finito, tiene que ser de la forma $e^{\alpha t}$ donde α es una constante. Como resultado tenemos

$$\int_0^\infty yP_t(x, \mathrm{d}y) = xe^{\alpha t} \tag{3.4}$$

y por tanto

$$\mathbb{E}_x[Z(t)] = xe^{\alpha t}.$$

El segundo momento se puede obtener de una manera similar, si es que este existe. Si a la ecuación (3.2) la derivamos dos veces con respecto a λ tenemos

$$\psi''_{t+s}(\lambda) = \psi''_t(\psi_s(\lambda))\big[\psi'_s(\lambda)\big]^2 + \psi'_t(\psi_s(\lambda))\psi''_s(\lambda)$$

y si $\lambda = 0$, entonces

$$\psi''_{t+s}(0^+) = \psi''_t(0^+)e^{2\alpha s} + \psi''_s(0^+)e^{\alpha t} \tag{3.5}$$

Si $\alpha = 0$ la ecuación (3.5) tiene una solución de la forma $\psi''_t(0^+) = \beta t$, por ser lineal en t, donde β es una constante; ya que dicha ecuación se reduce a

$$\psi''_{t+s}(0^+) = \psi''_t(0^+) + \psi''_s(0^+)$$

Si $\alpha \neq 0$ observaremos que si intercambiamos a s y a t en la ecuación (3.5) tenemos

$$\psi''_s(0^+)e^{2\alpha t} + \psi''_t(0^+)e^{\alpha s} = \psi''_t(0^+)e^{2\alpha s} + \psi''_s(0^+)e^{\alpha t}$$

y si agrupamos, vemos que

$$\psi''_t(0^+)(e^{\alpha s} - e^{2\alpha s}) = \psi''_s(0^+)(e^{\alpha t} - e^{2\alpha t}).$$

Si ahora tomamos a $s = 1$, entonces

$$\psi''_t(0^+) = -\frac{\psi''_1(0^+)}{e^{\alpha} - e^{2\alpha}}\big[e^{2\alpha t} - e^{\alpha t}\big]$$

y si $\beta = \frac{\alpha\psi_1(0^+)}{e^{\alpha}-e^{2\alpha}}$ esta última ecuación se nos reduce a

$$\psi''_t(0^+) = -\frac{\beta}{\alpha}\big[e^{2\alpha t} - e^{\alpha t}\big].$$

Derivando a la ecuación (3.1) dos veces con respecto a λ, lo cual es permisible ya que el nuevo integrando es continuo y acotado; tenemos

$$\int_0^\infty y^2 e^{-\lambda y} P_t(x, \mathrm{d}y) = \big[x\psi'_t(\lambda)\big]^2 e^{-x\psi'_t(\lambda)} - x\psi''_t(\lambda)e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

evaluando en $\lambda = 0$, vemos que

$$\int_0^\infty y^2 P_t(x, \mathrm{d}y) = \big[x\psi'_t(0^+)\big]^2 - x\psi''_t(0^+)$$

De esta manera obtenemos la siguiente relación

$$\int_0^\infty y^2 P_t(x, \mathrm{d}y) = \begin{cases} x^2 + \beta x t & \text{si } \alpha = 0 \\ x^2 e^{2\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} x (e^{2\alpha t} - e^{\alpha t}) & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Y como la $Var_x[Z(t)] = \mathbb{E}_x\big[Z(t)^2\big] - \big(\mathbb{E}_x[Z(t)]\big)^2$, entonces

$$Var_x[Z(t)] = \begin{cases} \beta x t & \text{si } \alpha = 0 \\ \frac{\beta}{\alpha} x (e^{2\alpha t} - e^{\alpha t}) & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

De esta manera se ha demostrado la proposición. ∎

3.5. El C.B. Proceso como Proceso de Difusión.

Para ver que este C.B. proceso es un proceso de difusión, primero tenemos que ver que se cumple el siguiente Lema.

Lema 3.5.1. *Si se satisfacen las ecuaciones (3.4) y (3.6), entonces las siguientes relaciones se cumplen*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty (y - x) P_t(x, \mathrm{d}y) = \alpha x \tag{3.7}$$

y

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^\infty (y - x)^2 P_t(x, \mathrm{d}y) = \beta x \tag{3.8}$$

Demostración. Para la ecuación (3.7) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^\infty (y - x) P_t(x, \mathrm{d}y) &= \frac{1}{t} \int_0^\infty y P_t(x, \mathrm{d}y) - \frac{x}{t} \\ &= \frac{x e^{\alpha t} - x}{t} \\ &= x \frac{e^{\alpha t} - 1}{t} \end{aligned}$$

al aplicar el límite cuando t tiende a cero, claramente vemos que la relación se cumple, ya que

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha t}-1}{t}=\alpha$$

Esto prueba la relación (3.7).

Para la ecuación (3.8) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^\infty (y-x)^2 P_t(x,\mathrm{d}y) &= \frac{1}{t}\int_0^\infty (y^2-2xy+x^2)P_t(x,\mathrm{d}y)\\ &= \frac{1}{t}\int_0^\infty y^2 P_t(x,\mathrm{d}y)-\frac{2x}{t}\int_0^\infty yP_t(x,\mathrm{d}y)+\frac{x^2}{t}\\ &= \frac{1}{t}\int_0^\infty y^2 P_t(x,\mathrm{d}y)-\frac{2x^2e^{\alpha t}-x^2}{t}\end{aligned}$$

Si $\alpha=0$

$$\frac{1}{t}\int_0^\infty (y-x)^2 P_t(x,\mathrm{d}y)=\frac{x^2+\beta xt-2x^2+x^2}{t}=x\frac{\beta t}{t}=x\beta$$

Si $\alpha\neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^\infty (y-x)^2 P_t(x,\mathrm{d}y) &= \frac{x^2e^{2\alpha t}+\frac{\beta}{\alpha}x(e^{2\alpha t}-e^{\alpha t})-2x^2e^{\alpha t}+x^2}{t}\\ &= x^2\frac{(e^{\alpha t}-1)^2}{t}+\frac{x\beta}{\alpha}\frac{e^{\alpha t}(e^{\alpha t}-1)}{t}\end{aligned}$$

al aplicar el límite cuando t tiende a cero, claramente vemos que la relación se cumple, ya que

$$\lim_{t\to 0}\frac{(e^{\alpha t}-1)^2}{t}=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{e^{\alpha t}(e^{\alpha t}-1)}{t}=\alpha$$

Esto prueba la relación (3.8). ■

Este resultado nos hace pensar que si $Z(t)$ es un Proceso de Difusión entonces αx y βx van a ser los coeficientes de difusión correspondientes, y que la ecuación *backward* de Kolmogorov que satisface $Z(t)$ es

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t(x,\lambda)=\beta x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_t(x,\lambda)+\alpha x\frac{\partial}{\partial x}\Psi_t(x,\lambda). \tag{3.9}$$

Entonces si la C.B. función $\{P_t(x,E)\}_{t\geq 0}$ es la probabilidad de transición de un proceso de difusión, va a existir uno con la ecuación *backward* de Kolmogorov ya descrita. Este resultado se puede encontrar en los artículos de Lamperti.

De esta manera el exponente de Laplace $\psi_t(\lambda)$ queda determinado por

$$\psi_t(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1+\dfrac{\beta t\lambda}{2}} & \text{si } \alpha = 0 \\ \dfrac{\lambda e^{\alpha t}}{1-\dfrac{\beta\lambda}{2\alpha}(1-e^{\alpha t})} & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Veamoslo:

Sea $\Psi_t(x,\lambda) = e^{-x\psi_t(\lambda)}$, la cual satisface la relación (3.9). Donde

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_t(x,\lambda) = -\psi_t(\lambda)e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_t(x,\lambda) = \big(\psi_t(\lambda)\big)^2 e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t(x,\lambda) = -x\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(\lambda)e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

De esta manera, la relación (3.9) nos queda

$$-x\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(\lambda)e^{-x\psi_t(\lambda)} = \frac{\beta x}{2}\big(\psi_t(\lambda)\big)^2 e^{-x\psi_t(\lambda)} - \alpha x\psi_t(\lambda)e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

si $\alpha \neq 0$.

Si multiplicamos por $e^{-x\psi_t(\lambda)}$y dividimos por x en ambos lados de la igualdad vemos que dicha ecuación nos queda

$$-\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(\lambda) = \frac{\beta}{2}\big(\psi_t(\lambda)\big)^2 - \alpha\psi_t(\lambda)$$

y si fijamos a λ en la ecuación diferencial parcial vamos a tener una ecuación diferencial ordinaria, la cual nos queda

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t(\lambda) = \frac{\beta}{2}\big(\psi_t(\lambda)\big)^2 - \alpha\psi_t(\lambda).$$

Para resolver esta ecuación diferencial primero vamos a pasar a $\alpha\psi_t(\lambda)$ al lado izquierdo de la ecuación y después vamos a dividir por $\big(\psi_t(\lambda)\big)^2$ toda la igualdad. Luego a toda la igualdad la vamos a multiplicar por una función $\mu(t)$ donde $\mu(0)=1$, de esta manera dicha ecuación nos queda

$$-\left[\frac{\mu(t)}{\big(\psi_t(\lambda)\big)^2}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t(\lambda)+\alpha\frac{\mu(t)}{\psi_t(\lambda)}=\frac{\beta\mu(t)}{2}.$$

Claramente se ve que esta última ecuación es lo mismo que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu(t)}{\psi_t(\lambda)}\right)=\frac{\beta\mu(t)}{2} \tag{3.10}$$

donde

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mu(t)=\alpha\mu(t)$$

entonces

$$\frac{\mathrm{d}\mu(t)}{\mu(t)}=\alpha\mathrm{d}t \quad\Leftrightarrow\quad \ln\big|\mu(t)\big|=\alpha t \quad\Leftrightarrow\quad \mu(t)=e^{\alpha t}$$

de esta manera la ecuación (3.10) nos queda

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{e^{\alpha t}}{\psi_t(\lambda)}\right)=\frac{\beta e^{\alpha t}}{2}$$

entonces

$$\frac{e^{\alpha t}}{\psi_t(\lambda)}-\frac{1}{\lambda}=\frac{\beta}{2}\int_0^t e^{\alpha y}\mathrm{d}y=\frac{\beta}{2\alpha}\big(e^{\alpha t}-1\big)$$

es así que

$$\frac{e^{\alpha t}}{\psi_t(\lambda)}=\frac{\beta}{2\alpha}\big(e^{\alpha t}-1\big)+\frac{1}{\lambda}$$

de aquí claramente se ve que

$$\psi_t(\lambda)=\frac{\lambda e^{\alpha t}}{1-\dfrac{\beta\lambda}{2\alpha}\big(1-e^{\alpha t}\big)}.$$

Ahora si $\alpha = 0$ tenemos que la relación (3.9) se reduce a

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi_t(\lambda) = \frac{\beta}{2}\big(\psi_t(\lambda)\big)^2$$

y si dividimos por $\big(\psi_t(\lambda)\big)^2$ en ambos lados de esta última ecuación, tenemos

$$-\frac{\mathrm{d}\psi_t(\lambda)}{\big(\psi_t(\lambda)\big)^2} = \frac{\beta}{2}\mathrm{d}t$$

e integrando en ambos lados tenemos

$$-\int_0^{\psi_t(\lambda)} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{\beta}{2}\int_0^t \mathrm{d}y$$

$$\frac{1}{\psi_t(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\beta}{2}t$$

de aquí claramente se ve que

$$\psi_t(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \dfrac{\beta\lambda}{2}t}.$$

De esta manera el exponente de Laplace queda determinado.
Ahora vamos a ver que se cumple la relación (3.2).
Sea

$$\psi_{t+s}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1 + \dfrac{\beta(t+s)\lambda}{2}} & \text{si } \alpha = 0 \\ \dfrac{\lambda e^{\alpha(t+s)}}{1 - \dfrac{\beta\lambda}{2\alpha}(1 - e^{\alpha(t+s)})} & \text{si } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Por otro lado tenemos que si $\alpha = 0$ entonces

$$\psi_t(\psi_s(\lambda)) = \frac{\psi_s(t)}{1 + \dfrac{\beta t\psi_s(\lambda)}{2}} = \frac{\dfrac{\lambda}{1 + \frac{\beta s\lambda}{2}}}{1 + \dfrac{\beta t}{2}\left(\dfrac{\lambda}{1 + \frac{\beta s\lambda}{2}}\right)}$$

$$\psi_t(\psi_s(\lambda)) = \frac{\psi_s(t)}{1 + \dfrac{\beta t \psi_s(\lambda)}{2}} = \frac{\dfrac{\lambda}{1+\frac{\beta s\lambda}{2}}}{\dfrac{1+\frac{\beta s\lambda+\beta t\lambda}{2}}{1+\frac{\beta s\lambda}{2}}} = \frac{\lambda}{1+\dfrac{\beta(t+s)\lambda}{2}}$$

y si $\alpha \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\psi_t(\psi_s(\lambda)) &= \frac{\psi_s(\lambda)e^{\alpha t}}{1 - \dfrac{\beta\psi_s(\lambda)}{2\alpha}(1-e^{\alpha t})} \\
&= \frac{\dfrac{\lambda e^{\alpha s}}{1-\frac{\beta\lambda}{2\alpha}(1-e^{\alpha s})}e^{\alpha t}}{1 - \dfrac{\frac{\lambda e^{\alpha s}}{1-\frac{\beta\lambda}{2\alpha}(1-e^{\alpha s})}}{2\alpha}\beta(1-e^{\alpha t})} \\
&= \frac{\lambda e^{\alpha(t+s)}\dfrac{1}{1-\frac{\beta\lambda}{2\alpha}(1-e^{\alpha s})}}{1-\dfrac{\beta\lambda}{2\alpha}\left(\dfrac{e^{\alpha s}}{1-\frac{\beta\lambda}{2\alpha}(1-e^{\alpha s})}\right)(1-e^{\alpha t})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_t(\psi_s(\lambda)) &= \frac{\lambda e^{\alpha(s+t)}}{1-\dfrac{\beta\lambda}{2\alpha}(1-e^{\alpha s}) - \dfrac{\beta\lambda}{2\alpha}e^{\alpha s}(1-e^{\alpha t})} \\
&= \frac{\lambda e^{\alpha(s+t)}}{1-\dfrac{\beta\lambda}{2\alpha}(1-e^{\alpha(s+t)})}
\end{aligned}$$

de esta manera hemos visto que dicha relación si se cumple.

