Théorie de la mesure et intégration.

J.C. Pardo

Feuille de TD 6.

Exercices.

Exo. 72 Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$. On considère $\mathbb{R}$ muni de la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens et d'une mesure λ sur $\mathcal{B}$. On suppose que f est λ-localement intégrable (c'est-à-dire intégrable pour tout compact).

a) Montrer que f est mesurable.

b) Montrer que $\int_{[0,A]} f \mathrm{d}\lambda$ ne tend pas vers une limite quand A tend vers $+\infty$ entraîne

$$\int_0^\infty |f| \mathrm{d}\lambda = +\infty.$$

Exo. 73 Soit $(f_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions positives intégrables pour une mesure positive μ sur un ensemble X. On suppose que f_n converge $\mu-$presque partout vers une fonction f.

a) Posons $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ pour tout n. Montrer que g_n est intégrable et que la suite g_n converge μ-presque partout vers f.

b) On suppose de plus qu'il existe une constante M telle que

$$\int f_n \mathrm{d}\mu \leq M, \qquad \text{pour tout } n.$$

Que peut-on dire de l'intégrale de f? Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'on n'a pas necessairement

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

c) On suppose en plus des hypothèse du (b) que

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Montrer que

$$\int |f - f_n| \mathrm{d}\mu, \qquad \text{converge vers } 0.$$

d) Montrer, à l'aide d'un exemple, que le résultat du (c) n'est pas valable si les f_n ne sont pas positives.

Exo. 74 En utilisant le théorème de Lebesgue, calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^4x^4} \mathrm{d}x.$$

Peut-on appliquer la même méthode pour calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} \mathrm{d}x?$$

Calculer sa valeur.
75 Soit $(f_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions integrables telle que

$$\sum_{n\geq 0} \int |f_{n+1} - f_n| \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Montrer que $\sup_n |f_n|$ est intégrable et que la suite f_n converge p.p. vers une fonction f intégrable vérifiant

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Rappel: On note $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables de X dans $\mathbb{R}$ pour la mesure μ.
Exo. 76 Soit $(f_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(X, \mu)$. Montrer qu'il existe une sous suite $(f_{n_k}, k \in \mathbb{N})$ qui converge p.p (et dans $\mathcal{L}^1$) vers la limite f de (f_n) dans $\mathcal{L}^1$. En déduire que la suite (f_n) de fonctions intégrables convergent pour la semi-norme $\int |f| \mathrm{d}\mu$, on peut extraire une sous suite qui converge p.p. vers f. Donner un exemple de suite de fonctions intégrables (f_n) telle que $\int |f_n| \mathrm{d}\mu$ converge vers 0, quand $n \to \infty$, mais telle que (f_n) ne tende pas vers 0 presque partout.
Exo. 77 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour $h \in \mathbb{R}$, nous définissons la fonction $f_h(x) = f(x-h)$.

a) Soit f une fonction continue à support compact. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f_h(x) - f(x)| \mathrm{d}x \to 0, \qquad \text{quand } h \to 0.$$

b) Montrer la même propriété pour une fonction g intégrable (on admettra que l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$).

c) A-t-on la même propriété si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour la semi-norme de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, c'est-à-dire

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Exo. 78 Soit f une fonction intégrable. On note:

$$\hat{f}(y) = \int e^{ixy} f(x) \mathrm{d}x, \qquad \text{pour} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $\hat{f}$, transformée de Fourier de f, est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$.
Exo. 79 Avec les notations de l'exercice précédent, montrer le lemme de Riemman-Lebesgue: Si f est integrable, $\hat{f}$ tend vers 0 à línfini.
Exo 80 Soit f une fonction intégrable, ou seulement localement intégrable sur $\mathbb{R}$, pour la mesure de Lebesgue.

a) Montrer que $\int_{[o,x]} f(t)\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand x tend vers 0, à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

b) On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $n\int_{[o,1/n]} f(t)\mathrm{d}t$ tend vers une limite quand n tend vers $+\infty$, et determiner la limite.

c) Existe-t-il une limite à l'expression $n\int_{[o,1/n]} f(t)\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$, lorsque f est seulement localement intégrable.

