Théorie de la mesure et intégration.

J.C. Pardo

Feuille de TD 3.

Exercices.

Exo 31. Soient X un ensemble et A, B des parties de X,

a) Montrer que la fonction définie par $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$ est la fonction indicatrice d'une partie de X, notée $A \triangle B$ (différence symétrique de A et B); décrire $A \triangle B$ en fonction de A et B.

b) Si A_1, A_2, A_3 sont des parties de X, montrer que $(A_1 \triangle A_2) \triangle A_3 = A_1 \triangle (A_2 \triangle A_3)$.

c) Si $\mathcal{T}$ est une tribu de parties de X, montrer que $\mathcal{T}$ est stable par l'opération $\triangle$.

Exo 32. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux tribus de parties d'un ensemble X. Montrer que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ est une tribu si et seulement si l'une de ces tribus est contenue dans l'autre.

Exo 33. Soit $\mathcal{T}$ une tribu de parties d'un ensemble X, B une partie de X, $\mathcal{T}'$ la tribu engendrée par $\mathcal{T} \cup \{B\}$. Montrer que $\mathcal{T}'$ est la famille des parties de X de la forme $(A \cap B) \cup (A' \cap B^c)$ pour A, A' dans $\mathcal{T}$.

Exo 34. Soit X un ensemble, $A_1, A_2, \ldots, A_p$ des parties de X telles que $X = \cup_{i=1}^{p} A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On considére la tribu $\mathcal{T}$ engendrée par $\{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est la famille des parties $A_J = \cup_{i \in J} A_i$, pour toutes les parties J de $\{1, 2, \ldots p\}$. Quel est le cardinal de $\mathcal{T}$ si tous les A_i sont non vides? Et en général?

Exo 35. Soit $\mathcal{T}$ la tribu définie dans l'exercice précédent et soit B une partie de X, et $\mathcal{T}'$ la tribu engendrée par $\mathcal{T}$ et $\{B\}$. Décrire une famille $\{A'_1, A'_2, \ldots, A'_r\}$ de parties de X, vérifiant les propriétés indiquées dans l'exercice precedent et engendrant $\mathcal{T}'$.

Exo 36. Soit $(B_n)_{1 \leq n \leq p}$ une famille finie quelconque de parties d'un ensemble X (ne satisfaisant pas nécessairement les conditions de 34.), $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par cette famille. Montrer que la famille de parties de la forme $B'_1 \cap B'_2 \cap \cdots \cap B'_p$, oú $B'_i = B_i$ ou B_i^c, satisfait les conditions de 34 et engendre $\mathcal{T}$. Montrer que $card\{\mathcal{T}\}$ est inférieur ou égal à 2^{2^p}.

Exemple: $X = \mathbb{R}$, $B_1 = [-1, 1]$, $B_2 = [0, 2]$, $B_3 = \{1/2\}$. Décrire la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq r}$, satisfaisant les conditions de 34 et engendrant la tribu $\mathcal{T}$ engendrée par $\{B_1, B_2, B_3\}$. $card\{\mathcal{T}\} =?$

Exo 37. Soit $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$E_n = \{0,1\}^{\{0,1,\ldots,n\}} = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Big| \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, x_i = 0 \text{ ou } x_i = 1\Big\}$$

et

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} = \Big\{(x_n)_{n \geq 1} \Big| \forall i \in \mathbb{N}^*, x_i = 0 \text{ ou } x_i = 1\Big\}.$$

Soit $\Pi_p : \Omega \to E_p$, la projection: $(x_n)_{n \geq 1} \mapsto (x_n)_{1 \leq n \leq p}$, définie pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit $C_n = \{\Pi_n^{-1}(A) | A \subset E_n\}$. Montrer que C_n est une tribu de parties de Ω. $card\{C_n\} =?$

b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on a: $C_n \subset C_{n+1}$. On pose $C = \cup_{n\geq 1} C_n$. Montrer que $\emptyset$ est élément de C, que C est stable par $A \mapsto A^c$ et par réunion: $(A, B) \mapsto A \cup B$.

c) Montrer que C n'est pas une tribu et que C est un semi-anneau de parties de Ω.

d) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de Ω, telles que pour tout m, A_m est élément de C et $A_{m+1} \subset A_m$. On suppose que $\cap_{n\geq 1} A_n = \emptyset$, montrer qu'il existe m tel que $A_m = \emptyset$. (Indication: Utiliser un peu de topologie des espace compacts).

Exo 38. Soit X un ensemble, $\mathcal{T}$ une tribu finie de parties de X, obtenue comme on l'a vu, par le procédé de 34. Décrire toutes les mesures sur $(X, \mathcal{T})$. A quelle condition une telle mesure est-elle finie (resp. σ-finie)?

Exo 39. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille de parties de X, éléments de $\mathcal{T}$. Montrer que

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Exo 40. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$. Décrire toutes les mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(N))$, (mesures finies et σ-finies).

Exo 41. Soit X un ensemble non dénombrable. Sur X, on considére la tribu

$$\mathcal{T} = \left\{ A \subset X \middle| A \text{ ou } A \text{ est dénombrable} \right\}.$$

Vérifier que $\mathcal{T}$ est bien une tribu. Décrire toutes les mesures finies sur $(X, \mathcal{T})$. (Pour une telle mesure μ, montrer que l'ensemble $\{x \in X | \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable).