3.6. Probabilidad de Extinción

Primero vamos a notar que la transformada de Laplace de un C.B. proceso es equivalente a

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda Z(t)}\right] = e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

entonces tenemos que

$$\mathbb{P}_x(Z(t)=0)+\int_{0^+}^{\infty} e^{-\lambda y}P_t(x,\mathrm{d}y)=e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

donde $\mathbb{P}_x(Z(t)=0)=P_t(x,\{0\})$, de esta manera

$$\mathbb{P}_x(Z(t)=0)=\exp\Big\{-x\lim_{\lambda\to\infty}\psi_t(\lambda)\Big\}$$

Pero como $Z(t)$ es un proceso de difusión que satisface la ecuación *backward* de Kolmogorov tenemos que

$$P_t(x,\{0\})=\begin{cases}\exp\Big\{-\dfrac{2x}{\beta t}\Big\} & \text{si } \alpha=0\\ \exp\Big\{\dfrac{2\alpha x e^{\alpha t}}{\beta(1-e^{\alpha t})}\Big\} & \text{si } \alpha\neq 0\end{cases}$$

Ya que si $\alpha=0$, entonces

$$\lim_{\lambda\to\infty}\psi_t(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{1+\dfrac{\beta t\lambda}{2}}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{\beta t}{2}}=\frac{2}{\beta t}$$

y si $\alpha\neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\psi_t(\lambda)&=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda e^{\alpha t}}{1-\dfrac{\beta\lambda}{2\alpha}(1-e^{\alpha t})}\\&=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{e^{\alpha t}}{\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{\beta}{2\alpha}(1-e^{\alpha t})}\\&=-\frac{2\alpha e^{\alpha t}}{\beta(1-e^{\alpha t})}\end{aligned}$$

Definición 3.6.1. *La probabilidad de extinción de un C.B. proceso esta dada por*

$$\eta(x)=\mathbb{P}_x(Z(t)=0 \text{ para alguna } t).$$

Entonces $\eta(x)$ no es más que

$$\eta(x) = \lim_{t\to\infty} P_t(x, \{0\})$$

de esta manera si $\alpha = 0$, tenemos

$$\eta(x) = \lim_{t\to\infty} P_t(x, \{0\}) = \exp\left\{ \lim_{t\to\infty} -\frac{2x}{\beta t}\right\} = 1$$

Para $\alpha < 0$, tomamos $\alpha = -c$, donde $c > 0$ es una constante

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \exp\left\{ \lim_{t\to\infty} \frac{-2xce^{-ct}}{\beta(1-e^{-ct})}\right\} = \exp\left\{ -\lim_{t\to\infty} \frac{2xc}{\beta(\frac{1}{e^{-ct}}-1)}\right\} \\ &= \exp\left\{ -\lim_{t\to\infty} \frac{2xc}{\beta(e^{ct}-1)}\right\} = 1\end{aligned}$$

y si $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}\eta(x) = \lim_{t\to\infty} P_t(x, \{0\}) &= \exp\left\{ \lim_{t\to\infty} \frac{2\alpha x e^{\alpha t}}{\beta(1-e^{\alpha t})}\right\} \\ &= \exp\left\{ \lim_{t\to\infty} \frac{2\alpha x}{\beta(e^{-\alpha t}-1)}\right\} = \exp\left\{ -\frac{2\alpha x}{\beta}\right\}\end{aligned}$$

Entonces

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 0 \\ \exp\left\{ -\frac{2\alpha x}{\beta}\right\} & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

3.7. El C.B. Proceso como Proceso Límite

3.7.1. Distribuciones Límite

Primero vamos a definir a $Z = \{Z_n\}_{n\geq 0}$ un Proceso de Ramificacón de Galton-Watson con distribución $\{\rho_i\}_{i\geq 0}$. Nuestro propósito es el de realizar un análisis detallado de las distribuciones límite para Z, donde el estado inicial Z_0 se va a infinito conforme el número de generaciones va aumentando. Dichas distribuciones se van a encontrar para ciertas sucesiones $\{a_n\}_{n\geq 0}$ y $\{b_n > 0\}_{n\geq 0}$ de números reales y una sucesión de enteros positivos $\{c_n\}_{n\geq 0}$, esta última se va a infinito conforme n crece. De esta manera nuestro estudio va a estar centrado en la existencia de

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{Z_n - a_n}{b_n} \le x \middle| Z_0 = c_n \right\} = G(x) \tag{3.11}$$

en el sentido usual de convergencia débil de funciones de distribución.

Analizar las clases de distribuciones $G(x)$ y las condiciones sobre $\{\rho_i\}_{i\ge 0}$ y $\{c_n\}_{n\ge 0}$, bajo las cuales obtendremos una distribución en particular, es un problema complicado y lejos de ser resuelto por completo.

Si $\{\rho_i\}_{i\ge 0}$ tiene varianza finita este problema se resuelve por completo, mientras que en el caso de varianza infinita el problema se complica y sólo se resuelve en algunos casos.

Varianza Finita

Sea $\mu < \infty$ la media del número de descendientes por individuo y sea $f(s)$ la función generadora de $\{\rho_i\}_{i\ge 0}$.

Primero vamos a estudiar el caso en que $\mu > 1$, para ello necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.7.1. *Sea $\{F_n(x)\}_{n\ge 0}$ una sucesión de funciones de distribución, las cuales convergen a una función de distribución no degenerada $F(x)$ y además supongamos que el segundo momento de F_n converge a F, suponiendo que son finitos. Sea $\{c_n\}_{n\ge 0}$ una sucesión de enteros positivos que se van a infinito cuando n tiende a infinito y, $\{a_n\}_{n\ge 0}$ y $\{b_n > 0\}_{n\ge 0}$ dos suceciones de números reales, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} F_n^{(*c_n)}(b_n x + a_n c_n) = \Phi(x) \tag{3.12}$$

para toda x, donde $\Phi(x)$ es la distribución de una normal estandar.

La notación $G^{(*n)}(x)$, donde G es una función de distribución, significa la n-ésima convolución de G consigo misma.

Demostración. Escojamos a a_n como la media de la distribución F_n y sea $b_n = c_n Var(F_n)$. Lo primero que veremos es que $F_n^{(*c_n)}(b_n x + a_n c_n)$ es una distribución con media cero y varianza unitaria.

Para ver que dicha distribución tiene media cero, primero vamos a realizar el siguiente cálculo.

Sea $Y = b_nX + a_nc_n$ y $Z = \sum_{i=1}^{c_n} Y$, si definimos a la función característica de Z por $\varphi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{itZ}]$ es claro que $\varphi_Z(t) = \big(\varphi_Y(t)\big)^{c_n}$ y derivando obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_Z(t)}{\mathrm{d}t} = c_n\big(\varphi_Y(t)\big)^{(c_n-1)}\frac{\mathrm{d}\varphi_Y(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Si $t = 0$ vamos a tener que $\mathbb{E}[Z] = c_na_n$ ya que $\mathbb{E}[Y] = a_n$.

De esta manera

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n[X] &= \int_{\mathbb{R}} x\mathrm{d}F_n^{(*c_n)}(b_nx + a_nc_n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y - a_ncn}{bn}\mathrm{d}F_n^{(*c_n)}(y)\\ &= \frac{1}{b_n}\int_{\mathbb{R}} y\mathrm{d}F_n^{(*c_n)}(y) - \frac{a_nc_n}{b_n} = 0\end{aligned}$$

Para que dicha distribución tiene varianza unitaria, primero tenemos que calcular $\mathbb{E}(Z^2)$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_Z(t)}{\mathrm{d}t^2} = c_n(c_n-1)\big(\varphi_Y(t)\big)^{(c_n-2)}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi_Y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + c_n\big(\varphi_Y(t)\big)^{(c_n-1)}\frac{\mathrm{d}^2\varphi_Y(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

y si $t = 0$, tenemos que

$$\mathbb{E}[Z^2] = c_n(c_n-1)(a_n)^2 + c_n\left(\frac{b_n^2}{c_n} + a_n^2\right) = c_n^2a_n^2 + b_n^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}Var_n[X] &= \int_{\mathbb{R}} x^2\mathrm{d}F_n^{(*c_n)}(b_nx + a_ncn) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y^2 - 2ya_nc_n + a_n^2c_n^2}{b_n^2}\mathrm{d}F_n^{(*c_n)}(y)\\ &= \frac{1}{b_n^2}\int_{\mathbb{R}} y^2\mathrm{d}F_n^{(*c_n)}(y) - \frac{2a_nc_n}{b_n^2}\int_{\mathbb{R}} y\mathrm{d}F^{(*c_n)}(y) + \frac{a_n^2c2_n}{b_n^2}\\ &= \frac{c_n^2a_n^2 + b_n^2}{b_n^2} - \frac{2a_n^2c_n^2}{b_n^2} + \frac{a_n^2c_n^2}{b_n^2} = 1.\end{aligned}$$

Para continuar con la demostración es necesario utilizar el Teorema del Límite Central para sucesiones dobles, cuya prueba omitiremos.

Teorema 3.7.1. *Sea $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de variables aleatorias independientes y sea $F_i(x)$ la distribución de ξ_i. De tal manera que la función de distribución de la suma normalizada, dada por*

$$\Theta_n = \frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i - \mathbb{E}[\xi_i])}{B_n^2} \qquad \textit{donde} \qquad B_n^2 = \sum_{i=1}^n Var(\xi_i)$$

converge a una distribución normal estandar: si se satisface la condición de Linderberg

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x|>\epsilon B_n} x^2 \mathrm{d}F_k(x+\mathbb{E}[\xi_i]) \longrightarrow 0 \quad \textit{cuando} \quad n\to\infty$$

para toda $\epsilon > 0$*.*

De este teorema vemos que

$$\lim_{n\to\infty} c_n \int_{|x|>\epsilon} x^2 \mathrm{d}F_n(b_n x + a_n) = 0$$

es una condición necesaria y suficiente para que se satisfaga (3.12). Pero

$$c_n \int_{|x|>\epsilon} x^2 \mathrm{d}F_n(b_n x + a_n) = \frac{c_n}{b_n^2}\int_{|y|>b_n\epsilon} y^2 \mathrm{d}F_n(y+a_n)$$

y $(c_n/b_n) = (Var(F_n))^{-1}$. Entonces es suficiente ver que $Var(F_n)$ esta acotada, lejos del cero y además

$$\frac{c_n}{b_n^2}\int_{|y|>b_n\epsilon} y^2 \mathrm{d}F_n(y+a_n) \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando} \qquad n\to\infty$$

para cada $\epsilon > 0$.

La primera de estas condiciones es inmediata, ya que si $Var(F_n) \to 0$ implicaría que el límite F sería una función de distribución degenerada. Por la convergencia del segundo momento vamos a tener que $a_n \to a$ (a la media de F); y además $b_n \to \infty$ cuando $c_n \to \infty$ y que la $Var(F_n)$ esta acotada.

Para n suficientemente grande tenemos

$$\begin{aligned}\int_{|y|>b_n\epsilon} y^2 \mathrm{d}F_n(y+a_n) &\leq \int_{\mathbb{R}} y^2 \mathrm{d}F_n(y+a_n) - \int_{-2M}^{2M} y^2 \mathrm{d}F_n(y+a_n)\\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (u-a_n)^2 \mathrm{d}F_n(u) - \int_{-M}^{M} (u-a_n)^2 \mathrm{d}F_n(u)\end{aligned}$$

donde M es cualquier constante mayor a a. Si $\pm M$ son puntos de continuidad de $F(x)$, podemos pasar al límite cuando n tiende a infinito y usar la hipótesis para obtener

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{|y|>b_n\epsilon} y^2 \mathrm{d}F_n(y+a_n) \leq Var(F) - \int_{-M}^{M} (u-a_n)^2 \mathrm{d}F_n(u)$$

la cual es arbitrariamente pequeña si M se escoge muy grande.