Exo 81 Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$, existe-t-il une implication entre:

a) f est intégrable sur $\mathbb{R}$, pour la mesure de Lebesgue.

b) f tend vers une limite quand x tend vers $\pm\infty$.

Que peut on dire, si f est une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Exo 82 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que sa dérivée f' est une fonction mesurable pour la mesure de Lebesgue.

b) On suppose que f' est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, pour la mesure de Lebesgue. Montrer que f tend vers une limite quand x tend vers $\pm\infty$.

Exo. 83 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 pour $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. On suppose que f admet une limit à droite, et une à gauche, en 0, et que sa dérivée f' est localement intégrable.

a) Si ϕ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et à support compact, calculer:

$$\int f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x.$$

b) Calculer:

$$\int \ln|x|\phi'(x)\mathrm{d}x.$$

c) Donner un exemple de une fonction dérivable sur $[-1,1]\setminus\{0\}$, dont la dérivée n'est pas une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[-1,1]$.

Exo. 84 Pour (x_1, x_2) appartenant à $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, on note $E(x_1, x_2) = \ln(x_1^2+x_2^2)$. Montrer que la fonction E est une fonction localement intégrable dans $\mathbb{R}^2$. Maintenant, on définit $f(x_1, x_2) = 1/(x_1 + ix_2)$. Montrer que f est une fonction localement intégrable dans $\mathbb{R}^2$.
Exo. 85 (Utilise le lemme de Riemman-Lebesgue). Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, intégrable pour la mesure de Lebesgue, telle que $(\phi(v)-\phi(0))/v$ soit borné au voisinage de l'origine.

a) Montre que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(av)}{v}\phi(v) \to \pi\phi(0), \qquad \text{quand } a \to \infty.$$
On pourra utiliser les fonctions $\phi_1(x) = \phi(0)$ si $x \in [-1, 1]$, 0 sinon et $\phi_2 = \phi-\phi_1$ et admettre le lemme de Riemman-Lebesgue.

b) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $u \in \mathbb{R}$ au voisinage duquel, le quotient $(f(u + h) - f(u))/h$ soit borné. Montrer que
$$f(u) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_a^a e^{-iux} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

Conclusion concernant une fonction intégrable et dérivable.
Exo. 86 Soit f une fonction monotone (croissante), définie sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées.

b) En déduire que toute fonction monotone, définie sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, est mesurable.

Conclusion pour une fonction monotone, définie sur $\mathbb{R}$.
Exo. 87 *Seconde formule de la moyenne.* Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, par: $f(x) = g(x)h(x)$, où g est une fonction positive décroissante, et h est une fonction intégrable sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = g(a) \int_a^c h(x)\mathrm{d}x.$$
On demontrera que la propriété est vraie si g est une fonction en escalier, positive décroissante, pour en deduire ensuite la seconde formule de la moyenne.
Exo. 88 *Lemme d'Abel.* Soit f une fonction définie sur $[0, \infty[$, par:$f(x) = g(x)h(x)$, où g est une fonction positive décroissante tendant vers 0 à l'infini, et h est une fonction intégrable sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+$ telle qu'il existe une constante $\sigma > 0$, verifiant pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$:
$$\sigma_{a,b} = \left| \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \right| \leq \sigma.$$
Alors $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ est convergente, et $\int_A^\infty f(x)\mathrm{d}x$ est majoré en module par $\sigma g(A)$.
Exo. 89 *Lemme d'Abel pour les séries.* Soit $u_n = a_n b_n$ le terme général d'une série,

où $a_n \geq 0$ est une suite décroissante, tendant vers 0, et où b_n est une suite telle qu'il existe $\sigma \geq 0$ vérifiant:

$$|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}| \leq \sigma, \qquad \forall n, p \in \mathbb{N}.$$

Alors la série (u_n) est convergente et

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} + \cdots| \leq \sigma u_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

C'est un cas particulier de l'exercice précédent en prenant:

$$g = \sum_n a_n \mathbb{1}_{[n,n+1[}, \quad \text{et} \quad h = \sum_n b_n \mathbb{1}_{[n,n+1[}.$$

Exo. 90 Soit f une fonction définie sur $[0,1]$, à valeurs réelles, mesurable, bornée en dehors d'un ensemble de mesure nulle. On note:

$$||f||_\infty = \inf \Big\{ M \in \mathbb{R}_+ : \big|f(x)\big| \leq M \text{ p.p.} \Big\}.$$

a) Montrer que $\{x : |f(x)| > ||f||_\infty\}$ est de mesure nulle.

b) Montrer que la suite

$$\left(\int_0^1 f^n \mathrm{d}\lambda \right)^{1/n}$$

converge vers $||f||_\infty$ quand $n \to \infty$.