Exo 42. Avec les hypothése et les notations de l'exo 37. Pour tout $A \in C_n$, on pose:

$$\nu_n(A) = \frac{1}{2^n} card\{\Pi(A)\}.$$

a) Montrer que ν_n est une mesure sur (Ω, C_n) et que si A est un élément de C_n, donc aussi de C_{n+1} et on a $\nu_n(A) = \nu_{n+1}(A)$.

b) Montrer que, sur $C = \cup_{n\geq 1} C_n$, on peut définir une fonction ν telle que, si $A \in C_n$, alors, $\nu(A) = \nu_n(A)$, et que cette fonction a les porpriétés suivantes:

   i) ν est á valeurs dans $[0, 1]$.

   ii) $\nu(\emptyset) = 0$.

   iii) Si $A, B \in C$ et $A \cap B = \emptyset$, alors,

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) \qquad \text{et} \qquad \nu(\Omega) = 1.$$

c) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille d'éléments de C, deux á deux disjointes, telles que $A = \cup_{n\geq 1} A_n$ soit élément de C. Montrer qu'alors $\nu(A) = \sum_{n\geq 1} \nu(A_n)$, autrement dit , ν est une pré-mesure sur C.

Exo 43. (Suite de 42) De ce qui précède et du théorème de Caratheodory, il résulte que ν se prolonge de façon unique en une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$, oú $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par C. On note encore ν le prolongement de ν à $\mathcal{T}$.

a) Soit $x \in \Omega$, montrer que $\{x\} \in \mathcal{T}$ et que $\nu(\{x\}) = 0$. Soit

$$A = \left\{ x \in \Omega \middle| \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq n, x_p = 1 \right\}.$$

Montrer que A est élément de $\mathcal{T}$. Que vaut $\nu(A)$?

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \{x \in \Omega | x_k = 1\}$. Montrer que $A_k \in \mathcal{T}$. Que vaut $\nu(A_k)$?

c) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ telle que $x = (x_k)_{k \geq 1} \mapsto \sum_{k \geq 1} x_k / 2^k$. Exprimer f à l'aide des indicatrices $\mathbb{I}_{A_k}$, $(k \geq 1)$ (A_k comme en (b)).

Exo 44. Soit $\mathcal{T}$ une tribu finie de parties d'un ensemble X et $f : X \to \mathbb{R}$ une application. A quelle condition f est-elle $\mathcal{T}$-mesurable? Montrer qu'il existe un entier $k \geq 0$, telle que la dimension sur $\mathbb{R}$ de l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{T}$-mesurables de X dans $\mathbb{R}$ soit égale à 2^k.

Exo 45. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble X et $f : X \to \bar{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ une fonction mesurable. A quelle condition existe-t-il un ensemble dénombrable I et pour chaque i dans I, une partie A_i de X, élément de $\mathcal{T}$, un élément α_i de $\bar{\mathbb{R}}_+$ tels que $i \neq j$ implique $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $f = \sum_{\imath \in I} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$?

Exo 46. On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est mesurable (Considérer $f^{-1}(I)$, pour I intervalle de $\mathbb{R}$).

Exo 47. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable; montrer que sa dérivée f' est mesurable (pour les tribus boréliennes).

Exo. 48 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables $f_n : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{ x \in X \middle| \text{ la suite } \big(f_n(x)\big) \text{ converge } \right\},$$

est un élément de $\mathcal{T}$ et que si $\mathcal{T}_A$ est la trace sur A de la tribu $\mathcal{T}$, alors la fonction $g : (A, \mathcal{T}_A) \to \mathbb{R}$, oú $g(x) = \lim f_n(x)$ si $x \in A$, est une fonction mesurable.

Exo 49. Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{S})$ deux espaces mesurables. Soient X_1 et X_2, éléments de $\mathcal{T}$ tels que $X = X_1 \cup X_2$ et $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Soit $f : X \to Y$ une application, $f_1 : X_1 \to Y$ (resp. $f_2 : X_2 \to Y$) la restriction de f à X_1 (resp. á X_2). Soit $\mathcal{T}_{X_1}$ (resp. $\mathcal{T}_{X_2}$) la trace de T sur X_1 (resp. sur X_2). Montrer que $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ est mesurable si et seulement si $f_1 : (X_1, \mathcal{T}_{X_1}) \to (Y, \mathcal{S})$ et $f_2 : (X_2, \mathcal{T}_{X_2}) \to (Y, \mathcal{S})$ sont mesurables.

Exo 50. Soit $\mathbb{U} = \left\{ z \middle| |z| = 1 \right\}$, muni de la tribu borélienne et $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{U}$ telle que $t \mapsto e^{it}$, qui est bijective et continue. Soit $\phi = f^{-1} : \mathbb{U} \to]-\pi, \pi]$.

a) Montrer que ϕ n'est pas continue.

b) Montrer que $\varphi : \mathbb{U} \backslash \{-1\} \to]-\pi, \pi]$, restriction de ϕ, est continue. En déduire que ϕ est mesurable. (Il ne faudrait pas en inférer que si f est bijective et mesurable alors , f^{-1} est mesurable en général!).

c) En déduire qu'il existe une fonction logarithme: $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ qui est mesurable (mais pas continue), telle que, pour tout complexe z on a $e^{L(z)} = z$ (Une telle fonction n'est pas unique.

Exo 51. (Suite 43) Montrer que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ définie en 43 (c) est mesurable.