■

Teorema 3.7.2. *Supongamos que $\mu > 1$ y $Var[\rho_i] = \sigma^2 < \infty$. Sea $\{c_n\}_{n\geq 0}$ cualquier sucesión de enteros positivos que tienda a infinito (cuando $n \to \infty$). Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Z_n - \mu^n c_n}{b_n} \leq x \middle| Z_0 = c_n\right) = \Phi(x) \tag{3.13}$$

donde $b_n \sim \mu^n \sqrt{c_n}\sigma(\mu^2 - \mu)^{-\frac{1}{2}}$.

Demostración. Sea

$$F_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{\mu^n} \leq x \middle| Z_0 = 1\right)$$

De un resultado muy conocido sobre convergencia de martingalas tenemos que para $Z_0 = 1$, la martingala $\{Z_n/\mu^n\}_{n\geq 0}$ converge en media cuadrática a una variable aleatoria Z, en consecuencia tenemos que $F_n(x)$ satisface las hipótesis del lema que acabamos de demostrar. Además por la definición de Proceso de Ramificación vemos que si $Z_0 = c_n$ la función de distribución de Z_n (con $Z_0 = 1$) tiene el efecto de convolucionarse con ella misma c_n veces.

Por lo tanto (3.12) toma la forma (3.13) en este caso.

■

En esta caso existe una distribución límite cuando c_n converge a c, y es exactamente la c-ésima potencia de la distribución de Z. Claro, solamente cuando $c_n \to \infty$ obtendremos una distribución límite infinitamente divisible.

Regresando al caso en el que $\mu < 1$ y $\sigma^2 < \infty$, vamos necesitar las siguiente afirmaciones

i) Sea c una constante positiva, tenemos que

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0 | Z_0 = 1) \sim c\mu^n$$

ii) Y que se satisface que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = 1, Z_n \neq 0) = f_j \qquad \text{donde} \qquad \sum_{j=1}^{n} f_j = 1$$

Teorema 3.7.3. *Si $c_n \sim d\mu^{-n}$, $d > 0$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = c_n) = g_j \qquad para \qquad j \geq 0, \tag{3.14}$$

donde $\{g_j\}_{j\geq 0}$ es la distribución con función generadora

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j = e^{cd(f(x)-1)} \qquad donde \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j x^j. \tag{3.15}$$

Si en cambio tenemos que $c_n\mu^n$ se va a infinito, la ecuación (3.13) se satisface con $b_n \sim [c_n\mu^n\sigma^2/(\mu-\mu^2)]^{\frac{1}{2}}$, y como resultado obtenemos una distribución límite normal. Estas son la únicas posibilidades para límites no degenerados.

El caso en que $\mu = 1$ es muy parecido al anterior. En este caso utilizamos los siguientes resultados

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0 | Z_0 = 1) \sim \frac{2}{\sigma^2 n} \tag{3.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{n} \leq x \middle| Z_0 = 1, Z_n \neq 0\right) = 1 - e^{\frac{-2x}{\sigma^2}} \tag{3.17}$$

Dichos resultados se satisfacen bajo la hipótesis de que $\sum_{i=0}^{\infty} i^3\rho_i < \infty$.

Teorema 3.7.4. *Supongamos que $\mu = 1$ y que la $Var[\rho_i] < \infty$. Si $c_n \sim dn$, $d > 0$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{n} \leq x \middle| Z_0 = c_n\right) = G(x)$$

existe, donde

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \mathrm{d}G(x) = \exp\left\{ -\frac{2d\lambda}{\sigma^2(\lambda + 2/\sigma^2)} \right\}$$

Si en cambio $c_n/n \to \infty$, la ecuación (3.13) se satisface con $b_n \sim \sigma\sqrt{nc_n}$; no existen otras distribuciones límites excepto las distribuciones degeneradas.

Las demostraciones de estos últimos dos teoremas las podemos encontrar en el artículo de Lamperti [12].

Varianza Infinita

Aquí vamos a considerar los casos en que $\mu > 1$ y $\sigma = \infty$. Sería muy natural pensar en utilizar los teoremas límites generales para sumas de variables aleatorias independientes de una manera análoga al lema 3.7.1, pero no parece sencillo llevarlo a cabo. En cambio vamos a ver un método que nos va a permitir identificar distribuciones límite no-normales, pero antes vamos a necesitar las siguientes definiciones.

Definición 3.7.1. *Sea Y una variable aleatoria. Denotaremos por $\mathbb{P}_T$ su distribución y a su función caracteristica por φ_T. Se dice que es estable si para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existen constantes $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ y variables aleatorias independientes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, con la misma distribución de T tales que*

$$a_n T + b_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

o equivalentemente

$$\mathbb{P}_T\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) = \mathbb{P}_T(x) * \cdots * \mathbb{P}_T(x)$$

o bien

$$\big(\varphi(\lambda)\big)^n = \big(\varphi(a_n\lambda)\big)e^{i\lambda b_n}$$

Si T converge en distribución, cuando n se va a infinito, a una función de distribución $V(x)$, entonces decimos que $\mathbb{P}_T(x)$ atraida a $V(x)$. El total de funciones de distribución atraidas a $V(x)$ es llamado el dominio de atracción de la ley $V(x)$.

Definición 3.7.2. *Vamos a decir que $\mathbb{P}_T(x)$ pertenence al dominio de atracción parcial de la distribución $V(x)$, si existe una subsucesión $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tal que la función de distribución de las sumas de ξ_{n_k} converge a $V(x)$ para ciertas constantes que se escogen de manera conveniente a_n y $a_n > 0$*

Si $\mu > 1$ y $\sigma^2 = \infty$, el límite de Z_n/μ^n cuando n se va a infinito existe por el Teorema de Convergencia de la Martingala y la llamaremos Z. Sea $F(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$ es su función de distribución. El método para identificar distribuciones límites esta basado en este teorema

Teorema 3.7.5. *Si $G(x)$ es una función de distribución que contiene a $F(x)$ en su dominio de atracción parcial, entonces $G(x)$ es un posible límite; esto significa que existen sucesiones de constantes para las cuales se satisface la ecuación (3.11)*

La demostración a este teorema la podemos ver en [12].

Para aplicar este resultado, es necesario determinar las leyes a las cuales $F(x)$ es parcialmente atraida. Como $F(x)$ no la conocemos de manera explícita, esto parece ser muy difícil en general. De cualquier modo, existe una situación que se puede trabajar, y el resultado es de un gran interes, pero antes de mencionar el resultado vamos a definir que es un dominio de atracción normal.

Definición 3.7.3. *Decimos que la ley de $\mathbb{P}_T(x)$ pertenece al dominio de atracción normal de la ley $V(x)$, si para alguna $a > o$ y alguna b_n la siguiente relación se satisface:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{an^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i - b_n < x \right) = V(x)$$

donde α es esl exponente característico de la ley $V(x)$.

Teorema 3.7.6. *La distribución $F(x)$ esta en el dominio de atracción normal de una ley estable con indice $1 < \alpha < 2$ si y sólo si la distribución $\{\rho_i\}$ pertenece al mismo dominio de atracción.*

La demostración a este teorema la podemos encontrar en [12].

Corolario 3.7.1. *Si un Proceso de Ramificación de Galton-Watson tiene $\mu > 1$ y $\{\rho_i\}$ es normalmente atraida a una ley estable en particular, entonces existen constantes a_n, b_n, c_n para las cuales la ecuación (3.11) se satisface, donde G juega el papel de la ley estable.*

Demostración. La demostración a este corolario es una consecuencia directa de los teoremas que acabamos de mencionar.

■

3.7.2. Teoremas Límite

Vamos a considerar una sucesión de procesos $\{Z_t^{(r)}\}$ definida de la siguiente manera

$$Z_t^{(r)} = \frac{Z_{[rt]} - a_r}{b_r} \qquad \text{donde} \qquad Z_0 = c_r$$

donde para cada r, $\{Z_n\}$ es un proceso de ramificación de Galton-Watson con probabilidades $\{\rho_k\}$ y con función generadora $f(x)$, y $[\cdot]$ es la función máximo entero. Estos pueden depender de r pero no se indica para no complicar la notación.

Nuestra suposición básica es que existe un proceso estocástico $\{Z_t\}$, $t \geq 0$, el cual es el límite de $\{Z_t^{(r)}\}$ cuando r tiende a infinito en el sentido de que las distribuciones conjuntas finito-dimensionales de $\{Z_t^{(r)}\}$ converge a las de $\{Z_t\}$, o de otra manera, esto significa que para cada conjunto finito $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_h$

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(Z_{t_0}^{(r)} \leq y_0, \ldots, Z_{t_h}^{(r)} \leq y_h) = \mathbb{P}(Z_{t_0} \leq y_0, \ldots, Z_{t_h} \leq y_h) \tag{3.18}$$

en el sentido de convergencia débil de medidas.

Primero vamos a ver el caso en que $a_r = 0$ para toda r.

Teorema 3.7.7. *Supongamos que se satisface la relación (3.18) con $a_r = 0$, $c_r \to \infty$ y $\mathbb{P}(Z_t = 0) < 1$ para alguna $t > 0$. Entonces $\{Z_t\}$ es un C.B. proceso en el sentido de este capítulo.*

Demostración. De las hipótesis del teorema podemos considerar la existencia de la distribución límite unidimensional.

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(Z_{[rt]} \leq y b_r | Z_0 = c_r) = G_t(y) \qquad \text{para toda} \qquad t \geq 0 \tag{3.19}$$

Donde $G_t(y) = \mathbb{P}(Z_t \leq y)$, de tal manera que para alguna $t > 0$ no tiene su masa concentrada en el origen.

Primero vamos a demostrar que el límite, como en (3.19), tiene sentido cuando c_r es reemplazado por $[xc_r]$ donde x es un real positivo distinto de cero.

Por el hecho de que se satisface la relación (3.19), entonces afirmamos que se cumple la siguiente relación

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = c_r\right] = \varphi_t(\lambda) \tag{3.20}$$

debido a un resultado conocido de que si una sucesión de variables aleatorias reales $\{X_n\}$ que convergen débilmente a una variable aleatoria real X entonces para toda función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y acotada tenemos que $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ cuando n tiende a infinito. $\varphi_t(\lambda)$ es la transformada de Laplace-Stieltjes de G_t.

Como sabemos que $\{Z_n\}$ es un proceso de ramificación de Galton-Watson, tenemos que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = c_r\right] = \left[f_{[rt]}\left(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\right)\right]^{c_r}$$

Entonces

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = [xc_r]\right] = \left[f_{[rt]}\left(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\right)\right]^{[xc_r]}$$

además sabemos que $xc_r - 1 < [xc_r] \leq xc_r$, donde $xc_r > 3$, entonces

$$\left[f_{[rt]}\left(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\right)\right]^{xc_r} \leq \left[f_{[rt]}\left(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\right)\right]^{[xc_r]} < \left[f_{[rt]}\left(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\right)\right]^{xc_r}\left[f_{[rt]}\left(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\right)\right]^{-1}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{[rt]}\left(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\right) &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = 1\right] \\ &= \left(\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = c_r\right]\right)^{\frac{1}{c_r}} \end{aligned}$$

y

$$\lim_{r\to\infty}\left(\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = c_r\right]\right)^{\frac{1}{c_r}}$$

es exactamente

$$\exp\left\{\lim_{r\to\infty}\frac{1}{c_r}\ln\left(\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = c_r\right]\right)\right\} = 1$$

de esta manera aplicando el límite cuando r tiende a infinito en la desigualdad que tenemos, vemos que

$$\lim_{r\to\infty}\left[f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)\right]^{xc_r} \leq \lim_{r\to\infty}\left[f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)\right]^{[xc_r]} < \lim_{r\to\infty}\left[f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)\right]^{(xc_r-1)}$$

$$\big(\varphi_t(\lambda)\big)^x \leq \lim_{r\to\infty}\left[f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)\right]^{[xc_r]} < \big(\varphi_t(\lambda)\big)^x$$

es así como vemos que

$$\lim_{r\to\infty}\left[f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)\right]^{[xc_r]} = \big(\varphi_t(\lambda)\big)^x$$

para cada $x > 0$, la distribución es claramente infinitamente divisible. La convergencia se satisface cuando $x = 0$, además la convergencia es uniforme en x para cada λ fija.