Exo. 91 Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, et f une fonction intégrable.

a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{T}$ de mesure finie, tel que:

$$\sup \Big\{ |f(x)| : x \in A \Big\} < \infty, \quad \text{et} \quad \int_{X \setminus A} |f(x)| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon.$$

Utiliser les ensembles $A_n = \{x : 2^n \leq |f(x)| \leq 2^n\}, n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, $\forall B \in \mathcal{T}$ vérifiant

$$\mu(B) \leq \delta, \qquad \text{on a} \qquad \int_B |f(x)| \mathrm{d}\mu \leq \epsilon.$$

c) Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application

$$x \longmapsto \int_0^x f(t) \mathrm{d}t,$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exo. 92 Soit
$$I_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \mathrm{d}x.$$
Montrer la convergence de la suite I_n, en utilisant le théorème de convergence monotone, et donner la limite.

Exo. 93 On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(t,x) = \frac{t^2}{1+t^2x^2}.$$
On remarque (sans preuve) qu'il s'agit d'une fonction de classe C^∞ à valeurs positives.

a) Pour t réel quelconque montrer que la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue) et donner la valeur de
$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x)\mathrm{d}x.$$

b) Pour t réel quelconque montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesque).

c) Pour étudier la continuité de la fonction F (indépendemment de la valeur explicitée en (a)), peut-on utiliser le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre? (Dans l'affirmative on montrera que toutes les hypothèse de ce théorème sont vérifiées, dans la négative on précisera la ou les hypothèse qui ne le sont pas).

d) Même question que la précédente en remplaçant "continuité" par "dérivabilité".

Exo. 94 Pour x et θ réels on pose , si cela a un sens $\varphi(x,\theta) = \ln(1 - 2x\sin(\theta) + x^2)$.

a) Montrer que, pour tout x réel, la fonction $\theta \mapsto \varphi(x,\theta)$ est définie presque partout et intégrable sur $[-\pi,\pi]$ (au sens de Lebesgue).

b) On définit F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par
$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x,\theta)\mathrm{d}\theta.$$
Montre que la fonction F est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie, pour $x > 1$,
$$4\pi \ln(x-1) \le F(x) \le 4\pi \ln(x+1).$$

c) Montrer que la fonction F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ et donner une expresion de F' et F'' à l'aide d'intégrales.

d) On fixe x différent de $-1, 0$ et 1, évaluer $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$ et en déduire la relation suivante $xF''(x) + F'(x) = 0$.

e) Donner la valeur de $F(x)$ pour tout x.

Exo 95. Le but de cet exercice est l'étude de la fonction F définie par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{(1+x)\sqrt{x}} \mathrm{d}x.$$

a) Montrer que la fonction F est bien définie sur tout $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Pour $t \geq 0$ donner une relation simple liant $F(t)$ et

$$G(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{(t+u)\sqrt{u}} \mathrm{d}u.$$

d) Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

e) Montrer que, pour $t \geq 0$ $G(t)$ peut aussi s'écrire

$$G(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{\sqrt{u}} f(t,u) \mathrm{d}u,$$

où f est une fraction rationnelle en t et u que l'on explicitera.

f) Montrer que lorsque t tend vers 0 par valeurs positives $G(t)$ a une limite finie strictemente positive.

g) Montrer que lorsque t tend vers 0 par valeurs positives $F(t)$ admet un équivalent du type $A\sqrt{t}$. La fonction F est-elle dérivable en 0?

h) Montrer que, lorsque t tend vers $+\infty$, $F(t)$ admet un équivalent du type $B/\sqrt{t}$.