En nuestro proximo paso vamos a considerar la relación existente entre b_r y c_r.
De (3.18) si $t = 0$, tenemos

$$\lim_{r\to\infty}\mathbb{P}(Z_0 < yb_r | Z_0 = c_r) = G_0(y)$$

entonces $Z_0^{(r)} = \frac{c_r}{b_r}$ tiene como función de distribución a

$$F_0^{(r)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \frac{c_r}{b_r} \\ 1 & \text{si } y \geq \frac{c_r}{b_r} \end{cases}$$

y

$$\lim_{r\to\infty} F_0^{(r)} = G_0(y)$$

donde

$$G_0(y) = \begin{cases} o & \text{si } y < c \\ 1 & \text{si } y \geq c \end{cases} \qquad \text{donde} \qquad c \in [0,\infty)$$

Supongamos que $\limsup_{r\to\infty}\frac{c_r}{b_r} > c$, entonces existe una subsucesión $\{\frac{c_{rk}}{b_{rk}}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\frac{c_{rk}}{b_{rk}} > c$.

Sea y tal que $c < y < \frac{c_{rk}}{b_{rk}}$ de esta manera afirmamos que $F_0^{(rk)}(y) = 0$, pero

$$\lim_{k\to\infty} F_0^{(rk)}(y) = G_0(y) = 1$$

esto es una contradicción.

Ahora supongamos que $\liminf_{r\to\infty} \frac{c_r}{b_r} < c$, entonces existe una subsucesión $\{\frac{c_{rk}}{b_{rk}}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\frac{c_{rk}}{b_{rk}} < c$.

Sea y tal que $\frac{c_{rk}}{b_{rk}} < y < c$ de esta manera afirmamos que $F_0^{(rk)}(y) = 1$, pero

$$\lim_{k\to\infty} F_0^{(rk)}(y) = G_0(y) = 0$$

esto es una contradicción.

Es así como afirmamos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_r}{b_r} = c \qquad \text{donde} \qquad c \in [0,\infty)$$

Ahora demostraremos que c es estrictamente positiva, al menos de que se contradiga la hipótesis de que $\mathbb{P}(Z_t = 0) < 1$ para alguna $t > 0$.

Tomamos una $t > 0$ tal que $G_t(0^+) < 1$; en consecuencia $\varphi_t(\lambda) < 1$ para toda $\lambda > 0$. Por (3.20) y por la propiedad de Markov de $\{Z_n\}$ nosotros podemos escribir

$$\varphi_{2t} = \lim_{r\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[2rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = c_r\right]$$

y

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = c_r\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[2rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_{[rt]} = yc_r\right]\middle| Z_0 = c_r\right]$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[2rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_{[rt]} = yc_r\right] \mathrm{d}\mathbb{P}\big(Z_{[rt]} \le c_r y \big| Z_0 = c_r\big)$$

$$= \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = yc_r\right] \mathrm{d}\mathbb{P}\big(Z_{[rt]} \le c_r y \big| Z_0 = c_r\big)$$

Entonces

$$\varphi_{2t}(\lambda) = \lim_{r\to\infty} \int_0^\infty \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = yc_r\right] \mathrm{d}\mathbb{P}\big(Z_{[rt]} \le c_r y \big| Z_0 = c_r\big) \tag{3.21}$$

Para continuar con la demostración es necesario demostrar el siguiente lema

Lema 3.7.2. *Si $Y_n, Y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ variables aleatorias y $\big|Y_n(\omega) - Y(\omega)\big| < \epsilon$ para toda $\omega \in [a,b]$ y $\epsilon > 0$ (i.e. $Y_n \xrightarrow{c.u.} Y$ en $[a,b]$). Y si $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ es una familia de medidas positivas acotada en $[a,b]$, $\mu_n([a,b]) \leq c$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y además existe*

$$L = \lim_{n\to\infty} \int_a^b Y \mathrm{d}\mu_n$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b Y_n \mathrm{d}\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b Y \mathrm{d}\mu_n$$

Demostración. Por demostrar que para toda $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$

$$\left| \int_a^b Y_n \mathrm{d}\mu_n - L \right| < \epsilon$$

Por hipótesis tenemos que para toda $\epsilon > 0$ existe una $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq M$

$$\left| \int_a^b Y \mathrm{d}\mu_n - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b Y_n \mathrm{d}\mu_n - L \right| &= \left| \int_a^b Y_n \mathrm{d}\mu_n - \int_a^b Y \mathrm{d}\mu_n + \int_a^b Y \mathrm{d}\mu_n - L \right| \\
&\leq \left| \int_a^b Y_n \mathrm{d}\mu_n - \int_a^b Y \mathrm{d}\mu_n \right| + \left| \int_a^b Y \mathrm{d}\mu_n - L \right| \\
&< \left| \int_a^b Y_n \mathrm{d}\mu_n - \int_a^b Y \mathrm{d}\mu_n \right| + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

pero sabemos que Y_n converge uniformemente a Y, entonces para toda $\epsilon' > 0$ existe una $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_0$

$$\big|Y_n - Y\big| < \epsilon'$$

donde $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2c}$, de esta manera para toda $n \geq (M \vee N_0)$ tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b Y_n \mathrm{d}\mu_n - L\right| &< \left|\int_a^b Y_n \mathrm{d}\mu_n - \int_a^b Y \mathrm{d}\mu_n\right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{\epsilon}{2c}\int_a^b \mathrm{d}\mu_n + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

Es así como el lema queda demostrado.

■

De la relación (3.21) y por este lema que acabamos de demostrar, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi_{2t}(\lambda) &= \lim_{r\to\infty} \int \big(\varphi_t\big)^y \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_{[rt]} \leq y c_r | Z_0 = c_r) \\ &= \lim_{r\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{\ln\big|\varphi_t(\lambda)\big| Z_{[rt]}}{c_r}\right\}\middle| Z_0 = c_r\right]\end{aligned}$$

En otras palabras, la transformada de Laplace de la variable aleatoria $\frac{Z_{[rt]}}{c_r}$, dado $Z_0 = c_r$, tiene límite para cada δ de la forma $\delta = -\ln\big|\varphi_t(\lambda)\big|$. Por que estos valores llenan al intervalo $[0, \epsilon]$ (aquí se utiliza la no degeneración de G_t), la distribución de $\frac{Z_{[rt]}}{c_r}$ tiene que ser convergente por el teorema de continuidad de la transformada de Laplace.

Ahora sabemos que la variable aleatoria $\frac{Z_{[rt]}}{c_r}$ converge débilmente a una variable aleatoria X_t y $\frac{Z_{[rt]}}{b_r}$ converge débilmente a una variable aleatoria Z_t, donde $\mathbb{P}(Z_t = 0) \neq 1$.

Supongamos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_r}{b_r} = 0$$

entonces para toda $\alpha > 0$ existe un r_0 tal que para toda $r \geq r_0$

$$0 \leq \frac{c_r}{b_r} < \alpha$$

Sea $M > 0$, $\epsilon > 0$ y x fija, tal que $x > M$, existe un R_0 tal que para toda $r \geq R_0$

$$0 \leq \frac{x c_r}{b_r} < \alpha$$

entonces

$$\begin{aligned}
F_{X_t}(x) &= \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\frac{Z_{[rt]}}{c_r} \leq x \bigg) \\
&= \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\frac{Z_{[rt]}}{b_r} \frac{b_r}{c_r} \leq x \bigg) \\
&= \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\frac{Z_{[rt]}}{b_r} \leq x \frac{c_r}{b_r} \bigg) \\
&\leq \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\frac{Z_{[rt]}}{b_r} \leq \epsilon \bigg) \\
&= G_t(\epsilon)
\end{aligned}$$

pero como es para toda $\epsilon > 0$, tenemos

$$F_{X_t}(x) \leq G_t(0^+) < 1$$

y al aplicar el límite cuando x tiende a infinito, vemos que

$$\lim_{x\to\infty} F_{X_t}(x) < 1$$

por lo tanto esto es una contradicción, ya se había supuesto que F_{X_t} es una función de distribucción, entonces

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_r}{b_r} \neq 0$$

Ahora tenemos que

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(Z_{[rt]} \leq yb_r | Z_0 = [xb_r]) = P_t(x, [0, y]) \tag{3.22}$$

y demostraremos que P_t (o mejor dicho, la extensión de P_t es una medida) es una C.B. función, y que la distribución conjunta la cual está genera, tomando a c como el estado inicial, son aquellas del proceso límite $\{Z_t\}$. Las propiedades (i), (ii) y (v) de la defición de C.B. función son evidentes, lo que hace falta es ver que las propiedades (iii) y (iv) se cumplen.

Por la relación (3.22) podemos obtener

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}\bigg[\exp\bigg\{ -\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r} \bigg\} \bigg| Z_0 = [xb_r] \bigg] = \big(\varphi_t(\lambda)\big)^{\frac{x}{c}} \tag{3.23}$$

Veamoslo.
Sabemos que $xc_r\frac{b_r}{c_r}-1<[xb_r]\leq xc_r\frac{b_r}{c_r}$, para $xc_r\frac{b_r}{c_r}>3$ y x fija, entonces

$$f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)^{xc_r\frac{b_r}{c_r}}\leq f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)^{[xb_r]}<f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)^{xc_r\frac{b_r}{c_r}-1}$$

Es suficiente ver que

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\middle|Z_0=xb_r\right] &= \lim_{r\to\infty}f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)^{xc_r\frac{b_r}{c_r}}\\
&= \exp\left\{\lim_{r\to\infty}\frac{b_r}{c_r}\ln\left(f_{[rt]}\big(e^{-\frac{\lambda}{b_r}}\big)^{xc_r}\right)\right\}\\
&= \exp\left\{\frac{1}{c}\ln\left(\big[\varphi_t(\lambda)\big]^x\right)\right\}\\
&= \big(\varphi_t(\lambda)\big)^{\frac{x}{c}}
\end{aligned}$$

con esto queda demostrado dicho límite.

Con esta relación podemos definir a $\psi_t(\lambda)$ si tomamos que

$$\big(\varphi_t(\lambda)\big)^{\frac{x}{c}}=e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

entonces

$$\psi_t(\lambda)=-\frac{1}{c}\ln\big(\varphi_t(\lambda)\big)$$

de esta manera la propiedad (iv) es evidente, por el hecho de que aparece la x en la exponencial.

Por último hay que demostrar que P_t satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov y que la ley bidimensional de $\{Z_t\}$ son aquellas generadas por P_t. Para demostrar esto, es necesario utilizar la transformada de Laplace y es suficiente mostrar que se satisface

$$\mathbb{E}\big[e^{-\lambda Z_t-\delta Z_{t+s}}\big]=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda u}P_t(c,\mathrm{d}u)e^{-\delta v}P_s(u,\mathrm{d}v) \tag{3.24}$$

pero sabemos que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y}P_t(x,\mathrm{d}y)=e^{-x\psi_t(\lambda)}$$

entonces vamos a obtener

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda u} P_t(c, \mathrm{d}u) e^{-\delta v} P_s(u, \mathrm{d}v) &= \int_0^\infty e^{-\lambda u} \int_0^\infty e^{-\delta v} P_s(u, \mathrm{d}v) P_t(c, \mathrm{d}u) \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda u} e^{-u\psi_t(\delta)} P_t(c, \mathrm{d}u) \\
&= \int_0^\infty e^{-(\lambda+\psi_t(\delta))u} P_t(c, \mathrm{d}u) \\
&= e^{-c\psi_t(\lambda+\psi_s(\delta))}
\end{aligned}$$

Si hacemos a λ tender a cero tenemos

$$\mathbb{E}\big[e^{-\delta Z_{t+s}}\big] = e^{-c\psi_t(\psi_s(\delta))}$$

que es la transformada de la ecuación de Chapman-Kolmogorov.

Para demostrar la relación (3.24) tenemos que por el hecho de que el $\lim_{r\to\infty} \frac{c_r}{b_r} = c$, el lado izquierdo de dicha relación se puede escribir como

$$\mathbb{E}\big[e^{-\lambda Z_t - \delta Z_{t+s}}\big] = \lim_{r\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]} + \delta Z_{[r(t+s)]}}{b_r}\right\}\bigg| Z_0 = cb_r\right]$$

y nuevamente podemos expresar a dicha esperanza de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}+\delta Z_{[r(t+s)]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0=cb_r\right]=\cdots\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}+\delta Z_{[r(t+s)]}}{b_r}\right\}\middle| Z_{[rt]}=xb_r\right]\middle| Z_0=cb_r\right]\\
&=\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}+\delta Z_{[r(t+s)]}}{b_r}\right\}\middle| Z_{[rt]}=xb_r\right]\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_{[rt]}\le xb_r|Z_0=cb_r)\\
&=\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda xb_r+\delta Z_{[r(t+s)]}}{b_r}\right\}\middle| Z_{[rt]}=xb_r\right]\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_{[rt]}\le xb_r|Z_0=cb_r)\\
&=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\delta Z_{[r(t+s)]}}{b_r}\right\}\middle| Z_{[rt]}=xb_r\right]\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_{[rt]}\le xb_r|Z_0=cb_r)\\
&=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\delta Z_{[rs]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0=xb_r\right]\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_{[rt]}\le xb_r|Z_0=cb_r)
\end{aligned}$$

Argumentando como antes, vemos que podemos reemplazar el integrando por su límite, entonces

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\lambda Z_{[rt]}+\delta Z_{[r(t+s)]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0=cb_r\right]=\cdots\\
&=\lim_{r\to\infty}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\delta Z_{[rs]}}{b_r}\right\}\middle| Z_0=xb_r\right]\mathrm{d}\mathbb{P}(Z_{[rt]}\le xb_r|Z_0=cb_r)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-x\psi_s(\delta)} \mathrm{d}\mathbb{P}(Z_{[rt]} \leq x b_r | Z_0 = c b_r)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x - x\psi_s(\delta)} \mathrm{d}\mathbb{P}_c(Z_t \leq x)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x - x\psi_s(\delta)} \mathrm{d}P_t(c, \mathrm{d}x)$$

$$= e^{-c\psi_t(\psi_s(\delta)+\lambda)}$$

$$= \mathbb{E}\big[e^{-\lambda Z_t - \delta Z_{t+s}}\big]$$

Esto completa la demostracion. ■

Si pasamos a la hipótesis de que $a_r \neq 0$, es evidente que si $\frac{a_r}{b_r}$ tiende a un límite finito estamos aún en la situación ya descrita, y el proceso va a ser simplemente un C.B. proceso trasladado.

Pero si ahora consideramos que $\frac{a_r}{b_r}$ tiende a infinito entonces vamos a tener un proceso con incrementos independientes y estacionarios.

Teorema 3.7.8. *Supongamos que la relación (3.18) se satisface donde ahora $\frac{a_r}{b_r}$ tiende a infinito cuando r tiende a infinito. Entonces $\{Z_t\}$ es un proceso con incrementos independientes y estacionarios o un Proceso de Lévy.*

Demostración. De las hipótesis tenemos que en particular que el límite débil

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(Z_{[rt]} - a_r \leq y b_r | Z_0 = c_r) = H_t(y) \tag{3.25}$$

existe para cada $t \geq 0$ con $H_t(y) = \mathbb{P}(Z_t \leq y)$ una función de distribución en donde $\frac{a_r}{b_r}$ tiende a infinito.

Primero vamos a considerar la relación que hay entre $c_r - a_r$ y b_r.

Si en la relación (3.25) consideramos que $t = 0$, entonces vemos que

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(Z_0 - a_r \leq y b_r | Z_0 = c_r) = H_0(y)$$

en donde $Z_0^{(r)} = \frac{c_r - a_r}{b_r}$ tiene como función de distribución

$$F_0^{(r)}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \frac{c_r - a_r}{b_r} \\ 1 & \text{si } y > \frac{c_r - a_r}{b_r} \end{cases}$$

y esta función de distribución converge débilmente a una función de distribución $H_0(y)$, donde

$$H_0(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < c \\ 1 & \text{si } y > c \end{cases}$$

Supongamos que $\limsup_{r\to\infty} \frac{c_r - a_r}{b_r} > c$ entonces existe uns subsucesión $(\frac{c_{rk}-a_{rk}}{b_{rk}})_{k=1}^{\infty}$ tal que $\frac{c_{rk}-a_{rk}}{b_{rk}} > c$.

Sea y tal que $c < y < \frac{c_{rk}-a_{rk}}{b_{rk}}$, por lo tanto $F_0^{rk}(y) = 0$.

Pero por otro lado tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} F_0^{rk}(y) = H_0(y) = 1$$

esto es una contradicción.

Ahora supongamos que $\liminf_{r\to\infty} \frac{c_r - a_r}{b_r} < c$ entonces existe una subsucesión $(\frac{c_{rk}-a_{rk}}{b_{rk}})_{k=1}^{\infty}$ tal que $\frac{c_{rk}-a_{rk}}{b_{rk}} < c$.

Sea y tal que $\frac{c_{rk}-a_{rk}}{b_{rk}} < y < c$, por lo tanto $F_0^{(rk)}(y) = 1$.

Pero por otro lado tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} F_0^{(rk)}(y) = H_0(y) = 0$$

lo cual es una contradicción.

De esta manera afirmamos que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_{rk} - a_{rk}}{b_{rk}} = c \qquad \text{donde} \qquad 0 \leq c < \infty$$

Claramente si sumamos un factor $o(b_r)$ a a_r no tiene efecto en el límite, a pesar de que sumar un múltiplo representa una traslación del proceso límite. De esta manera si asumimos que $a_r = c_r$ no se pierde generalidad y claro tendríamos $c = 0$, lo cual supondremos durante la demostración.

Si expresamos a la relación (3.25) en términos de su función característica, tenemos

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{i\lambda(Z_{[rt]} - c_r)}{b_r}\right\}\middle| Z_0 = c_r\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\lambda Z_t}\right] = \varphi_t(\lambda)$$

y expresando a la función característica en términos de la función generadora, vemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{i\lambda(Z_{[rt]}-c_r)}{b_r}\right\}\Big|Z_0=c_r\right]=\cdots\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\exp\left\{\frac{i\lambda(j-c_r)}{b_r}\right\}\mathbb{P}(Z_{[rt]}=j|Z_0=c_r)\\
&=\exp\left\{-\frac{i\lambda c_r}{b_r}\right\}\sum_{j=0}^{\infty}\exp\left\{\frac{i\lambda j}{b_r}\right\}\mathbb{P}(Z_{[rt]}=j|Z_0=c_r)\\
&=\exp\left\{-\frac{i\lambda c_r}{b_r}\right\}\left(f_{[rt]}\left(\exp\left\{\frac{i\lambda}{b_r}\right\}\right)\right)^{c_r}
\end{aligned}$$

entonces

$$\varphi_t(\lambda)=\lim_{r\to\infty}\exp\left\{-\frac{i\lambda c_r}{b_r}\right\}\left(f_{[rt]}\left(\exp\left\{\frac{i\lambda}{b_r}\right\}\right)\right)^{c_r}$$

Esto se puede expresar como

$$f_{[rt]}\left(\exp\left\{\frac{i\lambda}{b_r}\right\}\right)=\exp\left\{\frac{i\lambda c_r}{b_r}\right\}\big[\varphi_t(\lambda)+o(1)\big]^{\frac{1}{c_r}} \tag{3.26}$$

donde $\varphi_t(\lambda)$ tiene que ser infinitamente divisible, ya que su raíz estan bien definida. Como $\varphi_t(\lambda)$ es infinitamente divisible el

$$\ln\big[\varphi_t(\lambda)+o(1)\big]$$

esta determinado para una r grande en la manera usual.

Ahora vamos a necesitar una extensión de la relación (3.26), dada por

$$f_{[rt]}\left(\exp\left\{\frac{i\lambda}{b_r}+\frac{\delta_r}{c_r}\right\}\right)=\exp\left\{\frac{i\lambda}{b_r}+\frac{\delta+\ln\big[\varphi_t(\lambda)\big]+o(1)}{c_r}\right\} \tag{3.27}$$

donde δ_r es cualquier sucesión de números complejos con parte real no positiva la cual tiende a δ cuando r va a infinito.

Asumiendo esto por el momento, podemos verificar que

$$\lim_{r\to\infty}\mathbb{E}\left[\exp\left\{i\lambda\frac{Z_{[rt]}-c_r}{b_r}+i\sigma\frac{Z_{[r(t+s)]}-Z_{[rt]}}{b_r}\right\}\Big|Z_0=c_r\right]=\varphi_t(\lambda)\varphi_s(\sigma) \tag{3.28}$$

Primero tenemos que ver que la siguiente igualdad se satisface

$$\mathbb{E}\big[x^{Z_n}y^{Z_{n+m}}\big|Z_0=j\big]=\big[f_n\big(xf_m(y)\big)\big]^j$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[x^{Z_n}y^{Z_{n+m}}\big|Z_0=j\big] &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x^k y^s\mathbb{P}(Z_{n+m}=s,Z_n=k|Z_0=j)\\
&= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}x^k y^s\mathbb{P}(Z_{n+m}=s|Z_n=k)\mathbb{P}(Z_n=k|Z_0=j)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{s=0}^{\infty}y^s\mathbb{P}(Z_{n+m}=s|Z_n=k)\mathbb{P}(Z_n=k|Z_0=j)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}x^k\sum_{s=0}^{\infty}y^s\mathbb{P}(Z_m=s|Z_0=k)\mathbb{P}(Z_n=k|Z_0=j)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}x^k\big(f_m(y)\big)^k\mathbb{P}(Z_n=k|Z_0=j)\\
&= \big[f_n\big(xf_m(y)\big)\big]^j
\end{aligned}$$

y

$$\mathbb{E}\Bigg[\exp\Bigg\{i\lambda\frac{Z_{[rt]}-c_r}{b_r}+i\sigma\frac{Z_{[r(s+t)]}-Z_{[rt]}}{b_r}\Bigg\}\Bigg|Z_0=c_r\Bigg]=\cdots$$

$$=\exp\Bigg\{-i\lambda\frac{c_r}{b_r}\Bigg\}\mathbb{E}\Bigg[\exp\Bigg\{\frac{i(\lambda-\sigma)}{b_r}Z_{[rt]}+\frac{i\sigma}{b_r}Z_{[r(s+t)]}\Bigg\}\Bigg|Z_0=c_r\Bigg]$$

$$=\exp\Bigg\{-i\lambda\frac{c_r}{b_r}\Bigg\}\Bigg[f_{[rt]}\Bigg(\exp\Bigg\{\frac{i(\lambda-\sigma)}{b_r}\Bigg\}f_{[rs]}\Bigg(\exp\Bigg\{\frac{i\sigma}{b_r}\Bigg\}\Bigg)\Bigg)\Bigg]^{c_r}$$

y como resultado tenemos

$$\mathbb{E}\Big[\exp\big\{i\lambda Z_t+i\sigma(Z_{t+s}-Z_t)\big\}\Big]=\cdots$$

$$=\lim_{r\to\infty}\exp\Bigg\{-i\lambda\frac{c_r}{b_r}\Bigg\}\Bigg[f_{[rt]}\Bigg(\exp\Bigg\{\frac{i(\lambda-\sigma)}{b_r}\Bigg\}f_{[rs]}\Bigg(\exp\Bigg\{\frac{i\sigma}{b_r}\Bigg\}\Bigg)\Bigg)\Bigg]^{c_r}$$

Pero reemplazando a $f_{[rs]}$ por su expresión (3.26), tenemos que

$$\delta_r = \ln\Big(\mathbb{E}\big[\exp\big\{i\lambda Z_t^{(r)}\big\}\big]\Big) = \ln\big[\varphi_t(\lambda) + o(1)\big]$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\exp\Big\{-i\lambda\frac{c_r}{b_r}\Big\}\Bigg[f_{[rt]}\Bigg(\exp\Big\{\frac{i(\lambda-\sigma)}{b_r}\Big\}f_{[rs]}\Bigg(\exp\Big\{\frac{i\sigma}{b_r}\Big\}\Bigg)\Bigg)\Bigg]^{c_r} = \cdots\\
&= \exp\Big\{-i\lambda\frac{c_r}{b_r}\Big\}\Bigg[f_{[rt]}\Bigg(\exp\Big\{\frac{i(\lambda-\sigma)}{b_r}\Big\}\exp\Big\{\frac{i\sigma}{b_r}\Big\}\big[\varphi_s(\sigma)+o(1)\big]^{\frac{1}{c_r}}\Bigg)\Bigg]^{c_r}\\
&= \exp\Big\{-i\lambda\frac{c_r}{b_r}\Big\}\Bigg[f_{[rt]}\Bigg(\exp\Big\{\frac{i\lambda}{b_r}\Big\}\big[\varphi_s(\sigma)+o(1)\big]^{\frac{1}{c_r}}\Bigg)\Bigg]^{c_r}\\
&= \exp\Big\{-i\lambda\frac{c_r}{b_r}\Big\}\exp\Big\{\frac{i\lambda c_r}{b_r} + \ln\big[\varphi_s(\sigma)+o(1)\big] + \ln\big[\varphi_t(\lambda)+o(1)\big]\Big\}\\
&= \varphi_s(\sigma)\varphi_t(\lambda) + o(1)
\end{aligned}$$

y al aplicar el límite se ve claramente que la igualdad (3.28) se satisface.

Para obtener la relación (3.27) es necesario utilizar el siguiente lema, cuya demostración se omite.

Lema 3.7.3. *Supongamos que para cada n, tenemos una pareja (A_n, B_n) (posiblemente dependientes) que esta determinada en algún espacio de probabilidad. Además supongamos que A_n es real; tal que para cada λ real se tiene*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big[e^{i\lambda A_n}\big] = \varphi_t(\lambda) \tag{3.29}$$

existe, donde $\varphi(\lambda)$ es una función característica, tal que $Re(B_n) \leq M$ casi seguramente para toda n, y B_n converge en distribucción a cero. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\big[e^{i\lambda A_n + B_n}\big] = \varphi(\lambda) \tag{3.30}$$

Para obtener la relación (3.27) por el Lema definimos

$$A_r = \frac{Z_{[rt]} - c_r}{b_r} \qquad B_r = \delta_r\frac{Z_{[rt]} - c_r}{c_r} \tag{3.31}$$

donde Z_n es el r-ésimo proceso de ramificación con $Z_0 = c_r$. La convergencia de la ecuación (3.25) (con $a_r = c_r$) permite la existencia de (3.29), siempre y cuando B_r converge en distribución a cero, veamoslo

Primero vamos a demostrar la siguiente proposición

Proposición 3.7.1. *Supongamos que X_n converge en distribución a X y δ_n tiende a cero, cuando n tiende a infinito, entonces $\delta_n X_n$ converge en distribución a cero*

Demostración. Damos $\epsilon > 0$ y $\eta > 0$, y tomamos una x tan grande tal que

$$\mathbb{P}\big(|X| \geq x\big) < \eta \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}(X = \pm x) = 0$$

después tomamos un n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $|\delta_n| < \frac{\epsilon}{x}$ y

$$\big|\mathbb{P}(X_n \leq y) - \mathbb{P}(X \leq y)\big| < \eta \qquad \text{para} \qquad y = \pm x$$

entonces

$$-\mathbb{P}(X_n \leq x) + \mathbb{P}(X \leq x) < \eta$$

en particular

$$-\mathbb{P}\left(X_n \leq \frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) + \mathbb{P}\left(X \leq \frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) < \eta$$

y si a esta relación le sumamos y restamos un uno tenemos

$$1 - \mathbb{P}\left(X_n \leq \frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) - 1 + \mathbb{P}\left(X \leq \frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) < \eta$$

después a esta misma relación le sumamos

$$\mathbb{P}\left(X_n \leq -\frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) - \mathbb{P}\left(X \leq -\frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) < \eta$$

tenemos

$$1 - \mathbb{P}\left(X_n \leq \frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) + \mathbb{P}\left(X_n \leq -\frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) - \cdots$$

$$-1 + \mathbb{P}\left(X \leq \frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) - \mathbb{P}\left(X \leq -\frac{\epsilon}{|\delta_n|}\right) < \eta$$

esto es lo mismo que

$$\mathbb{P}\big(|\delta_n X_n| > \epsilon\big) < 3\eta$$

para $n \geq n_0$.

De esta manera queda demostrada la proposición.

■

Entonces B_r converge en distribución ya que $\delta_r \frac{b_r}{c_r}$ tiende a cero. Finalmente $Z_{[rt]} \geq 0$ y δ_r tiende a δ con $\mathrm{Re}(\delta_r) \leq 0$, esto nos dice que $\mathrm{Re}(B_r)$ esta acotado superior y uniformemente en r. Entonces la relación (3.30) se cumple para las variables A_r y B_r dadas en la relación (3.31) con $\varphi_t(\kappa)$ igual a $\varphi(\lambda)$, esto implica inmediatamente que

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left\{i\lambda\frac{Z_{[rt]}-c_r}{b_r}+\delta_r\frac{Z_{[rt]}}{c_r}\right\}\middle|Z_0=c_r\right]=e^{\delta}\varphi_t(\lambda) \tag{3.32}$$

Expresando la esperanza en términos de la función generadora. la relación (3.32) se transforma en (3.27). Esto completa la demostración de que $\{Z_t\}$ es un proceso aditivo.

■

Capítulo 4

Relación entre los Procesos de Ramificación y los Procesos de Lévy

4.1. Introducción

En el capítulo anterior vimos como un C.B. proceso y un proceso de Lévy forman precisamente una clase de procesos límites para una sucesión de procesos de Galton-Watson cuyos tiempos y espacios de estados se van a infinito.

En esta capítulo vamos a estudiar la construcción del C.B. proceso más general, el cual se obtiene mediante un cambio de tiempo aleatorio en un proceso de Lévy con saltos no negativos.

Para empezar con la relación del C.B. proceso y el proceso de Lévy con saltos no negativos vamos a necesitar algunas definiciones previas muy importantes

4.2. Definiciones

Primero vamos a empezar con las características que deden cumplir tanto el C.B. proceso como el proceso de Lévy con saltos no negativos. La definición de un proceso de Lévy con saltos no negativos la podemos ver en el Apéndice B.

Definición 4.2.1. *Sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy con saltos no negativos que cumple con lo siguiente:*

i) $\mathbb{P}(X = 0) = 1$

ii) $\mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda X_t\}\big] = \exp\{t\psi(\lambda)\}$

donde

$$\psi(\lambda) = d\lambda + \frac{q^2\lambda^2}{2} + \int_{(0,\infty)} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x \mathbb{1}_{\{x<1\}})\Pi(\mathrm{d}x)$$

y $d \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^+$ y Π es la medida de Lévy que cumple con

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 \wedge x^2)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$$

Ahora vamos a definir a $Y_t = X_t + x$ donde $x > 0$, entonces su transformada de Laplace esta dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda Y_t\}\big] &= \mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda(X_t + x)\}\big]\\ &= \exp\{-\lambda x\}\mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda X_t\}\big]\\ &= \exp\{-\lambda x + t\psi(\lambda)\}\end{aligned}$$

Definición 4.2.2. *Sea $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ un C.B. proceso si es un proceso de Markov en $[0,\infty)$ con trayectorias continuas por la derecha cuyas probabilidades de transición estan dadas por una C.B. función y que satisface*

$$\mathbb{E}_x\big[\exp\{-\lambda Z_t\}\big] = \exp\{-x\phi(\lambda, t)\}$$

donde $\phi(\lambda, t)$ satisface

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\lambda, t) = -\psi(\phi(\lambda, t))$$

Esta propiedad del exponente de Laplace para el C.B. proceso fue demostrado por Silverstein.

4.3. Relación entre el C.B. proceso y el proceso de Lévy con saltos no negativos.

Teorema 4.3.1. *Sea $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Lévy con saltos no negativos, que empieza en un punto $x > 0$. Vamos a definir a*

$$I(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{Y_u}$$

donde $t < T_x = \text{ínf}\{u > 0 : Y_u = 0\}$ y $I(t) = \infty$ para toda $t \geq T_x$.

Además vamos a tener un cambio de tiempo aleatorio dado por

$$J(t) = \text{ínf}\{u : I(u) > t\}$$

Entonces vamos a tener que el proceso $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ definido por $Z_t = Y \circ J(t)$ es un C.B. proceso.

Hablando de una manera informal este resultado nos dice que cada C.B proceso $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ puede obtenerse si empezamos con un proceso de Lévy con saltos no negativos $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ y este va a una velocidad, la cual es directamente proporcional a la posición. Esto es fácil de entender si pensamos en términos de una colección de partículas indistinguibles con una masa muy pequeña, donde todas se comportan de manera independiente una de otra y cada una crea una nueva partícula (y posiblemente sean aniquiladas) a una misma razón, y si uno, interpreta a Z_t como la masa local de las partículas vivas al tiempo t. De hecho esta interpretación puede hacerse precisa al pasar al límite.

Demostración. Como $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy con saltos no negativos y con $Y_0 = x > 0$, su transformada de Laplace esta dada por

$$\mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda Y_t\}\big] = \exp\{-\lambda x + t\psi(\lambda)\}$$

claramente este proceso tiene asociado un semigrupo al cual denotaremos por $\{Q_t\}_{t\geq 0}$.

Si $f(x) = \exp\{-\lambda x\}$ entonces tenemos que

$$Q_t \exp\{-\lambda x\} = \mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda Y_t\}\big]$$

En particular vamos a tener que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_t \exp\{-\lambda x\} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda Y_t\}\big]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp\{-\lambda x + t\psi(\lambda)\}\\ &= \exp\{-\lambda x\}\psi(\lambda)\exp\{t\psi(\lambda)\}\\ &= \psi(\lambda)\mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda Y_t\}\big].\end{aligned}$$

Y vamos a obtener a su operador infinitesimal, si evaluamos a dicha derivada cuando $t = 0$, por lo tanto

$$A\exp\{-\lambda x\} = \psi(\lambda)\exp\{-\lambda x\}.$$

De esta manera podemos afirmar que la función $\exp\{-\lambda x\}$ pertenece al dominio del operador infinitesimal y por el teorema A.2.5[1] afirmamos que dicha función también pertenece al dominio del operador característico, ya que Y_t es un proceso normal de Markov.

Por otro lado tenemos que $Z_t = Y_{J(t)}$ es un proceso de Markov, por que Y_t es proceso de Markov; ya que la teoría de cambio de tiempo aleatorio[2] permite que Z_t adquiera las propiedades de Y_t dependiendo de las propiedades del funcional $I(t)$. En nuestro caso el funcional permite que sea proceso de Markov Normal[3].

Por ser Z_t un proceso de Markov, este tiene un semigrupo asociado el cual denotaremos por $\{R_t\}_{t\geq 0}$ de tal manera que

$$R_t\exp\{-\lambda x\} = \mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda Z_t\}\big]$$

Como tanto Y_t y Z_t son procesos Normales de Markov con respecto a la filtración $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s : s \leq t)$ entonces podemos aplicar el teorema de Volkonski[4]. Este resultado es muy importante ya que relaciona el operador característico de un proceso de Markov Y_t con el operador característico de Z_t, el cual es el generado por el cambio de tiempo aleatorio en Y_t. Pero

[1] Ver apéndice A
[2] Ver Dynkin
[3] Ver apéndice A
[4] Ver apéndice A

como ambos son procesos de Markov Normales tenemos que el operador infinitesimal y el operador característico son iguales, es así como tenemos que si B es el operador infinitesimal de Z_t y $f(x)$ pertenece a un espacio de Banach , entonces

$$Bf(x) = xAf(x)$$

Ahora si $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ tiene exponente de Laplace dado por $\phi(\lambda, t)$, tenemos

$$R_t \exp\{-\lambda x\} = \exp\{-x\phi(\lambda, t)\}$$

en particular vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R_t \exp\{-\lambda x\} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp\{-x\phi(\lambda, t)\} \\ &= -x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(\lambda, t) \exp\{-x\phi(\lambda, t)\}\end{aligned}$$

y por otro lado aplicando el teorema A.2.1[5] vemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} R_t \exp\{-\lambda x\} = B(R_t \exp\{-\lambda x\})$$

Y si ahora nombramos a $f(x) = R_t \exp\{-\lambda x\}$, vamos a tener

$$B(R_t \exp\{-\lambda x\}) = xA(R_t \exp\{-\lambda x\})$$

y como $R_t \exp\{-\lambda x\} = \exp\{-x\phi(\lambda, t)\}$, entonces

$$\begin{aligned}B(\exp\{-x\phi(\lambda, t)\}) &= xA(\exp\{-x\phi(\lambda, t)\}) \\ &= x\psi(\phi(\lambda, t)) \exp\{-x\phi(\lambda, t)\}\end{aligned}$$

pero a su vez tenemos que

$$B(\exp\{-x\phi(\lambda, t)\}) = -x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(\lambda, t) \exp\{-x\phi(\lambda, t)\}$$

De esta manera se ve claramente que

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\lambda, t) = \big(\phi(\lambda, t)\big)$$

con

$$\phi(\lambda, 0) = \lambda$$

Es así como queda demostrado que $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ es un C.B proceso. ∎

[5] Ver Apéndice A

Apéndice A

Procesos de Markov.

A.1. Función de Transición

Definición A.1.1 (Función de Transición)**.** *Consideremos un espacio de estados arbitrario* $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$. *La función* $P(t, x, \Gamma)$ $(t \geq 0, x \in \mathcal{E}, \Gamma \in \mathcal{B})$ *es llamada función de transición si se satisfacen las siguientes condiciones*

i) *Para una* t *y una* x *fijas la función* $P(t, x, \Gamma)$ *es una medida en la* σ*-álgebra* $\mathcal{B}$.

ii) *Para una* t *y* Γ *fijas,* $P(t, x, \Gamma)$ *es una función* $\mathcal{B}$*-medible de* x

iii) $P(t, x, \Gamma) \leq 1$

iv) $P(0, x, \Gamma - x) = 0$.

v) $P(s + t, x, \Gamma) = \int_{\mathcal{E}} P(s, x, \mathrm{d}y) P(t, y, \Gamma) \qquad (s, t \geq 0)$.

*De las propiedades (*v*) y (*iii*) tenemos:*

$$P(s + t, x, \mathcal{E}) \leq \int_{\mathcal{E}} P(s, x, \mathrm{d}y) = P(s, x, \mathcal{E}) \qquad (s, t \geq 0).$$

Definición A.1.2 (Continuidad Estocástica)**.** *Sea* $\mathcal{E}$ *un espacio métrico,* $\mathcal{B}$ *es la* σ*-álgebra de Borel. Una función de transición* $P(t, x, \Gamma)$ $(\Gamma \in \mathcal{B})$ *en* $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ *se dice estocásticamente continua si*

$$\lim_{t \to 0^+} P(t, x, N_\epsilon(x)) = 1 \qquad \text{para toda } \epsilon > 0, x \in \mathcal{E}$$

donde $N_\epsilon(x) = \{y \in \mathcal{E} : \rho(y,x) < \epsilon\}$ *y* ρ *una métrica.*

Si este límite se cumple uniformemente en x *para cada* $\epsilon > 0$ *fija* $P(t,x,\Gamma)$ *es llamada estocástica y uniformente continua.*

A.2. Semigrupos

Definición A.2.1 (Espacio de Banach)**.** *Llamaremos a un conjunto* L *espacio de Banach si las operaciones de adición y de multiplicación por numeros, donde estas operaciones tienen la propiedades algebraicas usuales, están definidas en él, y si se les asocia con cada elemento* $f \in L$ *un número no negativo* $||f||$*, llamado la norma del vector* f *tal que se cumplen las siguientes condiciones*

i) $||f_1 + f_2|| \leq ||f_1|| + ||f_2||$.

ii) $||\lambda f|| = |\lambda| \; ||f||$ *(*λ *es cualquier número).*

iii) $||f|| = 0$ *si y sólo si* $f = 0$.

iv) Si $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} ||f_m - f_n|| = 0$*, entonces existe un vector* $f \in L$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

o también dicho límite(límite fuerte) se puede denotar como

$$s - \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

Definición A.2.2 (Semigrupo)**.** *Sea* $\{T_t\}$, $t \in \mathbb{R}$*, una familia de operadores lineales acotados en un espacio de Banach* L*, esta familia es llamada semigrupo si para toda* $s \geq 0$, $t \geq 0$ *se tiene*

$$T_{s+t} = T_s T_t$$

Definición A.2.3 (Semigrupo de Contracción)**.** *Un semigrupo* T_t *es llamado semigrupo de contracción si para toda* $t \geq 0$ *y* $f \in L$ *se tiene*

$$||T_t f|| \leq ||f||$$

Definición A.2.4 (Operador Infinitesimal de Semigrupo). *El operador infinitesimal de un semigrupo T_t se define como*

$$Af = s - \lim_{h \to 0^+} \frac{T_h f - f}{h}$$

si dicho límite existe

Definición A.2.5 (Dominio del Operador Infinitesimal). *El dominio de un operador infinitesimal es el conjunto de vectores $f \in L$ para los cuales existe*

$$s - \lim_{h \to 0^+} \frac{T_h f - f}{h}$$

y se denota por $\mathcal{D}_A$

Definición A.2.6 (Semigrupo de Feller). *Un semigrupo de Feller en $C_0(\mathcal{E})$ es una familia $\{T_t\}_{t \geq 0}$ de operadores lineales positivos en $C_0(\mathcal{E})$ tal que*

i) $T_t f \in C_0(\mathcal{E})$

ii) Si $f \in C_0(\mathcal{E})$ *y* $0 \leq f \leq 1$ *entonces* $0 \leq T_t f \leq 1$.

iii) $T_0 = I$ *y* $T_{t+s} = T_t T_s$ *para* $s, t \geq 0$

iv) Para toda $f \in C_0(\mathcal{E})$, $\lim_{t \to 0^+} ||T_t f - f|| = 0$

Vamos a denotar por L_0 como el conjunto de todos los vectores $f \in L$ para los cuales se cumple

$$s - \lim_{t \to 0^+} T_t f = f$$

Definición A.2.7 (Definición de derivada fuerte). *Sea $f : [a, b] \to L$ donde L es un espacio de Banach. Decimos que $f(t)$ es diferenciable en $t \in (a, b)$ si el siguiente límite existe*

$$s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} f(t) = s - \lim_{h \to o} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

o existe $g \in L$ tal que para toda $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ entonces

$$\left|\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - g \right|\right| < \epsilon$$

Teorema A.2.1. *Sea $f \in \mathcal{D}_A$. Entonces $T_t f \in \mathcal{D}_A$ para cada $t > 0$, y vamos a tener*

$$s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_t f = A(T_t f) = T_t(Af) \qquad t > 0$$

Demostración. Primero vamos a fijar una $t > 0$. Para cualquier $h > 0$ pequeña tenemos que

$$\frac{T_{t+h}f - T_t f}{h} = T_t \frac{T_h f - f}{h} = \frac{T_h - I}{h} T_t f$$

y al aplicar el límite fuerte cuando $h \to 0^+$ por la continuidad de T_t observamos que

$$s - \lim_{h \to 0^+} T_t \frac{T_h f - f}{h} = T_t(Af)$$

entonces dicho límite existe y por consecuencia tenemos que $T_t f \in \mathcal{D}_A$ y

$$A(T_t f) = T_t(Af) = \frac{\mathrm{d}^+ T_t f}{\mathrm{d}t}$$

Ahora tenemos una $h < 0$ de tal manera que $t + h > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left|\frac{T_{t+h}f - T_t f}{h} - T_t(Af)\right|\right| &= \left|\left|T_{t+h}\Big(\frac{T_{|h|}f - f}{|h|}\Big) - T_{|h|}(Af)\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\frac{T_{|h|}f - f}{|h|} - T_{|h|}(Af)\right|\right| \\
&\leq \left|\left|\frac{T_{|h|}f - f}{|h|} - Af\right|\right| + \left|\left|Af - T_{|h|}(Af)\right|\right|
\end{aligned}$$

si hacemos tender a h a cero vemos que

$$\lim_{h \to 0} \left|\left|\frac{T_{t+h}f - T_t f}{h} - T_t(Af)\right|\right| = 0$$

esto prueba el teorema. ■

Teorema A.2.2 (Hille-Yosida)**.** *Sea A un operador lineal L con dominio $\mathcal{D}_A$. Para que A sea un operador infinitesimal de un semigrupo de contracción en L es necesario y suficiente que A satisfaga las siguientes tres condiciones*

i) $\mathcal{D}_A$ es denso en L.

ii) Para toda $\lambda > 0$ y $g \in L$ la ecuacion

$$\lambda f - Af = g$$

tiene una única solución $f \in \mathcal{D}_A$

iii) La solución en (ii) satisface

$$||f|| \leq \frac{||g||}{\lambda}$$

Definición A.2.8 (Medibilidad Débil)**.** *Sea E un intervalo arbitrario. Una función $u_t(t \in E)$ con valores en un espacio de Banach L es llamada medible débilmente si, para cualquier funcional lineal l, $l(u_t)$ es una función numérica la cual es medible con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{B}_E$ generada por todos los subintervalos de E.*

Definición A.2.9 (Continuidad Fuerte)**.** *Sea L un espacio de Banach. Sea $u_t(a \leq t \leq b)$ una función con valores en L. Vamos a decir que la función u_t es fuertemente continua en el punto t si*

$$\lim_{h \to 0} ||u_{t+h} - u_t|| = 0$$

Vamos a denotar por $S(L, E)$, E es un intervalo arbitrario, como el conjunto de todas la funciones $u_t(t \in E)$ con valores en L (espacio de Banach), las cuales son acotadas en norma y medibles débilmente.

Teorema A.2.3. *Sea T_t un semigrupo de contracción en un espacio de Banach separable L. Si para alguna $f \in L$, la función $T_t f$ $(t > 0)$ es medible débilmente entonces es fuertemente continua.*

A.3. Procesos de Markov

Definición A.3.1 (Proceso Estocástico)**.** *Un proceso estocástico X con conjunto índice $\mathfrak{f}$ y espacio de estados $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es una función definida en $\mathfrak{f} \times \Omega$ con valores en $\mathcal{E}$ tal que para cada $t \in \mathfrak{f}$, $X(t, \cdot) : \Omega \to \mathcal{E}$ es una variable aleatoria evaluada en $\mathcal{E}$, esto es, $\{\omega : X(t, \omega) \in \Gamma\} \in \mathcal{F}$ para toda $\Gamma \in \mathcal{B}$.*

Definición A.3.2. *Una colección* $\{\mathcal{F}_t\} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0,\infty)\}$ *de* σ*-álgebras de conjuntos en* $\mathcal{F}$ *es una filtración si* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+s}$ *para* $t, s \in [0,\infty)$.

Intuitivamente $\mathcal{F}_t$ corresponde a la información conocida a un observador al tiempo t. En particular Para un proceso X vamos a definir $\{\mathcal{F}_t\}$ por $\mathcal{F}_t = \sigma\big(X(s) : s \leq t\big)$.

Definición A.3.3 (Procesos de Markov)**.** *Sea* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso estocástico definido en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *con valores en* $\mathcal{E}$*, y sea* $\mathcal{F}_t = \sigma\big(X_s : s \leq t\big)$*. Entonces* X *es un proceso de Markov si*

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in \Gamma | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in \Gamma | X_t)$$

para toda $s, t \geq 0$ *y* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Definición A.3.4 (Proceso de Markov Normal)**.** *Sea* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso estocástico en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *y dada una filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*, se dice que* $\{X_t, \mathcal{F}_t^X\}_{t\geq 0}$ *si*

i) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *es un proceso continuo por la derecha.*

ii) $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *es un proceso de Markov*

iii) La familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *es completa, esto es, que si tenemos* $A \subset B \in \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *y* $\mathbb{P}(B) = 0$ *implica que* $A \in \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*;y continua por la derecha, esto es, que* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ *para cada* $t \geq 0$*, donde* $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap_{\{s>t\}} \mathcal{F}_s$.

Definición A.3.5. *Un proceso* X *evaluado en* $\mathcal{E}$ *se dice que es* $\{\mathcal{F}_t\}$*-progresivo si la restricción de* X *a* $[0,t] \times \Omega$ *es* $\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_t$*-medible para cada* $t \geq 0$*, esto es, que si*

$$\{(s,\omega) : X_s(\omega) \in \Gamma\} \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_\sqcup$$

para cada $t \geq 0$ *y* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$

Definición A.3.6 (Proceso de Markov Fuerte)**.** *Sea* $\{X_t\}_{t\geq 0}$ *proceso de Markov evaluado en* $\mathcal{E}$*, definido en un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, con respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *tal que* X *es* $\{\mathcal{F}_t\}$*-progresivo. Supongamos que* $P(t, x, \Gamma)$ *es una función de transición para* X*, y sea* τ *un tiempo de paro con* $\tau < \infty$ *casi seguramente.*

Entonces X *es un proceso de Markov fuerte en* τ *si*

$$\mathbb{P}(X_{\tau+t} \in \Gamma | \mathcal{F}_t) = P(t, X(\tau), \Gamma)$$

para toda $t \geq 0$ *y* $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, *a lo que es equivalente*

$$\mathbb{E}[f(X_{\tau+t})|\mathcal{F}_t] = \int f(y)P(t, X(\tau), \mathrm{d}y)$$

para toda $t \geq 0$ *y* f *en un espacio de Banach de funciones acotadas.* X *es un proceso de Markov fuerte con respecto a* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si* X *es un proceso de Markov fuerte en* τ *para todo tiempo de paro* τ *con* $\tau < \infty$ *casi seguramente.*

Definición A.3.7 (Operador Característico)**.** *Sea* f *cualquier función acotada de Borel en* $\mathcal{E}$, *y supongamos que el límite*

$$\mathfrak{A}f(x) = s - \lim_{U \to \{x\}} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_{\tau(U)})] - f(x)}{\mathbb{E}_x[\tau(U)]}$$

existe, donde $U \to \{x\}$ *significa que las vecindades* U *se encogen alrededor de* x *en la manera en que el* $\sup\{\rho(y, x) : y \in U\}$ *tienda a cero; y* τ *un tiempo de paro con espectacion finita. Entonces vamos a decir que* $f \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}(x)$; *si* $f \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}(x)$ *para toda* x *entonces* $f \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}$. *El operador* $\mathfrak{A}$ *es lineal en* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}$ *y* $\mathfrak{A}$ *es llamado el operador característico del proceso de Markov y* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}}$ *el dominio del operador característico.*

Teorema A.3.1 (Lema de Dynkin)**.** *Sea* $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso normal de Markov con generador infinitesimal* A *y estado inicial* x, *y sea* τ *un tiempo de paro cualquiera con esperanza finita. Entonces para toda* $f \in \mathcal{D}_A$

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau Af(X_t)\mathrm{d}t\right] = \mathbb{E}_x[f(X_\tau)] - f(x)$$

Teorema A.3.2. *Sea* $\{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *un proceso normal de Markov con generador infinitesimal* A *y operador característico* $\mathcal{A}$. *Entonces*

$$\mathcal{D}_A = \{f \in C(\mathcal{E}) : f \in \mathcal{D}_{\mathcal{A}} y \mathcal{A}f \in C(\mathcal{E})\}$$

donde $C(\mathcal{E})$ *denota el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas.*
Para cada función f, *tenemos*

$$Af = \mathcal{A}f$$

Teorema A.3.3 (Teorema de Volkonski)**.** *Sea X un proceso de Markov en el espacio de estados $(\mathcal{E}, \mathcal{B})$, y sea el proceso Y que se obtiene a partir de X por un cambio de tiempo aleatorio. Entonces la topología intrínseca, la σ-álgebra $\mathcal{B}$ y la distribución de salida del interior de cualquier conjunto para el proceso X coincide con los entes correspondientes al proceso Y.*

Sea $\mathcal{A}_X$ y $\mathcal{A}_Y$ los operadores característicos de los procesos X y Y respectivamente, en alguna topología $\mathfrak{C}$. amos a asumir que Y se obtiene de X por un cambio de tiempo aleatorio, correspondiente a la funcional aditiva

$$\phi_t^s = \int_s^t V(X_u)\mathrm{d}u$$

donde V es positiva y una función $\mathcal{B}$-medible. Si la función V es continua en un punto x, entonces

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}_Y}(x) = \mathcal{D}_{\mathcal{A}_X}(x)$$

y

$$\mathcal{A}_Y f(x) = \frac{1}{V(x)}\mathcal{A}_X f(x)$$

Teorema A.3.4. *Sea $\mathcal{E}$ localmente compacto y separable, y sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de Feller en $C_0(\mathcal{E})$. Entonces para cada $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, donde $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ es el conjunto de medidas de probabilidad de Borel en $\mathcal{E}$, existe un proceso de Markov X correspondiente a $\{T_t\}_{t\geq 0}$ con distribución inicial μ y trayectorias muestrales en $\mathbb{D}_{\mathcal{E}}[0,\infty)$ (el espacio de las trayectorias cadlag). Además X es un proceso de Markov fuerte con respecto a la filtración $\mathcal{F}_{t^+} = \bigcap\limits_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$*

Apéndice B

Procesos de Lévy

B.1. Definición y algunas propiedades

Vamos a considerar a $\triangle$ como el punto cementerio y a $\mathbb{D}_{[0,\infty)}$ como el espacio de todas las funciones cadlag(continuas por la derecha y con límite por la izquierda). Se define la filtración canónica asociada al proceso estocástico real $\{X_t\}_{t\geq 0}$ y completada con respecto a $\mathbb{P}$ como $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} = \sigma(X_s : s \leq t)$.

A partir de aquí vamos a considerar a $\triangle = \infty$ y a $\Omega = \mathbb{D}_{[0,\infty)} \bigcup \{\triangle\}$ y a un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Definición B.1.1 (Procesos de Lévy). *Sea $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ un proceso estocástico real definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Se dice que X es un proceso de Lévy si cumple:*

i) Para cualquier $n \geq 1$ y $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, las variables aleatorias $Y_j = X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ con $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ son independientes.

ii) $X_0 = 0$ casi seguramente.

iii) Para toda $t, s > 0$ la distribución $X_{t+s} - X_t$ depende de s y no de t, es decir $X_{t+s} - X_t = X_s$.

Estos procesos también son conocidos como procesos con incrementos independientes y estacionarios.

Una observación importante es que la variable aleatoria X_t es infinitamente divisible, lo cual es posible mostrar si definimos a una sucesión de variables aleatorias $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ donde

$$\eta_i = X_{t\frac{i}{n}} - X_{t\frac{i-1}{n}} \qquad \text{para toda } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

de esta manera vamos a tener que

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$

entonces afirmamos que X_t es una variable aleatoria infinitamente divisible.

Por ser X_t infinitamente divisible su exponente característico esta dado por la relación de Lévy-Kintchine, la cual es

$$\Psi(\lambda) = id\lambda + \frac{q^2\lambda^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(\mathrm{d}x)$$

donde $d \in \mathbb{R}$ y es conocida como derivada o drift, $q \in \mathbb{R}^+$ y es el coeficiente gaussiano y Π es la medida de Lévy que cumple

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 \wedge x^2)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$$

Ahora vamos a mencionar tres teorema que son fundamentale dentro de la teoría de los procesos de Lévy, cuyas demostraciones vamos a omitir.

Teorema B.1.1. *Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy, entonces la distribución de X_t es infinitamente divisible para toda t y si $\varphi_{X_1}(\lambda) = \exp\{-\Psi(\lambda)\}$, entonces $\varphi_{X_t}(\lambda) = \exp\{-t\Psi(\lambda)\}$*

Teorema B.1.2. *Si $d \in \mathbb{R}$, $q \geq 0$, Π es una medida definida en $\mathbb{R} - \{0\}$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 \wedge x^2)\Pi(\mathrm{d}x) < \infty$$

y para toda $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\Psi(\lambda) = id\lambda + \frac{q^2\lambda^2}{2} + \int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x|<1\}})\Pi(\mathrm{d}x)$$

entonces existe un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y un proceso X bajo éste, tal que X es un proceso de Lévy con exponente característico $\Psi(\lambda)$.

Teorema B.1.3. *Todo proceso de Lévy es proceso de Markov*

B.2. Procesos de Lévy con saltos no negativos.

Vamos a suponer que X es un proceso de Lévy con saltos no negativos, esto es que la medida de Lévy del proceso tiene soporte en $[0,\infty)$. También es conocido como el proceso de Lévy espectralmente positivo.

Aunque X_t puede tomar los valores tanto positivos como negativos, podemos ver que la siguiente proposición se cumple

Proposición B.2.1. *Para toda $\lambda > 0$ tenemos*

$$\mathbb{E}[\exp\{-\lambda X_t\}] < \infty$$

Demostración. Sea $Y_t = -X_t$ y $T_a = \text{ínf}\{t \geq 0 : Y_t \geq a\}$, entonces podemos ver que

$$Y_{T_a} = a \qquad \mathbb{P} - \text{c.s. en } \{T_a < \infty\}$$

Después vamos a considerar un tiempo aleatorio exponencial $\tau(q)$ con parámetro $q > 0$ el cual es independiente de $\{X_t\}_{t \geq o}$.

Ahora vamos a mostrar que para cada $a, b > 0$ se tiene

$$\mathbb{P}\big(T_{a+b} < \tau(q)\big) = \mathbb{P}\big(T_a < \tau(q)\big)\mathbb{P}\big(T_b < \tau(q)\big)$$

veamoslo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(T_{a+b} < \tau(q)\big) &= \mathbb{P}\Big(\mathbb{P}\big(T_{a+b} < \tau(q), T_b < \tau(q) \big| \mathcal{F}_{T_b}\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{T_b < \tau(q)\}}\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{T_{a+b} < \tau(q)\}} \big| Y_{T_b}\big]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{T_b < \tau(q)\}}\mathbb{E}_b\big[\mathbb{1}_{\{T_{a+b} < \tau(q)\}}\big]\Big] \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{T_b < \tau(q)\}}\big]\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{T_a < \tau(q)\}}\big] \\
&= \mathbb{P}\big(T_a < \tau(q)\big)\mathbb{P}\big(T_b < \tau(q)\big)
\end{aligned}$$

Si definimos a $S_{\tau(q)} = \sup\{Y_s : 0 \leq s < \tau(q)\}$ podemos ver que

$$\mathbb{P}(S_{\tau(q)} > \epsilon) = \mathbb{P}(T_\epsilon < \tau(q))$$

solamente mostrando que $\{T_\epsilon < \tau(q)\}$ es equivalente a $\{S_{\tau(q)} > \epsilon\}$.

Supongamos que $\omega \in \{T_\epsilon < \tau(q)\}$ y sabemos que $T_\epsilon = \text{ínf}\{s : Y_s \geq \epsilon\}$, entonces $S_{T_\epsilon} = \epsilon$ y por lo tanto $S_{\tau(q)} \geq S_{T_\epsilon} = \epsilon$; entonces afirmamos que $\omega \in \{S_{\tau(q)} > \epsilon\}$.

Si ahora suponemos que $\omega \in \{S_{\tau(q)} > \epsilon\}$ entonces tenemos que $S_{\tau(q)} \geq S_{T_\epsilon}$ y por lo tanto $\tau(q) \geq T_\epsilon$; entonces afirmamos que $\omega \in \{T_\epsilon < \tau(q)\}$.

Entonces $\{T_\epsilon < \tau(q)\}$ es equivalente a $\{S_{\tau(q)} > \epsilon\}$.

Usando la falta de memoria de la ley exponencial la cual cumple $S_{\tau(q)}$ gracias a lo que acabamos de demostrar, entonces podemos afirmar que dicha variable tiene distribución exponencial con parámetro $\Phi(q)$.

Ahora vamos a ver que $\mathbb{P}\big(\tau(q) > \epsilon\big)$ se va cero cuando q se acerca a infinito, esto es fácil de ver ya que

$$\mathbb{P}\big(\tau(q) > \epsilon\big) = e^{-q\epsilon}$$

al aplicar el límite tenemos

$$\lim_{q \to \infty} e^{-q\epsilon} = 0$$

Esto nos va a ser util para mostrar que $S_{\tau(q)}$ converge a cero en probabilidad cuando q se va a infinito.

Sea

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{\tau(q)} > \epsilon) &= \mathbb{P}\big(T_\epsilon < \tau(q)\big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\mathbb{P}\big(T_\epsilon < \tau(q) \big| T_\epsilon\big)\Big) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}\big(T_\epsilon < \tau(q) \big| T_\epsilon = y\big) Q_{T_\epsilon}(\mathrm{d}y) \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}\big(\tau(q) > y\big) Q_{T_\epsilon}(\mathrm{d}y)
\end{aligned}$$

pero sabemos que $\mathbb{P}\big(\tau(q) > y\big)$ converge a cero cuando q se va a infinito, entonces claramente $S_{\tau(q)}$ converge en probabilidad a cero, como consecuancia vamos a tener que $\Phi(q) > \lambda$ cuando se escoge una q suficientemente grande.

De esta manera para una $t \in [0, \tau(q))$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[e^{\lambda Y_t}\big] &\leq \mathbb{E}\big[e^{\lambda S_{\tau(q)}}\big] \\
&= \int_0^\infty e^{-(\Phi(q)-\lambda)x} \Phi(q) \mathrm{d}x \\
&< \infty
\end{aligned}$$

De esta manera queda demostrado, por la propiedad de que el proceso es continuo por la derecha y permite que apartir del intervalo que tenemos extenderlo a la semirecta $[0, \infty)$.

■

La función característica $\lambda \to \mathbb{E}\big[\exp\{i\lambda X_t\}\big]$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ puede extenderse al plano superior complejo $\{\Im(\lambda) \geq 0\}$ y define a una función analítica. Por otro lado, la formula de Lévy-Kintchine y el hecho de que la medida de Lévy desaparezca en el semi-eje negativo muestra que el exponente característico $\Psi(\lambda)$ esta bien definido y es analítico en $\{\Im(\lambda) \geq 0\}$. Entonces podemos introducir la siguiente relación

$$\psi(\lambda) = -\Psi(i\lambda) = d\lambda + \frac{q^2\lambda^2}{2} + \int_{(0,\infty)} (e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x \mathbb{1}_{\{x<1\}})\Pi(\mathrm{d}x)$$

de esta manera tenemos la identidad

$$\mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda X_t\}\big] = \exp\{t\psi(\lambda)\}$$

Bibliografía

[1] Athreya, K. B.; Ney, P. E. ***Branching Processes*** Berlin, Springer-Verlag, 1972

[2] Bertoin, Jean ***Lévy Processes***

Cambridge, Cambridge University Press, 1996

[3] Bingham, N.H. ***Continuos Branching Processes and Spectral Positivity***

Stochastic Processes and Their Aplications, 4 (1976) 217 – 242

[4] Dynkin, E. B. ***Markov Processes, Volume I***

Berlin, Springer-Verlag, 1965

[5] Dynkin, E. B. ***Markov Processes, Volume II***

Berlin, Springer-Verlag, 1965

[6] Ethier, Stewart N.; Kurtz, Thomas G. ***Markov Processes Characterization and Convergence***

John Wiley & Sons, 1985

[7] Harris, Theodore E. ***The Theory of Branching Processes***

Berlin, Springer-Verlag, 1963

[8] Jirina, M. ***Stochastic Branching Processes with Continuos State Space***

Czech. Math. J., 8 (1958) 292 – 313

[9] Kamke, E. ***Differentialgleichungen, Lösungs-Methoden und Lösungen***

II. Liepzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1944

[10] Kolmogorov, A. N.; Gnedenko, B. V. ***Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables***

Mass., Addison-Wesley Publishing Company, 1954

[11] Lamperti, John ***Continuos State Branching Processes***

Bull. Am. Math. Soc., 73 (1967) 382 – 386

[12] Lamperti, John ***Limiting Distributions of Branching Processes***

Proc. Fifth Berkeley Symp., Vol. II, Part 2 (1967) 225 – 241

[13] Lamperti, John ***Stochastic Processes a Survey of the Mathematical Theory***

Berlin, Springer-Verlag, 1977

[14] Lamperti, John ***The Limit of a Sequence of Branching Processes***

Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 7 (1967) 271 – 288

[15] Silverstein, M. L. ***A New Aproach to Local Time***

J. Math. Mech., 17 (1968) 1023 – 1054

[16] Tudor, Constantin ***Procesos Estocásticos***

México, D.F., SMM, 1994

[17] Taylor, M. Howard; Karlin, Samuel ***A First Course in Stochastic Processes***

San Diego, Academic Press, 1975

[18] Yosida, K$\widehat{o}$suka ***Funtional Analysis***

Berlin, Springer-Verlag, 1971